Rev.Div.Amarun, **3**, 27–45, (2022)

AMARUN | Revista de Divulgación | AMARUN *www.amarun.org*

Una Breve Introducción al Cálculo Fraccionario

Esteban Morillo[1], Lenin Riera-Segura[2] y Miguel Yangari[3]

Resumen

El cálculo fraccionario busca extender el concepto clásico de derivada a órdenes no enteros. Este concepto recibe el nombre de derivada fraccionaria. Su origen data hace más de cuatro siglos y hoy en día despierta mucho interés debido a potenciales aplicaciones. A lo largo de la historia, han surgido varias definiciones de derivada fraccionaria. Las más destacables son las de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville y de Caputo. Estas definiciones tienen propiedades análogas a las del caso de derivadas de orden entero y presentan ventajas y desventajas entre ellas.

1. Introducción

Empecemos nuestra exposición con una construcción que está al alcance de cualquier estudiante de ingeniería en sus primeros semestres. Sea f una función real de variable real con fórmula $f(t) = t^k$, donde k es cualquier número entero. Su derivada es kt^{k-1}. De manera inductiva, es fácil ver que la derivada $n-$ésima de f es

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n}, \tag{1}$$

donde, para $m \in \mathbb{N}$, $m!$ es la operación factorial que se define recursivamente como $m! = m(m-1)!$ y $0! = 1$.

El lector atento notará que la ecuación (1) permite *extender* el concepto de derivada $n-$ésima de f más allá de órdenes enteros. ¿Cómo? Lo que inicialmente nos impide hacerlo es el denominador $(k-n)!$. Por ejemplo, si $n = 1/2$, entonces $k - n$ es un número racional r y $r!$ no está definido. Sin embargo, la función Γ definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \tau^{t-1} e^{-\tau} d\tau,$$

y válida para todos los números reales t excepto los enteros no positivos, permite extender la definición de factorial. De hecho, si $m \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(m+1) = m!$. Es así que, por extensión, podemos escribir la ecuación (1) como

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} t^{k-n}. \tag{2}$$

[1]esteban.morillo@epn.edu.ec
[2]lenin.riera@yachaytech.edu.ec
[3]miguel.yangari@epn.edu.ec

Para fijar ideas tomemos $n = 1/2$ y $k = 1$. En este caso la derivada de orden $1/2$ de f es

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}f(t) = \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)}t^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}t^{1/2}, \tag{3}$$

la cual es sorprendentemente una expresión válida. Más extraordinario aún es el hecho de que la $1/2$ derivada de la expresión anterior, como debíamos intuir, es 1. De hecho,

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}t^{1/2}\right) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}\left(t^{1/2}\right) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}\frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)}t^{1/2-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} = 1,$$

ya que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. Hasta aquí el ejemplo introductorio que sirve de motivación a esta, por decir poco, interesante rama del cálculo. En la siguiente sección presentaremos el recorrido histórico del cálculo fraccionario.

2. Un breve recorrido histórico del cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario tiene su origen en la correspondencia que mantenían Leibniz y L'Hôspital en 1695. Años antes, Newton y Leibniz ya habían inventado el cálculo infinitesimal y el concepto de derivada de orden entero era conocido. En una misiva del mencionado año, Leibniz pregunta: ¿Puede el concepto de derivada de orden entero ser extendido a órdenes no enteros? L'Hôspital en respuesta, pregunta: ¿Puede ese orden ser $1/2$? Leibniz, incapaz de predecirlo, responde ingenuo y genial: "*Eso ocasionaría una paradoja con consecuencias útiles algún día*". No se equivocó en lo último.

Otros grandes nombres también le dedicaron atención al problema plantaeado por L'Hôspital en 1695. Euler en 1730, Lagrange en 1772 y Laplace en 1812 abordaron el problema e hicieron aportaciones significativas. En 1819, Lacroix presenta la fórmula (1) de la derivada $n-$ésima de t^k. Y tal como hicimos nosotros, extendió la operación factorial mediante la función gamma y con (1) dió respuesta a la interrogante planteada por L'Hôspital.

Fue Fourier en 1822 el primero en dar una definición de derivada de orden no entero mediante la fórmula

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)v^\alpha \cos\left(v(t-u) + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dvdu,$$

para funciones suficientemente buenas. El siguiente paso lo dió Abel en 1823 mientras estudiaba el problema de la tautócrona, que se abarcará en detalle en la Sección 4. Abel se sirvió de la derivada fraccionaria para proponer una solución, lo cual supuso la primera aplicación del cálculo fraccionario. Una consecuencia immediata del trabajo de Abel es que, impresionantemente, la derivada de una constante no es cero para ciertos órdenes. La última afirmación no es trivial y llamó la atención de la comunidad matemática, en especial la de Liouville en 1832.

Durante la década de 1830 Liouville abordó el cálculo fraccionario formalmente y construyó las bases de la teoría que hoy conocemos. Él presentó una definición de derivada fraccionaria para funciones que se representan como una serie de exponenciales complejas. Su fórmula, sin embargo, padecía del mismo defecto que la de Lacroix: era muy restrictiva. Ensayó con otra fórmula de derivada fraccionaria, que involucraba la función gamma, para la familia de funciones $t^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Tampoco resultó satisfactoria.

En 1847 Riemann, influenciado por el trabajo de Liouville, propuso la siguiente expresión como definición de derivada fraccionaria

$$\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau.$$

Los próximos 70 años fueron nutridos por aportes de Center, Holmgrem, Grünwald, Letnikov, Laurent, Hadamard y Heaviside, entre los más destacados.

