Rev.Div.Amarun, **4** (2022), 46–62

Revista de Divulgación

AMARUN
www.amarun.org

Haces y Geometría Algebraica

Leonardo Daniel Montoya Pérez[1] Andrés Alejandro Soledispa Tibán[2]

Resumen

En el presente artículo, se presenta la definición de categoría y funtor para posteriormente introducir los conceptos de prehaz y haz. A partir de estas herramientas, se presenta el concepto de espacio anillado y $\mathscr{O}_X$-módulo. Se realiza una revisión de las subvariedades afines y la topología de Zariski junto con algunas propiedades importantes. Haciendo uso del material expuesto en las secciones previas, se expone la definición de variedad afín y variedad algebraica. Finalizamos nuestro trabajo con un vistazo a las aplicaciones de las variedades algebraicas.

1. Introducción

La geometría algebraica tiene como objeto de estudio a las variedades algebraicas: conjuntos determinados por las soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales en varias variables con coeficientes sobre un cuerpo. Como ejemplos de variedades algebraicas tenemos a puntos, curvas, superficies o variedades de dimensión superior.

A lo largo de la historia, varios matemáticos como Abel, Riemann, Poincaré, Noether, la escuela italiana de Severi y, posteriormente, Weil, Zariski y Chevalley, han realizado un trabajo brillante en esta área. En los años 1950 y 1960, Serre y Grothendieck revolucionaron este campo a través de la teoría de haces y, desde entonces, esta rama ha tomado un protagonismo considerable dentro de las matemáticas [16].

En el presente artículo, se realiza una introducción a la teoría de haces y la geometría algebraica. Principalmente, se tiene como objetivo presentar el concepto de variedad algebraica. Con esta finalidad, se divide el artículo en secciones, donde se abordan una serie de conceptos y resultados que permitirán al lector comprender el concepto de variedad algebraica de forma clara y sencilla.

En la Sección 2, se presenta el concepto de categoría y funtor que son de vital importancia en la comprensión de la Secciones 3 y 4. En la Sección 3, se presenta el concepto de haz y prehaz junto con algunos ejemplos que servirán al lector para familiarizarse con estos objetos. En la Sección 4, se expone el concepto de espacio anillado y $\mathscr{O}_X$-módulo. El lector podrá verificar que esta sección es parte medular de este artículo, pues una variedad algebraica es un espacio anillado dotado con un par de propiedades adicionales. En la Sección 5, se estudian las subvariedades afines que, posteriormente, nos ayudarán a comprender de manera sencilla a la topología de Zariski. Esta topología es la más adecuada para la construcción de variedades algebraicas. En la Sección 6, después de realizar un par de aclaraciones, se expone el concepto de variedad algebraica. Finalizamos nuestro trabajo en la Sección 7, donde se contestan un par de preguntas con el objetivo de exhibir algunas aplicaciones de las variedades algebraicas y los temas que el lector podría abordar para continuar con el estudio de la geometría algebraica.

[1] leonardo_montoya@sfu.ca
[2] asoledispatiban@gmail.com

2. Categorías y funtores

En 1945, los matemáticos Eilenberg y Mac Lane introducen el concepto de categoría, como preparación para lo que llamaron funtores y transformaciones naturales en su estudio sobre topología algebraica [7]. La definición de categoría evolucionó con el tiempo, de acuerdo con los objetivos elegidos por el autor y el marco matemático. Eilenberg y Mac Lane dieron al principio una definición puramente abstracta, en la línea de la definición axiomática de un grupo. Otros, comenzando con Grothendieck (1957) y Freyd (1964), eligieron, por razones prácticas, definir categorías en términos de teoría de conjuntos [12].

La teoría de categorías es un lenguaje matemático muy útil, que permite ver los componentes universales de una familia de estructuras de un tipo dado, y revela cómo los diferentes tipos de estructuras se relacionan entre sí. Por ejemplo, en topología algebraica, los espacios topológicos están relacionados con grupos (y módulos, anillos, etc.) de varias formas (como homología, cohomología, homotopía, teoría K). Eilenberg y Mac Lane inventaron la teoría de categorías precisamente para aclarar y comparar estas conexiones [6, 7].

Para fines de este artículo, repasaremos algunas partes de la teoría que nos serán útiles. Siendo más específicos, presentaremos el concepto de categoría y funtor que usaremos en la Secciones 3 y 4. Además, exhibiremos algunos ejemplos que permitirán al lector familiarizarse con los conceptos presentados. Para el lector que busque profundizar en el tema se recomienda [12] y [11].

2.1. Categorías

Definición 1. Una categoría (pequeña[3]) $\mathscr{C}$ consiste en:

(1) Una colección de objetos $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(2) Para cada par A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, cuyos elementos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ son llamados morfismos (o flechas).

(3) Los morfismos satisfacen las siguientes propiedades:

  (a) Composición: Para cada par (f,g) con $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$, existe una flecha correspondiente en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$ que notamos $g \circ f$. En otras palabras existe la correspondencia

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}.$$

  (b) Composición asociativa:

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h),$$

  para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ y cada $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D,A)$.

  (c) Dado $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, existe un único $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$, tal que

$$\mathrm{Id}_A \circ f = f \;\text{ y }\; g \circ \mathrm{Id}_A = g,$$

  para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ y cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$.

Definición 2. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ dos objetos. Un isomorfismo entre A y B es un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, tal que existe un único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$, de manera que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B \;\text{ y }\; g \circ f = \mathrm{Id}_A.$$

Cuando exista un isomorfismo entre A y B escribiremos $A \cong_{\mathscr{C}} B$. Además, si $A = B$ diremos que f es un automorfismo.

[3] Se usa la palabra *pequeña* cuando los objetos de la categoría son conjuntos [11].