Weyl, por su lado, definió la noción de integración fraccionaria para funciones periódicas en 1917. La expresión es en realidad similar a la definición de Liouville pero con condiciones adicionales sobre las funciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

En 1922, Riesz mostró una versión análoga del Teorema de valor medio para integrales fraccionarias. Paralelamente, Hardy empezó a estudiar propiedades sobre integrales de orden fraccionario, en particular continuidad y sumabilidad, buscando resultados análogos a las propiedades ya demostradas para integrales usuales. Posteriormente generalizó estos resultados a exponentes complejos junto con Littlewood. Hardy también obtuvo varios resultados cuando la función considerada es Lipshitziana, generalizando algunas propiedades que demostró Weyl para funciones periódicas y exponentes particulares. Davis propuso la notación para las integrales fraccionarias de la siguiente manera

$$ {}_cD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, $$

y junto con las propiedades ya demostradas se logró encontrar la solución de ecuaciones diferenciales en donde interviene un exponente fraccionario, por ejemplo de la ecuación ${}_cD_t^{1/2} f(t) + \lambda f(t) = g(t)$.

En 1927, Marchaud definió una nueva forma de derivación fraccionaria involucrando diferencias finitas que coincide con la definición de Liouville para funciones suficientemente buenas. Él lo definió de la siguiente manera

$$ (\mathbf{D}^{\alpha} f)(t) = c \int_0^{+\infty} \frac{(\Delta_\tau^\ell f)(t)}{\tau^{1+\alpha}} d\tau, $$

donde $\alpha > 0$, $(\Delta_\tau^\ell f)(t)$ es la diferencia finita de orden $\ell > \alpha$, $\ell \in \mathbb{N}$, y c es una constante regularizante. La ventaja de usar esta definición es que es aplicable para funciones que se comportan mal en el infinito. Marchaud profundizó en el estudio de su expresión, compartiendo mejoras y relacionándola con las demás versiones de derivadas fraccionarias.

Después de una década de avances, Fabian estudió el comportamiento en el infinito de las integrales fraccionarias y más propiedades de sumabilidad para series e integrales. Esto le llevó a extender la definición de Riemann y lograr integrar sobre cualquier curva en el plano complejo y no solo sobre curvas particulares como se desarrollaron en años anteriores. El mismo año, Riesz introdujo integración fraccionaria para funciones de varias variables en forma de un operador potencial que se llamaría *potencial de Riesz* dado por la expresión

$$ I^{\alpha}(f)(t) = c \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(\tau)}{|t-\tau|^{d-\alpha}} d\tau, $$

donde d es la dimensión del espacio, $0 < \alpha < d$ y c es una constante. Este operador en realidad es una potencia fraccionaria negativa del operador de Laplace, es decir, se lo puede escribir como $(\Delta)^{-\alpha/2}$. Del mismo modo, se tiene un operador potencial

$$ c \int_{K_+} \frac{f(\tau)}{r(\tau)^{d-\alpha}} d\tau, $$

que se deriva del operador hiperbólico, donde $\alpha > d-2$ y $r(\tau) = \sqrt{\tau_1^2 - \tau_2^2 - \cdots - \tau_d^2}$ es la distancia de Lorentz y $K_+ = \{y \in \mathbb{R}^d : y_1^2 > y_2^2 + y_2^2 + \cdots + y_d^2\}$. Este potencial es sumamente útil para resolver problemas de Cauchy de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, que Riesz mismo demostró una década después.

En 1938, Love hizo una investigación detallada de integrales fraccionarias convergentes de la forma

$$ I_+^{\alpha}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(t-\tau)\tau^{\alpha-1} d\tau. $$

Esta forma de definirlas fue conveniente pues abarca funciones que no necesariamente se anulan en el infinito. Mostró que $I_+^{\alpha}(f)$ existe como un límite uniforme respecto a t siempre que f esté en una clase particular de funciones que describió en el mismo trabajo. Love, junto con Young, propusieron una versió que mn fraccionaria de la fórmula de integración por partes que mostró ser útil en el análisis fraccionario.

En años posteriores Nagy, Bang, Civin, entre otros, se dedicaron a encontrar desigualdades importantes, en especial del tipo Bernstein. También se siguieron generalizando propiedades y nociones hechas anteriormente para no tener limitantes y poder estudiar ecuaciones integro-diferenciales sin muchas restricciones. Por ejemplo, Kober mostró la unicidad de la solución de la ecuación

$$\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = g(t),$$

donde $0 < \alpha < 1$. Esta expresión se la puede reescribir como una ecuacion diferencial fraccionaria. Kober también empezó a relacionar la derivada fraccionaria con la transformada de Fourier multiplicada por el término $(\pm ix)^{-\alpha}$ y un año después, Widder hizo lo mismo con la transformada de Laplace. Riesz trabajó junto con Hagstrom para recopilar los fundamentos del cálculo fraccionario (usando las definiciones de Riemann-Liouville) y a su vez trató aspectos de la integral fraccionaria en teoría de potenciales, espacio de Lorentz, espacio de Riemann, teoría relativista y en la ecuación de onda. Este tipo de resultados nos da una idea de qué tan útil y versátil puede ser esta teoría.

En las décadas siguientes, ya con una teoría más estudiada y con muchos resultados publicados se empezó a encontrar aplicaciones en ecuaciones diferenciales que aparecen en diversos estudios, no solo matemáticos, algunos de los cuales se presentarán más adelante.

Aunque pueda ser una sorpresa, recién en 1971 Osler generalizó la regla de Leibniz para derivadas fraccionarias. Él siguió desarrollando estos temas hasta las vísperas del siglo XXI, donde se siguen encontrando aplicaciones y resultados sumamente interesantes sobre esta teoría.

Para mayor profundidad en los detalles históricos del desarrollo del cálculo fraccionario, referimos al lector a [3, 5, 6] y a las referencias allí mencionadas.

Ahora, conociendo el marco histórico de la teoría del cálculo fraccionario podemos empezar estudiando con mayor profundidad unas pocas ramas específicas de esta extensa teoría.

3. Definiciones de derivadas fraccionarias

En esta sección profundizaremos en tres enfoques distintos de derivada fraccionaria: los de Riemann-Liouville, de Grünwald-Letnikov y de Caputo. Cada uno de los mencionados tiene su importancia, lo que los hace destacar entre las diversas definiciones dadas en la sección anterior.

Por ejemplo, el sentido de Grünwald-Letnikov es útil para estudiar el comportamiento asintótico de las derivadas fraccionarias, mientras que el sentido de Caputo se usa para una gran cantidad de aplicaciones, pues es flexible al estudiar ecuaciones diferenciales. El sentido de Riemann-Liouville se destaca por ser una forma general de la mayoría de definiciones expuestas.

3.1. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

La construcción de las derivadas e integrales en el sentido de Grünwald-Letnikov se la hace por medio de diferencias finitas. Consideremos una función f suficientemente regular y recordemos que su primera derivada está dada por el límite

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t)-f(t-h)}{h}.$$

Aplicando esta expresión de manera inductiva, es fácil probar que la n-ésima derivada viene dada por

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \tag{4}$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial usual definido como

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, & \text{si } 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases} \tag{5}$$

Ahora, consideremos la siguiente cantidad para cualquier $\alpha, n \in \mathbb{N}$

$$f_h^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh). \tag{6}$$

Si $\alpha \leq n$ en esta expresión, gracias a (4) y (5), se tiene el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}(t). \tag{7}$$

Si queremos extender (7) a órdenes enteros negativos, es necesario extender al coeficiente binomial. Esto se lo hace, definiéndolo como

$$\binom{-\alpha}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{-\alpha}{k} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)(-\alpha-2)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}, \tag{8}$$

para $\alpha, k \in \mathbb{N}$. Por facilidad de escritura, se define la siguiente cantidad

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+k-1)}{k!} \tag{9}$$

para $\alpha, k \in \mathbb{N}$, con el fin de tener la relación

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}.$$

Esto nos permite reemplazar α por $-\alpha$ en (6), obteniendo la expresión para $\alpha, n \in \mathbb{N}$:

$$f_h^{(-\alpha)}(t) = h^\alpha \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f(t - kh). \tag{10}$$

Contrario a (7), un problema de tomar el límite cuando h tiende a 0 en (10) es que si n se mantiene fijo, esta expresión se anula. Para obtener una cantidad no nula se debe hacer tender h a 0, pero de manera que n tienda al infinito, lo que se puede lograr tomando $h = (t - a)/n$, donde a es una constante real tal que $t > a$. A este límite se lo denota como

$${}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-\alpha)}(t). \tag{11}$$

Para que este límite sea finito es necesario imponer condiciones sobre las funciones que se mencionan posteriormente y se detallan en [3].

Para fijar ideas, consideremos $\alpha = 1$ en (6). Entonces,

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{k=0}^{n} f(t - kh).$$

Puesto que $t - nh = a$, se puede deducir con algunos cambios de variables que el límite de esta expresión coincide con la integral de Riemann de f, es decir

$${}_aD_t^{-1} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Más aún, para $\alpha \in \mathbb{N}$, se puede mostrar de manera inductiva que se tiene la expresión

$${}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \tag{12}$$

conocida como la α-ésima integral de f.

Es importante notar que esta construcción que se ha hecho nos ha entregado expresiones que tienen sentido y resultan en cantidades interesantes para valores enteros de α. Siguiendo esta linea de pensamiento, podemos generalizar las expresiones para valores reales de α, en donde se usa una generalización del coeficiente binomial definido como

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}, \tag{13}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. En este caso más general, si $\alpha > k$ y α no es entero, el coeficiente es distinto de cero, siendo posible resultar en valores positivos o negativos. Por otro lado, esta definición coincide con (5) y (8) para valores de α correspondientes a cada definición. De la misma manera se puede generalizar (9) para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Con esto, podemos pasar a definir la integral y derivada fraccionaria en el sentido de Grünwald-Letnikov.

Definición 1 (Integral fraccionaria de Grünwald-Letnikov) *Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tales que $\alpha > 0$ y $t > a$. Se define la integral fraccionaria de orden α de f como*

$${}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f(t-kh). \tag{14}$$

Más aún, se puede mostrar que en realidad se tiene la igualdad

$${}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \tag{15}$$

y si se tiene suficiente regularidad sobre la función f, entonces integrando por partes podemos obtener la siguiente expresión

$${}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{-(\alpha+m)}} d\tau. \tag{16}$$

La utilidad de escribir la integral fraccionaria ${}_aD_t^{-\alpha} f(t)$ de esta manera se debe a que nos provee información asintótica cuando $t = a$.

Definición 2 (Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov) *Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tales que $\alpha > 0$ y $t > a$. Se define la derivada fraccionaria de orden α de f como*

$${}_aD_t^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh). \tag{17}$$

Con suficiente regularidad sobre la función se puede reescribir esta expresión en términos de las derivadas de la función f como

$${}_aD_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m}} d\tau, \tag{18}$$

donde $m = [\alpha]$, siendo $[\,\cdot\,]$ la función valor entero usual definida cómo

$$[x] = \begin{cases} \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}, & \text{si } x \geq 0, \\ \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La deducción de esta fórmula es algo técnica y se la puede revisar en [3].

Presentemos un ejemplo clásico de estos operadores fraccionarios.

Ejemplo 1 *Consideremos la función $f(t) = (t-a)^\nu$ donde ν es un número real. Calculemos primero la integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$:*

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(\tau-a)^\nu}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. $$

Podemos ver que para la convergencia de la integral, es necesario que $\nu > -1$. Así, tomando el cambio de variable $\tau = a + \xi(t-a)$ en la integral anterior obtenemos

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\nu+\alpha} \int_0^1 \xi^\nu (1-\xi)^{\alpha-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\nu+\alpha} B(\alpha, \nu+1), \end{aligned} $$

donde $B(\cdot,\cdot)$ es la función beta usual definida como

$$ B(u,v) = \int_0^1 \tau^{u-1}(1-\tau)^{v-1} d\tau, $$

para $u, v > 0$. Recordando que $B(\alpha,\nu+1) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+\alpha+1)$, se tiene la expresión

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}(t-a)^{\nu+\alpha}, \tag{19} $$

cuando $\alpha > 0$.