Ejemplo 1. Varias estructuras matemáticas de uso cotidiano son de hecho categorías. A continuación, exhibimos algunos ejemplos de las categorías más comunes con su respectiva notación:

Categoría	**Notación**	**Objetos**	**Morfismos**
Conjuntos	*Sets*	Conjuntos	Funciones
Grupos	*Grps*	Grupos	Homomorfismos de grupos
Anillos con unidad	*Rings*	Anillos (con unidad)	Homomorfismos de anillos
Anillos sin unidad	*Rngs*	Anillos (sin unidad)	Homomorfismos de anillos
$\mathbb{K}$-espacio vectoriales	$Vec_{\mathbb{K}}$	Espacios vectoriales	Mapas $\mathbb{K}$-lineales
A-módulos	A-*Mod*	A-módulos	Homomorfismos A-lineales
Espacios topológicos	*Top*	Espacios topológicos	Funciones continuas
Variedades diferenciables	Man^{∞}	Variedades diferenciables	Funciones diferenciables

Ejemplo 2. Sea X un espacio topológico. Se define a $Top(X)$ (no confundir con la categoría *Top* del Ejemplo 1) como la categoría cuyos objetos son los abiertos sobre X y cuyos morfismos son

$$\mathrm{Hom}_{Top(X)}(U,V) = \begin{cases} \{\imath : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V, \\ \emptyset & \text{si } U \nsubseteq V, \end{cases}$$

donde $U, V \subseteq X$ son abiertos e $\imath : U \hookrightarrow V$ es el mapa inclusión. Es decir, los conjuntos $\mathrm{Hom}_{Top(X)}(U,V)$ son unitarios o vacíos. Para comprobar que $Top(X)$ es una categoría debemos probar que los morfismos satisfacen la propiedad (3) de la Definición 1. Es decir, debemos mostrar que existe una composición, que esta es asociativa y que existe un morfismo identidad para cada abierto de X. Notemos lo siguiente:

(a) La composición en esta categoría es la composición de funciones, la cuál está bien definida siempre que los conjuntos de morfismos correspondientes sean no vacíos.

(b) Composición asociativa:
Sean $T \subseteq U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, y $h \in \mathrm{Hom}_{Top(X)}(T,U)$, $f \in \mathrm{Hom}_{Top(X)}(U,V)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{Top(X)}(V,W)$ los únicos elementos de cada conjunto de morfismos. Se sigue que

$$(g \circ f) \circ h = (\imath \circ \imath) \circ \imath = \imath \circ (\imath \circ \imath) = g \circ (f \circ h).$$

(c) Note que $U \subseteq U$, por lo tanto $\mathrm{Hom}_{Top(X)}(U,U) = \{\imath : U \hookrightarrow U\} = \{\mathrm{Id}_U\}$ para cada U abierto de X.

2.2. Funtores

Definición 3. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un funtor *covariante* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ consiste en:

(1) Funciones que asignan a cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.

(2) Funciones entre los morfismos que son compatibles con la identidad y composición. Esto es, a cada morfismo $f : A \to B \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ se le asigna un $F(f) : F(A) \to F(B) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ y además:

   (a) $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$.

   (b) Para cada $f : A \to B \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ y cada $g : B \to C \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$, se tiene que

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Observación 1.

- Se define un funtor *contravariante* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de forma análoga, excepto que en el literal (2) de la Definición 3 intercambiamos la dirección de las flechas. En otras palabras, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathscr{C}$, entonces $F(f) : F(B) \to F(A)$, $F(g) : F(C) \to F(B)$ y $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.
- Los funtores preservan isomorfismos, es decir, $A \cong_{\mathscr{C}} B$ implica que $F(A) \cong_{\mathscr{D}} F(B)$.

Ejemplo 3. (**Funtor de olvido**) Este funtor "olvida" estructuras adicionales. Por ejemplo, consideremos un anillo $(A,+,\cdot)$, el funtor $F_{\text{olv}} : \mathit{Rings} \to \mathit{Sets}$ asocia al anillo $(A,+,\cdot)$ el conjunto subyacente A, y asocia a un morfismo de anillos la función entre los conjuntos subyacentes. Veamos que $F_{\text{olv}} : \mathit{Rings} \to \mathit{Sets}$ es, en efecto, un funtor.

(1) Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Se tiene que

$$F_{\text{olv}}((A,+,\cdot)) = A.$$

(2) Sean $f : (A,+,\cdot) \to (B,\tilde{+},\tilde{\cdot})$ y $g : (B,\tilde{+},\tilde{\cdot}) \to (C,\hat{+},\hat{\cdot})$ dos morfismos de anillos.

(a) Notemos que

$$\begin{aligned} F_{\text{olv}}(f) : F_{\text{olv}}((A,+,\cdot)) \to F_{\text{olv}}((B,\tilde{+},\tilde{\cdot})) &\Leftrightarrow F_{\text{olv}}(f) : A \to B \\ &\Leftrightarrow f : A \to B. \end{aligned}$$

En otras palabras, $F_{\text{olv}}(f) = f$ es simplemente una función de A en B. Así, es claro que

$$F_{\text{olv}}(\mathrm{Id}_{(A,+,\cdot)}) = \mathrm{Id}_A : A \to A.$$

(b) Ahora, si analizamos la composición para el morfismo $g \circ f : (A,+,\cdot) \to (C,\hat{+},\hat{\cdot})$, se obtiene

$$F_{\text{olv}}(g \circ f) = g \circ f : A \to C.$$

Además, se verifica

$$F_{\text{olv}}(g) \circ F_{\text{olv}}(f) = g \circ f : A \to C.$$

Por lo tanto, empleando las dos fórmulas precedentes, se concluye que

$$F_{\text{olv}}(g \circ f) = F_{\text{olv}}(g) \circ F_{\text{olv}}(f).$$

De esta manera, vemos que F_{olv} es un funtor covariante.

El siguiente ejemplo juega un rol importante al momento de relacionar el concepto de categoría con el concepto de prehaz que presentaremos en la sección posterior.

Ejemplo 4. Sea X un espacio topológico normado (o una variedad diferenciable). Definimos el funtor contravariante $C^\infty_X : \mathit{Top}(X) \to \mathit{Rings}$ de la siguiente manera: a cada abierto $U \subseteq X$, asignamos el anillo conmutativo con unidad $C^\infty_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$ y a cada morfismo $\imath : V \hookrightarrow W$ en $\mathit{Top}(X)$, el morfismo

$$\begin{aligned} C^\infty_X(\imath : V \hookrightarrow W) : C^\infty_X(W) &\to C^\infty_X(V) \\ f &\mapsto f|_V \end{aligned}.$$

Es decir, dada una función $f : W \to \mathbb{R}$, la restringimos a V, obteniendo $f|_V : V \to \mathbb{R}$.

Veamos como se comporta este funtor con respecto a la propiedad (2) de la Definición 3, para ello, consideremos $\imath : U \hookrightarrow V$ y $\imath : V \hookrightarrow W$ dos morfismos de la categoría $\mathit{Top}(X)$, donde $U \subseteq V \subseteq W$ son abiertos de X.

(a) Note que $C^\infty_X(\mathrm{Id}_U) = C^\infty_X(\imath : U \hookrightarrow U)$ toma una función sobre U y la restringe a U, de donde tenemos

$$C^\infty_X(\mathrm{Id}_U) = C^\infty_X(\imath : U \hookrightarrow U) = \mathrm{Id}_{C^\infty_X(U)}.$$

(b) Por otro lado, notemos que

$$\begin{array}{rcl} C_X^\infty(\iota : U \hookrightarrow W) = C_X^\infty(\iota : U \hookrightarrow V) \circ C_X^\infty(\iota : V \hookrightarrow W) : C_X^\infty(W) & \to & C_X^\infty(U) \\ f & \mapsto & (f|_V)|_U = f|_U, \end{array}$$

con lo cual

$$C_X^\infty(\iota : U \hookrightarrow V) \circ C_X^\infty(\iota : V \hookrightarrow W) = C_X^\infty(\iota : U \hookrightarrow W) = C_X^\infty[(\iota : V \hookrightarrow W) \circ (\iota : U \hookrightarrow V)].$$

Observación 2. En el ejemplo precedente, la restricción de funciones constituye un morfismo de anillos.

3. Prehaces y haces

Desde el punto de vista de las matemáticas, la geometría de un espacio se puede estudiar de mejor manera a partir de funciones "buenas" definidas sobre este espacio. Un claro ejemplo de ello es una variedad diferenciable, este objeto geométrico es localmente difeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. En ese sentido, una variedad diferenciable puede ser estudiada en términos de funciones diferenciables.

Uno de los problemas que surgen al usar este enfoque radica en que la mayoría de las veces, pocas "buenas" funciones se pueden definir sobre todo el espacio. De este modo, se busca estudiar la geometría del espacio considerando funciones definidas sobre subconjuntos del mismo. Toda esta información puede ser codificada en un objeto llamado haz.

Nuestro objetivo en esta sección es presentar el concepto de haz, el cual emplearemos en la Sección 4 cuando expongamos la noción de un espacio anillado. Para cumplir este objetivo, comenzaremos presentando el concepto de prehaz y algunos ejemplos sobre este. Luego, veremos que un haz es un prehaz dotado con un par de propiedades adicionales y exhibiremos algunos ejemplos que nos ayudarán a relacionarnos con este concepto.

3.1. Prehaces de conjuntos

Definición 4. Sea X un espacio topológico. Un prehaz de conjuntos $\mathscr{F}$ sobre X, consiste en una asignación que asocia a cada abierto W de X un conjunto $\mathscr{F}(W)$ y a cada par de abiertos $V \subseteq U \subseteq X$ un mapa $r_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ llamado el mapa de restricción, el cual verifica las siguientes propiedades:

(1) $r_{W,W}$ es el mapa identidad de $\mathscr{F}(W)$, es decir $r_{W,W} = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(W)}$.

(2) Si $W \subseteq V \subseteq U$, entonces $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$.

Si U es un abierto de X, a los elementos de $\mathscr{F}(U)$ los llamaremos secciones locales de $\mathscr{F}$ sobre U. A los elementos de $\mathscr{F}(X)$ los llamaremos secciones globales. Denotaremos por $\mathscr{F}|_U$ a la restricción de $\mathscr{F}$ en U, el cual es el prehaz sobre U cuyo conjunto de secciones para $V \subseteq U$ son simplemente $\mathscr{F}(V)$, es decir, $\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(V)$. Notemos que V es un elemento de la topología inducida sobre U.

Ejemplo 5. (**Prehaz constante**) Sean X un espacio topológico y S un conjunto fijo. Definimos el prehaz constante $\mathscr{F}_S$ sobre X de la siguiente manera: para cada U abierto de X, el conjunto de secciones es

$$\mathscr{F}_S(U) = S,$$

y para cada U, V abiertos de X, tales que $V \subseteq U$, el mapa de restricción es el mapa identidad sobre S, es decir,

$$r_{U,V} = \mathrm{Id}_S.$$

No es difícil ver que el mapa de restricción verifica las propiedades de la Definición 4.

Ejemplo 6. (**Prehaz rascacielos**) Sean X un espacio topológico, S un conjunto, $\{\mathrm{pt}\}$ un conjunto de un solo elemento y $x_0 \in X$. Definimos el prehaz rascacielos $\mathscr{S}_{x_0,S}$ sobre X como

$$\mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \begin{cases} S & \text{si } x_0 \in U, \\ \{\mathrm{pt}\} & \text{si } x_0 \notin U, \end{cases}$$

donde U es un abierto de X. Los mapas de restricción se definen de la siguiente manera:

- Consideremos U y V abiertos de X, tales que $V \subseteq U$ y $x_0 \in U$. Cuando $x_0 \in V$, se tiene que
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = S \Rightarrow r_{U,V} = \mathrm{Id}_S.$$
Por otro lado, para el caso en que $x_0 \notin V$, se tiene el morfismo constante
$$r_{U,V} : S \to \{\mathrm{pt}\}.$$
- Si U y V son abiertos de X, tales que $V \subseteq U$ y $x_0 \notin U$, se verifica que
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = \{\mathrm{pt}\} \Rightarrow r_{U,V} : \{\mathrm{pt}\} \to \{\mathrm{pt}\} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}}.$$

Ahora, veamos que el mapa restricción verifica las propiedades de la Definición 4:

(1) Sea U un abierto de X, cualquiera. Si suponemos que $x_0 \in U$, se obtiene
$$r_{U,U} : \mathscr{S}_{x_0,S}(U) \to \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = r_{U,U} : S \to S = \mathrm{Id}_S = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}_{x_0,S}(U)}.$$
De la misma manera, si suponemos que $x_0 \notin U$, se sigue que
$$r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}_{x_0,S}(U)}.$$

(2) Sean $W \subseteq V \subseteq U$ abiertos de X, cualesquiera. Analicemos los siguientes casos:

- Si $x_0 \in W$, se satisface
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(W) = \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = S,$$
con lo cual
$$r_{U,W} = \mathrm{Id}_S = \mathrm{Id}_S \circ \mathrm{Id}_S = r_{V,W} \circ r_{U,V}.$$
- Si $x_0 \notin U$, se verifica
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(W) = \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \{\mathrm{pt}\},$$
lo que implica
$$r_{U,W} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} \circ \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} = r_{V,W} \circ r_{U,V}.$$
- Si $x_0 \in U$ y $x_0 \notin V$, se consigue que
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(W) = \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = \{\mathrm{pt}\} \ \text{ y } \ \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = S,$$
de donde, se sigue
$$r_{U,W} : S \to \{\mathrm{pt}\}, \ \ r_{V,W} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} : \{\mathrm{pt}\} \to \{\mathrm{pt}\} \ \text{ y } \ r_{U,V} : S \to \{\mathrm{pt}\}.$$
Por lo tanto, se concluye que
$$r_{U,W} = r_{U,V} = \mathrm{Id}_{\{\mathrm{pt}\}} \circ r_{U,V} = r_{V,W} \circ r_{U,V}.$$
- Si $x_0 \in U, V$ y $x_0 \notin W$, se obtiene
$$\mathscr{S}_{x_0,S}(W) = \{\mathrm{pt}\} \ \text{ y } \ \mathscr{S}_{x_0,S}(V) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = S,$$
con lo cual
$$r_{U,W} : S \to \{\mathrm{pt}\}, \ \ r_{V,W} : S \to \{\mathrm{pt}\} \ \text{ y } \ r_{U,V} = \mathrm{Id}_S : S \to S.$$
Por consiguiente, se deduce que
$$r_{U,W} = r_{V,W} = r_{V,W} \circ \mathrm{Id}_S = r_{V,W} \circ r_{U,V}.$$

Por lo tanto, vemos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ define efectivamente un prehaz sobre X.

3.2. Prehaces de anillos

Para esta sección asumimos cierta familiaridad con los conceptos de grupo y anillo. Para revisar estos conceptos se recomienda [5].

Definición 5. Sea X un espacio topológico. Un prehaz de anillos $\mathscr{O}$ sobre X es un prehaz de conjuntos, el cual asigna a cada abierto W de X un anillo $\mathscr{O}(W)$, y donde el mapa de restricción es un homomorfismo de anillos.
Las nociones de sección local y global de un prehaz de anillos, y de la restricción de un prehaz de anillos son exactamente iguales a las de un prehaz de conjuntos.

Ejemplo 7. Sean X un espacio topológico. Denotamos por $\mathbb{Z}_X$ al prehaz constante sobre X, el cual asigna a cada abierto U de X el anillo $\mathbb{Z}$ y, al igual que en el Ejemplo 5, el mapa de restricción es el mapa identidad sobre $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 8. (**Prehaz de funciones diferenciables**) Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable). El funtor C^∞_X del Ejemplo 4 define un prehaz de anillos, llamado el prehaz de funciones diferenciables. En este caso, el mapa de restricción es la restricción de funciones.

Observación 3. En esta sección, hemos visto que un prehaz de anillos es un prehaz de conjuntos en donde cada $\mathscr{F}(U)$ es un anillo. Así mismo, cambiando la estructura de los conjuntos de secciones y los morfismos entre ellos, podemos definir haces con valores en otras categorías como: $\mathbb{K}$-**espacios vectoriales**, $\mathbb{K}$-**álgebras**, **módulos**, etc.

La siguiente definición nos ayudará a comprender el concepto de morfismo entre haces que veremos más adelante.

Definición 6. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos prehaces sobre un espacio topológico X con valores en la misma categoría $\mathscr{C}$. Un morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ consiste en:

(1) Para cada abierto W de X, un morfismo $\varphi_W : \mathscr{F}(W) \to \mathscr{G}(W)$.

(2) Dados $U \subseteq V$ abiertos de X, se tiene que

$$\varphi_U \circ r^{\mathscr{F}}_{V,U} = r^{\mathscr{G}}_{V,U} \circ \varphi_V,$$

donde $r^{\mathscr{F}}_{V,U}$ y $r^{\mathscr{G}}_{V,U}$ son los mapas de restricción de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, respectivamente.

3.3. Haces

Definición 7. Sean X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un prehaz de conjuntos sobre X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un haz de conjuntos sobre X si verifica lo siguiente:

(1) El prehaz $\mathscr{F}$ es **separado**, esto es, dados U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, si $s,t \in \mathscr{F}(U)$ son tales que $r_{U,U_i}(s) = r_{U,U_i}(t)$ para cada $i \in I$, entonces

$$s = t.$$

(2) El prehaz $\mathscr{F}$ tiene la propiedad del **pegado**, esto es, dados U un abierto de X, $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, y, si para cada $i, j \in I$, existen $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ y $s_j \in \mathscr{F}(U_j)$, tales que

$$r_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j), \tag{3.1}$$

entonces existe $s \in \mathscr{F}(U)$, tal que

$$r_{U,U_i}(s) = s_i, \tag{3.2}$$

para cada $i \in I$.

Ejemplo 9. (**Haz rascacielos**) Sean X un espacio topológico, S un conjunto y $x_0 \in X$. El prehaz rascacielos $\mathscr{S}_{x_0,S}$ definido anteriormente es efectivamente un haz. Veamos que verifica las condiciones de la Definición 7.

(1) Demostremos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ es separado:

Sean U un abierto de X, $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $s, t \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U)$, tales que para cada $i \in I$

$$r_{U,U_i}(s) = r_{U,U_i}(t). \tag{3.3}$$

Debemos probar que $s = t$, para ello, analicemos los siguientes casos:

- Si $x_0 \in U$, existe $j \in I$, tal que $x_0 \in U_j$. Por lo tanto, se tiene que

$$S = \mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U_j) \;\Rightarrow\; r_{U,U_j} = \mathrm{Id}_S.$$

  Luego, empleando la fórmula (3.3), se concluye que

$$s = \mathrm{Id}_S(s) = r_{U,U_j}(s) = r_{U,U_j}(t) = \mathrm{Id}_S(t) = t.$$

- Si $x_0 \notin U$, se verifica

$$\mathscr{S}_{x_0,S}(U) = \{\mathrm{pt}\},$$

  y como $s, t \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U)$, se deduce que

$$s = \mathrm{pt} = t.$$

De esta forma, vemos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ es separado.