Ahora, sean $\alpha > 0$ y $m = [\alpha]$. Vamos a utilizar la expresión (18), de donde se requiere que $\nu > m$ para que la integral converja y además, que todos los términos $f^{(k)}(a)$ se anulen, por lo que la expresión se reduce a

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{\alpha}(t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t \frac{D^{m+1}(\tau-a)^\nu}{(t-\tau)^{\alpha-m}} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t \frac{(\tau-a)^{\nu-m-1}}{(t-\tau)^{\alpha-m}} d\tau. \end{aligned} $$

Tomando el cambio de variable $\tau = a + \xi(t-a)$ nuevamente, obtenemos que

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{\alpha}(t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha} B(m-\alpha+1, \nu-m) \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}. \end{aligned} $$

Con este resultado, se puede ver que cuando $\nu = 0$, es decir cuando $f \equiv 1$, su derivada fraccionaria no es 0.

3.1.1. Propiedades

Fijemos la notación $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y consideremos las funciones f y g continuas tales que sus derivadas e integrales fraccionarias existan.

1. **Linealidad.** Gracias a las Definiciones 1 y 2, es casi inmediato probar que tanto la derivada como la integral fraccionaria son lineales. Es decir, para cualesquiera dos funciones continuas f y g, y cualquier número real λ se tiene

$$ {}_aD_t^{\alpha}(f(t) + \lambda g(t)) = {}_aD_t^{\alpha} f(t) + \lambda\, {}_aD_t^{\alpha} g(t). $$

2. **Composición entre operadores fraccionarios y la derivada usual.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Se puede probar por un lado que

$$D^n\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) = {}_aD_t^{\alpha+n} f(t),$$

mientras que por otro lado

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha\left(D^n f(t)\right) &= D^n\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \\ &= {}_aD_t^{\alpha+n} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}. \end{aligned}$$

Gracias a estas igualdades, si $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, ..., n-1$, las derivadas conmutan. Es decir,

$$D^n\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) = {}_aD_t^\alpha\left(D^n f(t)\right) = {}_aD_t^{\alpha+n} f(t).$$

3. **Composición entre operadores fraccionarios.** Para estas composiciones, hay que tener cuidado y es necesario analizar por casos en los órdenes de integración o derivación fraccionaria. Si $\alpha < 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ entonces

$${}_aD_t^\beta\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

Mientras que si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, y $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, ..., m-1$, donde $m = [\alpha]$ entonces

$${}_aD_t^\beta\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

Más aún, cuando $\alpha, \beta > 0$ y si $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, ..., r$ con $r = \text{máx}\{m, n\}$ donde $m = [\alpha]$ y $n = [\beta]$, entonces las derivadas fraccionarias conmutan. Es decir,

$${}_aD_t^\beta\left({}_aD_t^\alpha f(t)\right) = {}_aD_t^\alpha\left({}_aD_t^\beta f(t)\right) = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

3.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea f una función continua para $t \geq a$. Consideremos el siguiente operador integral

$$I_a f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

La aplicación de I_a $n-$veces permite obtener inductivamente la fórmula:

$$I_a^n f(t) := \int_a^t \int_a^\tau \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau) d\tau \cdots d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \tag{20}$$

donde $n \in \mathbb{N}, a, t \in \mathbb{R}, t > a$. La expresión (20) se conoce como *la fórmula de Cauchy para la integración repetida*. Note que (20) permite substituir n por un real positivo α y $(n-1)!$ por su generalización $\Gamma(\alpha)$. Esta observación nos conduce a la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definición 3 (Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville) *Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha > 0$ y $t > a$. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como el operador*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \tag{21}$$

Por convención, se escribe $I_a^0 f(t) := \text{Id} f(t) = f(t)$. Para que (21) sea una cantidad finita basta pedir que la función f sea integrable en casi todo punto sobre el intervalo $]a, b[$, con $b > t$.

Por otro lado, la derivada de orden fraccionario se define de la siguiente manera:

Definición 4 (Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville) *Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha > 0, t > a$ y $n = [\alpha] + 1$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como el operador diferencial*

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \tag{22}$$

A la derivada fracionaria también se la suele denotar como ${}_aD_t^\alpha$ para hacer énfasis en la variable respecto a la que se deriva. En este caso, para que las derivadas fraccionarias sean finitas es necesario que f sea absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$ con derivadas absolutamente continuas en el mismo intervalo hasta el orden $n-1$, donde $b > t$. Este espacio se lo presenta con mayor profundidad en [6].

Contrario a la derivada de orden entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es necesariamente 0. Esto se lo puede ver en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2 *Primero, consideremos la función constante $f(t) = c$, donde $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por cálculo directo se obtiene*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(c) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^t \frac{c}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{1}{n-\alpha} D^n (t-a)^{n-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma(-\alpha+1)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Es claro que esta expresión no necesariamente es 0.

Ejemplos de las derivadas e integrales fraccionarias, en el sentido de Riemann-Liouville, de las funciones potencia y exponencial hacen uso de propiedades que se presentarán a continuación, por lo que se las presentará posteriormente.

3.2.1. Propiedades

Fijemos la notación $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y supongamos $\alpha \in \mathbb{R}$, $n = [\alpha] + 1$, $s = [\beta] + 1$. Consideremos las funciones f y g continuas tales que sus derivadas e integrales fraccionarias existan.

1. **Linealidad.** La linealidad de la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es consecuencia directa de (21) y (22). Es decir, que si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(f(t) + \lambda g(t)) &= D_a^\alpha f(t) + \lambda D_a^\alpha g(t), \\ I_a^\alpha(f(t) + \lambda g(t)) &= I_a^\alpha f(t) + \lambda I_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

2. **Representación.** Si $\alpha > 0$, se puede deducir directamente de (22) que

$$D_a^\alpha f(t) = D^n \left(I_a^{n-\alpha} f(t) \right). \tag{23}$$

3. **Interpolación.** Para $\alpha > 0$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \to n} D_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \to n-1} D_a^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t). \tag{24}$$