(2) Probemos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ tiene la propiedad del pegado:

Sean U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U. Supongamos que para cada $i, j \in I$, existen $s_i \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U_i)$ y $s_j \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U_j)$, tales que

$$r_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j). \tag{3.4}$$

Debemos demostrar que existe $s \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U)$, tal que para cada $i \in I$

$$r_{U,U_i}(s) = s_i.$$

Tenemos los siguientes casos:

- Si $x_0 \in U$, denotamos por $I_1 \subseteq I$ al conjunto de índices tal que $i \in I_1$ si $x_0 \in U_i$, y por $I_2 \subseteq I$ al conjunto de índices tal que $i \in I_2$ si $x_0 \notin U_i$. Luego, haciendo uso de la fórmula (3.4), se sigue que para todos $i, j \in I_1$

$$S = \mathscr{S}_{x_0,S}(U_i) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U_j) = \mathscr{S}_{x_0,S}(U_i \cap U_j) \;\Rightarrow\; s_i = r_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j) = s_j.$$

  Es decir $s_i = s_j$ para todo $i, j \in I_1$. Definamos $s := s_i$ con $i \in I_1$, de inmediato se tiene para todo $i \in I_1$, que

$$r_{U,U_i}(s) = \mathrm{Id}_S(s) = s = s_i.$$

  Por otro lado, para cada $i \in I_2$, se sigue que

$$s_i \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U_i) = \{\mathrm{pt}\} \;\Rightarrow\; s_i = \mathrm{pt}.$$

  De esta forma, por lo anterior se tiene, para todo $i \in I_2$, que

$$r_{U,U_i} : S \to \{\mathrm{pt}\} \Rightarrow r_{U,U_i}(s) = \mathrm{pt} = s_i.$$

  Por lo tanto, por lo hecho previamente, se deduce que

$$r_{U,U_i}(s) = s_i,$$

  para cada $i \in I$.

- Si $x_0 \notin U$, entonces $x_0 \notin U_i$ para cada $i \in I$. Luego, se satisface

$$\mathscr{S}_{x_0,S}(U_i) = \{\mathrm{pt}\} = \mathscr{S}_{x_0,S}(U),$$

y como $s_i \in \mathscr{S}_{x_0,S}(U_i) = \{\mathrm{pt}\}$, se sigue, para cada $i \in I$, que

$$s_i = \mathrm{pt}.$$

De esta manera, tomando $s = \mathrm{pt}$, se concluye que

$$r_{U,U_i}(s) = r_{U,U_i}(\mathrm{pt}) = \mathrm{pt} = s_i,$$

para cada $i \in I$.

Así, vemos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ tiene la propiedad del pegado.

Por lo tanto, inferimos que $\mathscr{S}_{x_0,S}$ es un haz de conjuntos.

Ejemplo 10. Si X es un espacio normado (o una variedad diferenciable), entonces el prehaz de funciones diferenciables C_X^∞ es un haz.

Ejemplo 11. Sean X un conjunto de al menos tres elementos y $A \subsetneq B \subsetneq X$ dos subconjuntos distintos del vacío. Además, sobre X consideremos la topología $\tau = \{\emptyset, A, B, X\}$. Definimos un prehaz de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathscr{F}$ a partir de las siguientes asignaciones:

$$\mathscr{F}(\emptyset) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle, \ \ \mathscr{F}(A) = \langle e_1, e_2\rangle, \ \ \mathscr{F}(B) = \langle e_1\rangle \ \text{ y } \ \mathscr{F}(X) = \{0\},$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ son elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$; $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$ y $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ son los sub-espacios vectoriales generados por $\{e_1\}$, $\{e_1, e_2\}$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$, respectivamente. Notemos que en este caso, se tiene que

$$\mathscr{F}(X) \subseteq \mathscr{F}(B) \subseteq \mathscr{F}(A) \subseteq \mathscr{F}(\emptyset).$$

El mapa de restricción para $\mathscr{F}$ será el mapa de inclusión, es decir,

$$r_{U,V} = \iota : \mathscr{F}(U) \hookrightarrow \mathscr{F}(V)$$

con $U, V \in \tau$, tal que $V \subseteq U$. Demostrar que $\mathscr{F}$ es un prehaz no es complicado. Nuestro interés yace en determinar si $\mathscr{F}$ es un haz, en otras palabras, queremos determinar si $\mathscr{F}$ es separado y tiene la propiedad del pegado.

(1) Veamos si $\mathscr{F}$ tiene la propiedad del pegado:

Sean $U \in \tau$ y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U. Supongamos que para cada $i, j \in I$, existen $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ y $s_j \in \mathscr{F}(U_j)$, tales que

$$r_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j).$$

En este caso, se tiene

$$\mathscr{F}(U_i),\ \mathscr{F}(U_j) \subseteq \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \ \Rightarrow \ r_{U_i,U_i\cap U_j} : \mathscr{F}(U_i) \hookrightarrow \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \ \text{ y } \ r_{U_j,U_i\cap U_j} : \mathscr{F}(U_j) \hookrightarrow \mathscr{F}(U_i \cap U_j).$$

Así, para cada $i,\ j \in I$, se sigue que

$$s_i = r_{U,U_i}(s_i) = r_{U,U_i}(s_j) = s_j.$$

Luego, si tomamos $s = s_i$ con $i \in I$, se concluye, para cada $i \in I$, que

$$r_{U,U_i}(s) = s = s_i.$$

De esta manera, vemos que $\mathscr{F}$ tiene la propiedad del pegado.

(2) Para determinar si $\mathscr{F}$ es o no separado, consideremos $\emptyset \in \tau$, el cuál está cubierto por el cubrimiento vacío, esto es, $(U_i)_{i\in I}$ con $I = \emptyset$. Si tomamos e_1, $e_2 \in \mathscr{F}(\emptyset) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, por vacuidad se sigue, para cada $i \in I$, que

$$r_{\emptyset,U_i}(e_1) = r_{\emptyset,U_j}(e_2). \tag{3.5}$$

Ahora bien, supongamos por un momento que $\mathscr{F}$ es un haz. Así, empleando la fórmula (3.5) y el hecho de que $\mathscr{F}$ es separado, se deduce que

$$e_1 = e_2,$$

lo cual es una contradicción.

Vemos así que $\mathscr{F}$ no es separado y, por lo tanto, $\mathscr{F}$ no es un haz.

Observación 4. Vale la pena hacer las siguientes observaciones sobre el ejemplo precedente:

- Con respecto a la propiedad del pegado, el lector puede notar que si $U = \emptyset$ y el cubrimiento a considerar es el cubrimiento vacío, entonces se cumple dicha propiedad por el argumento de vacuidad.
- El lector puede verificar que la propiedad de que $\mathscr{F}$ es separado se cumple sin ninguna dificultad para los siguientes conjuntos con sus respectivos cubrimientos:
  - El conjunto $\emptyset$ junto con el cubrimiento $\{\emptyset\}$.
  - El conjunto A junto con los cubrimientos $\{A\}$ y $\{\emptyset, A\}$.
  - El conjunto B junto con los cubrimientos $\{B\}$, $\{\emptyset, B\}$ y $\{\emptyset, A, B\}$.
  - El conjunto X junto con los cubrimientos $\{X\}$, $\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, A, X\}$, $\{\emptyset, B, X\}$ y $\{\emptyset, A, B, X\}$.

En el ejemplo precedente, la propiedad de separación falla considerando el vacío y el cubrimiento vacío. Esto motiva el siguiente lema, donde exhibimos una propiedad que satisface un haz de conjuntos con respecto al conjunto vacío.

Lema 1. ***(Secciones sobre el conjunto vacío)*** *Si X es un espacio topológico y $\mathscr{F}$ es un haz de conjuntos sobre X, se tiene que $\mathscr{F}(\emptyset)$ es un conjunto de un solo punto.*

Demostración. Consideremos el cubrimiento vacío $(U_i)_{i\in I}$ con $I = \emptyset$, el cual cubre al conjunto $\emptyset$. Por vacuidad, las condiciones de la propiedad del pegado se cumplen, es decir, (3.1) se verifica. Así, ya que $\mathscr{F}$ es un haz y por lo mencionado previamente, existe $s \in \mathscr{F}(\emptyset)$ que satisface (3.2). Por lo tanto, se deduce que

$$\mathscr{F}(\emptyset) \neq \emptyset.$$

Ahora bien, tomemos s_1, $s_2 \in \mathscr{F}(\emptyset)$ arbitrarios pero fijos. Nuevamente por vacuidad, se sigue que

$$r_{\emptyset,U_i}(s_1) = r_{\emptyset,U_i}(s_2),$$

para cada $i \in I$. Empleando el hecho de que $\mathscr{F}$ es separado, se tiene que

$$s_1 = s_2.$$

Finalmente, como s_1 y s_2 son arbitrarios, se concluye que $\mathscr{F}(\emptyset)$ es un conjunto de un solo punto. □

Ejemplo 12. (**Prehaz que no es haz**) Sea X un espacio topológico y S un conjunto. Consideremos el prehaz constante $\mathscr{F}_S$ sobre X. No es difícil ver que $\mathscr{F}_S$ es separado, pero $\mathscr{F}_S$ no necesariamente tiene la propiedad del pegado y, por lo tanto, $\mathscr{F}_S$ no necesariamente es un haz. Para visualizar esto, supongamos que S tiene más de un elemento. En este caso, $\mathscr{F}_S$ no podría ser un haz, pues $\mathscr{F}_S(\emptyset) = S$, el cual no es un conjunto de un solo punto (no se satisface el Lema 1). Sin embargo, aún si asumimos que $\mathscr{F}_S(\emptyset) = \{\mathrm{pt}\}$, el prehaz $\mathscr{F}_S$ no necesariamente se convierte en un haz. Analicemos esto de la siguiente manera:

Supongamos que $X = \{0, 1\}$ está dotado con la topología discreta, es decir,

$$\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\},$$

y S es un conjunto con más de un elemento. En este caso, $\{0\}$ y $\{1\}$ constituyen un cubrimiento abierto de $\{0,1\}$. Tomemos $s_0 \in \mathscr{F}_S(\{0\})$ y $s_1 \in \mathscr{F}_S(\{1\})$, tales que

$$s_0 \neq s_1. \tag{3.6}$$

Lo anterior es posible debido a que S tiene más de un elemento. Notemos que

$$r_{\{0\},\{0\}\cap\{1\}} = r_{\{0\},\emptyset} : \mathscr{F}_S(\{0\}) \to \{\mathrm{pt}\} \quad \text{y} \quad r_{\{1\},\{0\}\cap\{1\}} = r_{\{1\},\emptyset} : \mathscr{F}_S(\{1\}) \to \{\mathrm{pt}\},$$

con lo cual

$$r_{\{0\},\{0\}\cap\{1\}}(s_0) = \mathrm{pt} = r_{\{1\},\{0\}\cap\{1\}}(s_1). \tag{3.7}$$

Asumamos por un momento que $\mathscr{F}_S$ tiene la propiedad del pegado. Así, empleando (3.7) y la propiedad del pegado, existe $s \in \mathscr{F}_S(\{0,1\})$, tal que

$$s_0 = r_{\{0,1\},\{0\}}(s) = \mathrm{Id}_S(s) = s = \mathrm{Id}_S(s) = r_{\{0,1\},\{1\}}(s) = s_1,$$

lo cual contradice (3.6). De esta forma, el prehaz $\mathscr{F}_S$ no puede ser un haz.

Observación 5. En la observación 3 se habló de cómo al cambiar la estructura de los conjuntos de secciones y los morfismos se obtienen otros tipos de prehaces, de esta manera se pueden obtener otros tipos de haces (**$\mathbb{K}$-espacios vectoriales**, **$\mathbb{K}$-álgebras**, **módulos**, etc).

Cerramos esta sección dando dos definiciones que nos ayudarán a definir el concepto de morfismo entre dos espacios anillados que veremos más adelante.

Definición 8. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos haces sobre un espacio topológico X. Un morfismo de haces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ no es más que un morfismo entre los prehaces subyacentes.

Definición 9. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Consideremos $\mathscr{F}$ prehaz definido sobre X. Definimos el prehaz imagen directa $f_*\mathscr{F}$ sobre Y por

$$(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}\left(f^{-1}(V)\right),$$

para cada V abierto de Y.

Observación 6. Si $\mathscr{F}$ es un haz sobre X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz sobre Y.

4. $\mathscr{O}_X$-módulos

En esta corta sección, nuestra intención es exhibir la definición de un espacio anillado en $\mathbb{K}$-álgebras y, posteriormente, presentar el concepto de $\mathscr{O}_X$-módulo. Ambos conceptos jugarán un rol de suma importancia en la definición de variedad algebraica. Para revisar los conceptos de módulo y $\mathbb{K}$-álgebra se recomienda [5].

Antes de empezar, recordemos que un ejemplo clásico de una estructura de $\mathbb{K}$-álgebra son los polinomios, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Por ejemplo, los polinomios $\mathbb{R}[x,y]$ tienen una operación de suma, una de multiplicación y un producto por escalar, donde los escalares son tomados en el cuerpo de los reales. Para efectos de este artículo, todas las $\mathbb{K}$-álgebras que trataremos serán alguna variación de $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$. Note que en particular una $\mathbb{K}$-álgebra es siempre un anillo.

Definición 10. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un espacio anillado **en $\mathbb{K}$-álgebras** es un par $(X,\mathscr{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathscr{O}_X$ es un haz de $\mathbb{K}$-álgebras (conmutativas con unidad). Es decir, para cada W abierto de X, el conjunto $\mathscr{O}_X(W)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra y en particular un anillo. Al haz $\mathscr{O}_X$ se lo llama el haz estructural.