Similarmente, para la integral fraccionaria se tiene

$$\lim_{\alpha \to 0} I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

4. **Composición y no conmutatividad entre operadores fraccionarios.** Sean $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. La composición entre la derivada fraccionaria con la derivada usual tiene la siguiente forma

$$D_a^\alpha \left(D^m f(t)\right) = D_a^{\alpha+m} f(t). \tag{25}$$

En general, estos operadores no conmutan. Se puede mostrar en realidad que

$$D_a^\alpha \left(D^m f(t)\right) = D_a^{\alpha+m} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-m}}{\Gamma(1+k-\alpha-m)},$$

es decir, en general, se tiene que

$$D_a^\alpha \left(D^m f(t)\right) \neq D^m \left(D_a^\alpha f(t)\right).$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$, para $k = 0, 1, ..., m-1$, entonces los operadores conmutan. Del mismo modo que en el caso de Grünwald-Letnikov, la composición entre derivadas fraccionarias de distinto orden no conmuta y solamente se tiene

$$D_a^\alpha \left(D_a^\beta f(t)\right) = D_a^\beta \left(D_a^\alpha f(t)\right) = D_a^{\alpha+\beta}, \tag{26}$$

cuando $f^{(k)}(a) = 0$, para $k = 0, ..., r-1$, donde $r = \max\{n, s\}$.

Por otro lado, la composición entre integrales fraccionarias de distintos órdenes si conmutan y se puede probar que

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Más aún, cuando $\alpha > \beta$ se tiene la siguiente expresión para la composición de la derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville

$$D_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) = D_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

5. **Regla de Leibniz.** Recordando que para derivadas de orden entero, la regla de Leibniz consiste en aplicar la derivada a un producto de funciones que resulta en la expresión

$$D^n(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f(t) D^k g(t). \tag{27}$$

Cuando el orden de derivación es un número real α, se tiene una expresión análoga siempre que f y g cumplan ciertas características. Si f y g son analíticas en una vecindad de a (que admitan expansión en series de Taylor en ese punto), tales que cumplen las siguientes propiedades:

(i) $I_a^{n-\alpha} f$ y $I_a^{n-\alpha} g$ son absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$ con derivadas absolutamente continuas en el mismo intervalo hasta el orden $n-1$.

(ii) $(I_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a) = (I_a^{n-\alpha} g)^{(k)}(a) = 0$, para $k = 0, ..., n-1$.

Entonces se tiene la siguiente expresión como regla de Leibniz fraccionaria:

$$D_a^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D_a^{\alpha-k} f(t)\right) D^k g(t), \tag{28}$$

donde $\binom{\alpha}{k}$ es el coeficiente binomial definido en (13).

6. **Transformada de Laplace.** La transformada de Laplace de una función $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ se define como
$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} h(t) dt. \tag{29}$$
Recordemos que la transformada de Laplace de la derivada de orden entero n de una función h definida en intervalos $[a, +\infty[$ viene dada por
$$\mathcal{L}\left\{h^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n H(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} h^{(k)}(a) = s^n H(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k h^{(n-k-1)}(a). \tag{30}$$
En el contexto del cálculo fraccionario, se puede calcular una expresión para la transformada de Laplace de una derivada fraccionaria de orden α análoga a la presentada en la identidad anterior:
$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \left. D_a^{\alpha-k-1} f(t)\right|_{t=a}. \tag{31}$$
Para la integral fraccionaria de orden α en cambio se tiene
$$\mathcal{L}\{I_a^\alpha h(t)\}(s) = s^{-\alpha} H(s). \tag{32}$$

Habiendo revisado algunas propiedades de estos operadores fraccionarios, se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3 *Consideremos nuevamente la función $f(t) = (t-a)^\nu$, donde $\nu > -1$. Notemos primero que las expresiones (15) y (21) son esencialmente las mismas y por tanto tenemos ya calculado*
$$I_a^\alpha (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} (t-a)^{\nu+\alpha},$$
con $\alpha > 0$. Aprovechando la expresión anterior y (23) se sigue que la derivada fraccionaria de f está dada por
$$D_a^\alpha (t-a)^\nu = D^n \left(\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\nu+1)} (t-a)^{\nu+n-\alpha} \right) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} (t-a)^{\nu-\alpha}. \tag{33}$$

Ejemplo 4 *Consideremos la función $f(t) = e^t$. Para calcular su derivada fraccionaria utilizaremos su expansión en series de Taylor alrededor de a y la linealidad de la derivada fraccionaria:*
$$\begin{aligned} D_a^\alpha e^t &= D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^a (t-a)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^a (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \end{aligned}$$
En particular, cuando α es entero, esta expresión coincide con e^t. De la misma forma se puede ver que la integral fraccionaria de esta función es
$$I_a^\alpha e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^a (t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

3.3. Derivada fraccionaria de Caputo

En esta subsección discutiremos una de las definiciones más usadas de derivada fraccionaria: la derivada fraccionaria de Caputo. Para el desarrollo de la misma nos basaremos en el trabajo de Ishteva [1].

En 1967, Caputo propuso la siguiente definición de derivada fraccionaria.

Definición 5 *Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha > 0, t > a$ y $n = [\alpha] + 1$. La derivada fraccionaria de orden α de Caputo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como el operador*

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau. \tag{34}$$

Para que la fórmula de D_*^a esté bien definida se requiere que f sea n veces diferenciable y que $f^{(n)}$ sea integrable. Este requerimiento nos indica que la derivada fraccionaria de Caputo es más restrictiva que la de Riemann-Liouville.

La notación D_*^α no es usual. De hecho, la mayoria de textos denota la derivada fraccionaria de Caputo como ${}_a^C D_t^\alpha$. Sin embargo, en este texto preferimos la primera por simplicidad.

Veamos unos ejemplos a continuación.

Ejemplo 5 *Calculemos la derivada fraccionaria de Caputo de la función constante $f(t) = c$, donce $c \in \mathbb{R}$. Aplicando (34) vemos que*

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{c^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = 0, \tag{35}$$

debido a que la $n-$ésima derivada de una constante es cero.

Este ejemplo y el Ejemplo 2 muestran que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo no coinciden en el caso de funciones constantes, y que la derivada de Caputo si coincide con la derivada clásica.

Ejemplo 6 *Calculemos la derivada fraccionaria de Caputo de las funciones potencias $f(t) = (t-a)^\nu$, donde $\nu > -1$. De la Definición 5 y la identidad (2), vemos que*

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{((\tau-a)^\nu)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\nu-n+1)} \int_a^t \frac{(\tau-a)^{\nu-n}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau.$$

Tomando $\tau = a + \xi(t-a)$ una vez más, se sigue que

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\nu-n+1)} (t-a)^{\nu-\alpha} \int_0^1 \xi^{\nu-n} (1-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi.$$

La integral de la derecha se puede reconocer fácilmente como $B(\nu-n+1, n-\alpha)$. Por tanto,

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\nu-n+1)} (t-a)^{\nu-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} (t-a)^{\nu-\alpha}.$$

Notemos que en este caso, la derivada fraccionaria de Caputo de $f(t) = (t-a)^\nu$ coincide con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en (33). Observemos además que si $a = 0$, $\nu = 1$, and $\alpha = 1/2$, entonces

$$D_*^{1/2} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} (t-0)^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} t^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2},$$

lo cual coincide con lo obtenido en (1).

3.3.1. Propiedades

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $n = [\alpha] + 1$. Sean f y g dos funciones tal que sus derivadas fraccionarias de Caputo existan.

1. **Linealidad.** La linealidad de la derivada fraccionaria de Caputo

$$D_*^\alpha (f(t) + \lambda g(t)) = D_*^\alpha f(t) + \lambda D_*^\alpha g(t),$$

se sigue directamente de la expresión en (34).

2. **Representación.** La derivada fraccionaria de Caputo se puede representar como composición de operadores . En efecto, de (34), se sigue que

$$D_*^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} D^n f(t), \tag{36}$$

donde $I_a^{n-\alpha}$ es la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Notemos que (36) es la composición de los mismos operadores en (23) pero en orden opuesto. Esta observación junto a la no commutatividad de la composición de operadores permite inferir que los operadores de Riemann-Liouville y de Caputo no siempre coinciden, es decir,

$$D_a^\alpha f(t) \neq D_*^\alpha f(t). \tag{37}$$

Más adelante, veremos que los operadores de Riemann-Liouville y de Caputo sí coinciden para una clase específica de funciones.

3. **Interpolación.** Al igual que la derivada de Riemann-Liouville, la derivada de orden entero también se puede recuperar a partir de la fraccionaria de Caputo salvo por un término en el caso cuando $\alpha \to n-1$. Esto se puede ver a partir de la Definición 5. En efecto, si integramos por partes la integral en (34) se observa que

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(- f^{(n)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha} + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha} d\tau \right). \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos el límite cuando $\alpha \to n$ y $\alpha \to n-1$, por el Teorema de convergencia dominada se obtiene que

$$\lim_{\alpha \to n} D_*^\alpha f(t) = f^{(n)}(a) + f^{(n)}(\tau)\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = f^{(n)}(t),$$

y

$$\lim_{\alpha \to n-1} D_*^\alpha f(t) = f^{(n)}(a)(t-a) + f^{(n)}(\tau)(t-\tau)\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t f^{(n)}(\tau) d\tau = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a),$$

respectivamente. El primer límite refleja que la derivada de Caputo tiene el mismo comportamiento que la derivada de Riemann-Liouville en el caso cuando $\alpha \to n$. Sin embargo, en el caso cuando $\alpha \to n-1$, a diferencia de (24), el segundo límite evidencia comportamientos distintos ya que difieren por el término $f^{(n-1)}(a)$.

4. **No conmutatividad.** La derivada fraccionaria de Caputo no commuta con el operador diferencial D^m, es decir,

$$D_*^\alpha D^m f(t) \neq D^m D_*^\alpha f(t), \tag{38}$$

pero sí es verdad que

$$D_*^\alpha D^m f(t) = D_*^{\alpha+m} f(t). \tag{39}$$

Veamos una aplicación de (39). Sea $\beta = \alpha - (n-1)$. Por tanto, $0 < \beta < 1$, y en consecuencia,

$$D_*^\beta D^{n-1} f(t) = D_*^{\beta+n-1} f(t) = D_*^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t) = D_*^\alpha f(t). \tag{40}$$

La expresión en (40) establece que para hallar la derivada fraccionaria de Caputo de orden α de una función f es suficiente calcular primero su derivada clásica de orden $n-1$ y luego la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\beta \in]0,1[$. Por tanto, el estudio de la derivada de Caputo de orden arbitrario se reduce al estudio de la derivada de Caputo de orden $\beta \in]0,1[$.

5. **Regla de Leibniz.** La regla de Leibniz para la derivada fraccionaria de Caputo viene dada por
$$D_*^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D_a^{\alpha-k} f(t)\right) g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left((f(t)g(t))^{(k)}\Big|_{t=a} \right), \tag{41}$$
donde las funciones f y g son tales que ellas y todas sus derivadas son continuas, $\binom{\alpha}{k}$ es el coeficiente binomial definido en (13), y la expresión $(f(t)g(t))^{(k)}\Big|_{t=a}$ indica que primero se calcula la $k-$ésima derivada del producto fg y luego se evalúa en a.

6. **Transformada de Laplace.** Sea f una función n veces diferenciable definida para $t > a$ y F su transformada de Laplace. La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de orden α se define como
$$\mathcal{L}\left\{D_*^\alpha f(t)\right\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a). \tag{42}$$
La fórmula (42) se puede derivar fácilmente de (36). Para ello, definamos $g(t) = D^n f(t)$. Usando (32) se tiene que
$$\mathcal{L}\left\{D_*^\alpha f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{I_a^{n-\alpha} D^n f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{I_a^{n-\alpha} g(t)\right\}(s) = s^{-(n-\alpha)} G(s),$$
donde $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. De (30) vemos que
$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(a),$$
y por tanto,
$$\mathcal{L}\left\{D_*^\alpha f(t)\right\}(s) = s^{-(n-\alpha)} \left(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(a) \right) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a).$$
Notemos que si $\alpha = n$ en (42), entonces obtenemos (30). Esto nos indica que la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de orden α generaliza la transformada de Laplace de la derivada de orden entero n.