Definición 11. Sean $(X,\mathscr{O}_X)$ y $(Y,\mathscr{O}_Y)$ dos espacios anillados en $\mathbb{K}$-álgebras. Un morfismo de espacios anillados entre $(X,\mathscr{O}_x)$ y $(Y,\mathscr{O}_Y)$ es un par (f,φ), donde $f : X \to Y$ es una función continua y $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces de $\mathbb{K}$-álgebras. Además, la composición de morfismos está bien definida y, por lo tanto, obtenemos una categoría. En particular, la noción de isomorfismo de espacios anillados en $\mathbb{K}$-álgebras tiene sentido.

Ejemplo 13. Consideremos $M=\mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable). Notemos que $C^\infty_M(U)$, donde $U\subseteq M$ es abierto, es una $\mathbb{R}$-álgebra bajo las operaciones de funciones usuales. Así, con el haz de funciones diferenciables $\mathscr{O}_M=C^\infty_M$, el par $(M,\mathscr{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras.

Definición 12. Sea $(X,\mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Un $\mathscr{O}_X$-módulo es un haz de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{F}$, tal que para todo W abierto de X, el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{F}(W)$ es un $\mathscr{O}_X(W)$-módulo[4]. Además, para cada $V\subseteq U$ abiertos de X, las aplicaciones lineales de restricción $r_{U,V}:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ son compatibles con las estructuras de módulos, esto es,

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_X(U)\times\mathscr{F}(U) & \longrightarrow & \mathscr{F}(U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathscr{O}_X(V)\times\mathscr{F}(V) & \longrightarrow & \mathscr{F}(V) \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ccc} a\times p & \longrightarrow & ap \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ r^{\mathscr{O}_X}_{U,V}(a)\times s & \longrightarrow & r^{\mathscr{O}_X}_{U,V}(a)s \end{array},$$

para $a\in\mathscr{O}_X(U)$, $p\in\mathscr{F}(U)$ y $s=r^{\mathscr{F}}_{U,V}(p)\in\mathscr{F}(V)$. Más aún, dados otro haz de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{G}$ sobre X y un morfismo de haces $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$, se dice que φ es un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos, si para cada W abierto de X, la aplicación

$$\varphi_W:\mathscr{F}(W)\to\mathscr{G}(W)$$

es $\mathscr{O}_X(W)$-lineal.

5. Subvariedades afines y topología de Zariski

En esta sección, presentaremos la definición de subvariedad afín y algunas propiedades importantes de esta. Este concepto nos dará paso a la construcción de la topología de Zariski. Dicha topología es la más adecuada para el estudio de las funciones polinómicas en geometría algebraica; por esta razón, es empleada en la construcción de las variedades algebraicas.

Denotaremos por $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ al anillo de los polinomios de n variables con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, es decir, $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.

Definición 13. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y S un subconjunto de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Una subvariedad afín[5] de $\mathbb{K}^n$ es un conjunto de la forma

$$V(S)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : f(x_1,\dots,x_n)=0\ \ \forall f\in S\}.$$

Ejemplo 14. Se tiene que $V(1)=\emptyset$ y $V(0)=\mathbb{K}^n$. En efecto, a partir de la definición de subvariedad afín, se sigue que

$$V(1)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : 1=0\}=\emptyset \ \text{ y } \ V(0)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : 0=0\}=\mathbb{K}^n.$$

Ejemplo 15. Si consideramos $\mathbb{K}^2$ y los polinomios $\mathbb{K}[x,y]$, se tiene que $V(y)=V(y^2)$. En efecto, nuevamente por la definición de subvariedad afín, se sigue que

$$V(y)=\left\{(x,y)\in\mathbb{K}^2 : y=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{K}^2 : y^2=0\right\}=V(y^2).$$

Observación 7.

- Si $T\subseteq R\subseteq\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, entonces $V(R)\subseteq V(T)$.
- Consideremos S un subconjunto de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ y denotemos por $\langle S\rangle$ al ideal[6] generado por este subconjunto. Se tiene que
$$V(S)=V(\langle S\rangle).$$
Así, podemos suponer que S siempre es un ideal de polinomios. En otras palabras, cuando trabajemos con un subvariedad afín $V(S)$, siempre asumiremos que S es un ideal de polinomios.

[4] El lector puede revisar el concepto de módulo en [5]
[5] Estos conjuntos son llamados de diferente manera dependiendo del autor. Aquí usamos la nomenclatura usada en [13].
[6] El lector puede revisar el concepto de ideal en [4].

- A través del Teorema de la base de Hilbert es posible deducir que el anillo $\mathbb{K}[x_1,...,x_n]$ es noetheriano, es decir, todos sus ideales son finitamente generados. Como consecuencia de esto, todos los ideales de polinomios son generados por un número finito de estos. Por lo tanto, se concluye que

$$V(S) = V(f_1,...,f_n).$$

Es decir, toda subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$ se puede definir a través de un número finito de polinomios.

Proposición 1. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Las subvariedades afines de $\mathbb{K}^n$ verifican las siguientes propiedades:*

(1) La intersección arbitraria de subvariedades afines de $\mathbb{K}^n$ es una subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$.

(2) La unión finita de subvariedades afines de $\mathbb{K}^n$ es una subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$.

Demostración. Para demostrar la primera propiedad, basta notar que $\cap_{i\in I}V(S_i) = V(\cup_{i\in I}S_i)$. Para la segunda propiedad, probaremos que $V(S_1)\cup V(S_2) = V(S_1S_2)$, donde S_1S_2 es el conjunto de productos s_1s_2 con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$. Notemos que $V(S_1)\cup V(S_2) \subseteq V(S_1S_2)$ por definición. Por otro lado, si $x \notin V(S_1)\cup V(S_2)$, entonces existen $f_1 \in S_1$ y $f_2 \in S_2$, tales que $f_1(x) \neq 0$ y $f_2(x) \neq 0$, con lo cual $(f_1f_2)(x) \neq 0$. Por lo tanto, se concluye que $x \notin V(S_1S_2)$. □

Gracias a la proposición precedente, podemos ver que las subvariedades afines de $\mathbb{K}^n$ satisfacen los axiomas de los conjuntos cerrados de una topología. Con esto en mente, presentamos la siguiente definición.