3.4. Equivalencias entre definiciones de derivadas fraccionarias

1. **Relación entre los operadores de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov.** Para comparar estas dos definiciones consideremos una función f que sea $n-1$ veces diferenciable en un intervalo $[a, T]$ y $f^{(n-1)}$ es integrable sobre $[a, T]$. Para $0 < \alpha < n$ y $m = [\alpha] + 1 \leq n$ se tiene que las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Grünwald-Letnikov coinciden. Es decir,
$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau = {}_aD_t^\alpha f(t). \tag{43}$$
En efecto, de (18) se tiene la segunda igualdad para la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. Por otro lado, podemos reescribir la integral de la anterior expresión como
$$D^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m+k-\alpha}}{\Gamma(1+m+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-2m+1}} d\tau \right).$$
Integrando por partes m veces esta cantidad nos da directamente la igualdad que necesitamos
$$D^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m+k-\alpha}}{\Gamma(1+m+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-2m+1}} d\tau \right)$$
$$= D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) = D^m \left(D_a^{-m+\alpha} f(t) \right) = D_a^\alpha f(t).$$

En las aplicaciones, la expresión particular de (43) tiene mayor relevancia cuando $n = 1$. Una consecuencia directa de esta relación es que si la derivada de Riemann-Liouville o Grünwald-Letnikov $D_a^\alpha f(t)$ existe, entonces toda derivada $D_a^\beta f(t)$ existe para $0 < \beta < \alpha$. Para ver que en efecto se tiene esta propiedad basta notar que

$$D_a^\alpha f(t) = D^1 \left(D_a^{\alpha-1} f(t) \right).$$

Si denotamos por $g(t) = D_a^{\alpha-1} f(t)$ y reemplazamos la anterior igualdad en (43), en el caso particular cuando $n = 1$, y notando que $0 < 1 + \beta - \alpha < 1$ se concluye que $D_a^{1+\beta-\alpha} g(t)$ existe. Gracias a las fórmulas de composición de derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville se tiene

$$D_a^{1+\beta-\alpha} g(t) = D_a^{1+\beta-\alpha} D_a^{\alpha-1} f(t) = D_a^\beta f(t).$$

2. **Relación entre los operadores de Riemann-Liouville y de Caputo.** Sea $t > a$ y f una función n veces diferenciable. Los operadores de Riemann-Liouville y de Caputo se relacionan mediante la expresión

$$D_*^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) = D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right). \tag{44}$$

Veamos que la primera igualdad en (44) se satisface para el caso $a = 0$. Para ello, consideremos la expansión en series de Taylor de f alrededor de 0,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}, \end{aligned} \tag{45}$$

donde

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau = I^n f^{(n)}(t).$$

Tomando el operador de Riemann-Liouville en (45) vemos que

$$\begin{aligned} D_0^\alpha f(t) &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_0^\alpha t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D_0^\alpha R_{n-1}. \end{aligned}$$

Usando (33) vemos que

$$\begin{aligned} D_0^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D_0^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + D_*^\alpha f(t), \end{aligned}$$

de donde finalmente obtenemos el resultado deseado. Este resultado nos permite deducir que los operadores de Riemann-Liouville y de Caputo coinciden cuando $f^{(k)}(0) = 0$, para $k = 1, \ldots, n-1$.

Usemos (44) para calcular la derivada fraccionaria de Caputo de las funciones potencias $(t-a)^\nu, \nu > n-1$ definidas en intervalos $[a, +\infty[$. Entonces,

$$D_*^\alpha (t-a)^\nu = D_a^\alpha (t-a)^\nu - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} ((t-a)^\nu)^{(k)}|_{t=a} = D_a^\alpha (t-a)^\nu, \tag{46}$$

ya que $((t-a)^\nu)^{(k)}|_{t=a} = 0$ para $k \leq n-1 < \nu$. Este resultado es congruente con lo obtenido en los Ejemplos 3 y 6.

Gracias a (44), también podemos dar otra fórmula para la derivada fraccionaria de Caputo para funciones que se representan como series de potencias. Entonces, si

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

se tiene que

$$D_*^\alpha f(t) = D_*^\alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D_*^\alpha t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

4. Aplicaciones

1. **El problema de valores iniciales [1].** Usemos la derivada fraccionaria de Caputo para resolver el siguiente problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) - \lambda y(t) = 0, & t > 0,\ n = [\alpha] + 1, \quad (47) \\ y^{(k)}(0) = b_k, & b_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n-1, \quad (48) \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ es un parámetro. Tomemos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial fraccionaria (47). Entonces,

$$s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0) - \lambda Y(s) = 0, \tag{49}$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$ y $\mathcal{L}\{-\lambda y(t)\}(s) = -\lambda Y(s)$. Despejando $Y(s)$ y considerando las condiciones iniciales (48) nos queda que

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda} b_k.$$

Se puede ver además que

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}\left\{ t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) \right\}(s) b_k = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) \right\}(s),$$

donde $E_{\theta,\omega}$ definida por

$$E_{\theta,\omega}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\theta k + \omega)},\ \theta, \omega > 0,\ z \in \mathbb{R} \tag{50}$$

se conoce como función de tipo Mittag-Leffler y supone una generalización de la función exponencial. Finalmente, $y(t)$ se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha).$$

2. **El problema de la curva tautócrona [2].** Supongamos que un objeto se desliza libremente (sin rozamiento) por efecto de la gravedad a lo largo de una pendiente desconocida desde un punto arbitrario hasta el punto más bajo de ella. Es claro que dependiendo del punto de partida y de la curva que describe la pendiente, el objeto tardará más o menos tiempo en llegar al punto más bajo de la pendiente. El problema estudiado por Abel en 1823 consiste en hallar la curva con la propiedad de que el tiempo que tarda el objeto en llegar hasta el punto más bajo de ella es independiente del punto de partida.

   Para estudiar este problema, primero establezcamos un sistema de referencia. Trabajemos en el plano (x, y) y fijemos el punto más bajo de la curva en el origen $(0, 0)$. Denotemos por (x, y) el punto inicial en el primer cuadrante y $(x_\star, y_\star)$ cualquier punto en la curva entre $(0, 0)$ y (x, y). Por la Ley de conservación de energía se tiene el siguiente modelo

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 = mg(y - y_\star),$$

   donde L es la longitud de la curva medida desde el origen, m es la masa del objeto y g es la gravedad. Como la longitud de la curva depende evidentemente de la altura, $L = L\left(y_\star(t)\right)$. Por tanto,

$$L'\frac{dy_\star}{dt} = -\sqrt{2g(y - y_\star)}.$$

   Integrando respecto a t entre 0 y T se tiene que

$$\int_0^y \frac{L'(y_\star)}{\sqrt{y - y_\star}}dy_\star = \sqrt{2g}T. \tag{51}$$

   La integral de la izquierda es muy similar a la derivada fraccionaria de Caputo (34) cuando $\alpha = 1/2$. De hecho, (51) se reduce a

$$D_*^{1/2}L(y) = \frac{\sqrt{2g}T}{\Gamma(1/2)}.$$

   Finalmente se obtiene

$$L(y) = \frac{2\sqrt{2g}T}{\pi}y^{1/2}. \tag{52}$$

   Por otro lado,

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2. \tag{53}$$

   Combinando (52) y (53),

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2gT^2}{\pi^2 y} - 1}.$$

   La solución de esta ecuación describe la curva tautócrona, y está dada paramétricamente por

$$\begin{cases} x = \dfrac{gT^2}{\pi^2}(\theta + \sin(\theta)) \\ y = \dfrac{gT^2}{\pi^2}(1 - \cos(\theta)). \end{cases}$$

3. **Modelo de absorción de medicamentos [4].** Se considera un modelo compartimental como en la Figura 1. Los compartimientos en esta clase de modelos son dos medios o etapas distintas y el problema a estudiar es cómo cambia una sustancia cuando pasa de un compartimento a otro.

   Para el problema de absorción de medicamento tenemos que el primer compartimento representa el lugar en donde se aplica el medicamento y el segundo representa la región del cuerpo por donde el medicamento se propaga, como el plasma de la sangre o similares. En la Figura 1 se tiene que

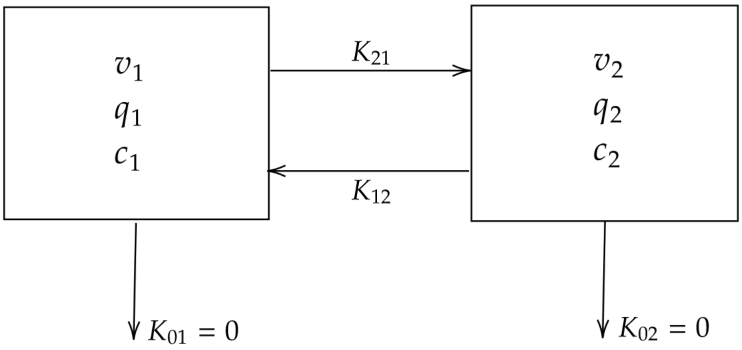

Figura 1: Modelo compartimental de dos compartimentos para la absorción de medicamentos.

$q_i = v_i c_i$ es la cantidad de medicamento en el compartimento i, v_i el volumen del mismo compartimento, c_i la concentración del medicamento y los coeficientes K_{ij} son la razón de transferencia del compartimento i al compartimento j, donde $i, j \in \{1, 2\}$.

La absorción del medicamento puede modelarse, considerando la derivada fraccionaria de Caputo con $a = 0$, de la siguiente manera:

$$\tau_1^{\alpha_1 - 1} D_*^{\alpha_1} q_1(t) = -K_{21} q_1(t),$$
$$\tau_2^{\alpha_2 - 1} D_*^{\alpha_1} q_2(t) = K_{21} q_1(t) + K_{02} q_2(t),$$

con condiciones iniciales $q_1(0) = d_1$ y $q_2(0) = d_2 = 0$, donde d_i es la dosis en el i-ésimo compartimiento, τ_i es el tiempo característico que el medicamento pasa en el compartimento i y $t > 0$.

Usualmente lo que se busca en este problema es la concentración del medicamento, lo cual se puede lograr despejando de las expresiones de q_i, que se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Una manera de resolver este sistema es considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Así, dividiendo cada ecuación para $\tau_i^{\alpha-1}$ respectivamente, se obtiene un nuevo sistema

$$D_*^{\alpha} q_1(t) = -k_{21} q_1(t),$$
$$D_*^{\alpha} q_2(t) = k_{21} q_1(t) + k_{02} q_2(t),$$

donde $k_{ij} = K_{ij}/\tau_i^{\alpha-1}$. Este sistema se lo puede resolver mediante la transformada de Laplace (la solución detallada se puede encontrar en [4]), obteniendo las funciones

$$q_1(t) = d_1 E_{\alpha,1}(-k_{21} t^{\alpha}),$$
$$q_2(t) = d_2 E_{\alpha,1}(-k_{02} t^{\alpha}) + d_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-k_{02}(t-s)^{\alpha}\right) E_{\alpha,1}\left(-k_{21} s^{\alpha}\right) dt,$$

donde $E_{\alpha,1}$ es la función de tipo Mittag-Leffler definida en (50). Habiendo obtenido la cantidad de medicamento en cada compartimento, se puede obtener fácilmente su respectiva concentración, resolviendo así el problema.

Referencias

[1] Ishteva, M. *Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator*. Master's thesis, Universität Karlsruhe, 2005.

[2] Kisela, T. *Fractional differential equations and their applications*. Master's thesis, Brno University of Technology, 2008.

[3] Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, USA, 1999.

[4] Popović, J. K., Atanacković, M. T., Pilipović, A. S., Rapaić, M. R., Pilipović, S., and Atanacković, T. M. *A new approach to the compartmental analysis in pharmacokinetics: fractional time evolution of diclofenac*. Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics, Vol. 37, Issue 2, 2010, pp. 119–134.

[5] Ross, B. *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*. in: Fractional Calculus and Its Applications, Lecture Notes in Mathematics No 457, eds. Ross, B., Springer, Heidelberg, 1975.

[6] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.