Definición 14. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Definimos a la topología de Zariski[7] de $\mathbb{K}^n$ como aquella topología cuyos elementos son de la forma $U = \mathbb{K}^n \setminus V(S)$ para algún $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. El espacio $\mathbb{K}^n$ dotado con esta topología se denota por $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ y se denomina el espacio afín n-dimensional.

El lector habrá notado que el nombre "subvariedad" es sugerente del objetivo planteado al inicio del artículo. Efectivamente, una variedad algebraica se definirá en base a las subvariedades afines. Veremos que el paso de subvariedad a variedad implica el uso explícito de las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores. Siendo más específicos, nuestro objetivo se reduce a definir un haz de funciones sobre una subvariedad afín.

Con esto en mente, la topología de Zariski jugará un rol importante en la definición de las variedades algebraicas. Esto gracias a sus propiedades, las cuáles nos dan una estructura natural a considerar, en particular, la topología cuenta con una base muy sencilla de manejar que nos ayudará en la definición del haz que buscamos. A continuación, presentamos una definición y una proposición que nos permitirán visualizar la estructura de la base mencionada.

Definición 15. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $V(S)$ una subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$. Dada una función polinomial f no nula, definida sobre $V(S)$, llamamos al conjunto

$$D(f) = V(S) \setminus V(f) = \{x \in V(S) : f(x) \neq 0\},$$

conjunto abierto estándar de $V(S)$.

Ejemplo 16. Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y el espacio $\mathbb{R}^2$. Sean $S = \langle x^2 + y^2 - 9\rangle$ y $f = xy \in \mathbb{R}[x,y]$. Entonces tenemos

$$D(f) = \left\{(x,y) \in V(x^2+y^2-9) : xy \neq 0\right\}.$$

Notemos que $V(x^2+y^2-9)$ es la circunferencia de radio 3 centrada en el origen. La desigualdad $xy \neq 0$ significa que debemos excluir aquellos puntos donde la coordenada x o la coordenada y se anulen. Es decir, en la circunferencia, considerada como espacio topológico, el abierto $D(f)$ es toda la circunferencia excepto los puntos $\{(0,\pm 3);(\pm 3,0)\}$.

Proposición 2. *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $V(S)$ una subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$. Se tiene que cada conjunto abierto de $V(S)$ es la unión finita de conjuntos abiertos estándar. En particular, los abiertos estándar forman una base para la topología de Zariski.*

[7] El lector puede consultar en [16] más propiedades sobre esta topología.

6. Variedades algebraicas

A través de todos los conceptos y resultados expuestos en las secciones anteriores, estamos casi listos para presentar la definición de variedad algebraica. No obstante, antes será necesario realizar un par de precisiones.

Consideremos una subvariedad afín $V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ con la topología inducida. Nuestro objetivo es definir "buenas" funciones (haz de funciones) sobre los subconjuntos de $V(S)$. Para esto, nos guiaremos por las siguientes condiciones:

(1) La buenas funciones sobre $V(S)$ deben ser funciones polinomiales. Denotaremos al conjunto de todas las funciones polinomiales sobre $V(S)$ por $\Gamma(V(S))$.

(2) $V(S)$ tiene una base muy simple de conjuntos abiertos.

Ahora bien, comencemos esta sección exhibiendo un lema que nos permitirá determinar que es suficiente definir un haz estructural sobre una base de conjuntos abiertos. Gracias a este lema, visualizar la definición de variedad afín será mucho más fácil.

Lema 2. *Sean X un espacio topológico, $\mathscr{U}$ una base para la topología de X y K un conjunto. Supongamos que para todo abierto $U \in \mathscr{U}$, $\mathscr{F}(U)$ es un conjunto de funciones de U en K, las cuales satisfacen lo siguiente:*

(1) Para cada $U, V \in \mathscr{U}$ con $V \subseteq U$ y cada $f \in \mathscr{F}(U)$, se tiene que

$$f|_V \in \mathscr{F}(V).$$

(2) Si $U \in \mathscr{U}$ y $(U_i)_{i\in I}$ es un cubrimiento de U, tal que $U_i \in \mathscr{U}$ para todo $i \in I$, entonces para cada función $f : U \to K$, tal que

$$f|_{U_i} \in \mathscr{F}(U_i), \;\; \forall i \in I,$$

se tiene que

$$f \in \mathscr{F}(U).$$

Entonces, existe un único haz $\overline{\mathscr{F}}$ de funciones sobre X, tal que

$$\overline{\mathscr{F}}(U) = \mathscr{F}(U),$$

para cada $U \in \mathscr{U}$.

De acuerdo al Lema 2, para definir un haz de funciones, basta definir los conjuntos de secciones sobre los abiertos básicos de un espacio topológico. De aquí nace la idea de sacar provecho a la base hallada para la topología de Zariski. En efecto, definir ahora un haz de funciones sobre $V(S)$ resulta sencillo como se muestra a continuación.

Definición 16. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V(S)$ un subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$ y $f \in \Gamma(V(S))$ una función polinomial no nula. Se define el conjunto

$$\mathscr{O}_{V(S)}(D(f)) := \Gamma(V(S))_f = \left\{ \frac{g}{f^n} : \; g \in \Gamma(V(S)) \;\text{ y }\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A $\Gamma(V(S))_f$ se lo llama la localización[8] del anillo $\Gamma(V(S))$ a lo largo de f. Los conjuntos de secciones locales $\mathscr{O}_{V(S)}(D(f))$ forman un haz de funciones sobre $V(S)$ llamado el haz estructural de $V(S)$.

El haz dado por la Definición 16 es un haz de anillos (¡Que también son $\mathbb{K}$-álgebras!) sobre $V(S)$, el cual dota a $V(S)$ con una estructura de espacio anillado en $\mathbb{K}$-álgebras y de $\mathscr{O}_X$-módulo.

Observación 8. En el caso especial donde $\Gamma(V(S))$ es un dominio integral[9], el anillo $\Gamma(V(S))_f$ es un subanillo del cuerpo de funciones racionales sobre $V(S)$.

[8] El lector puede dirigirse a [16] para consultar el concepto general de localización.
[9] El lector puede revisar el concepto de dominio integral en [4].

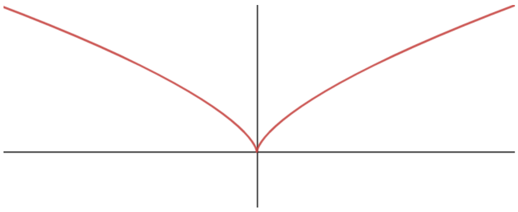

Figura 1: $V(y^3 - x^2)$ Cúbica cuspidal

Hemos equipado cualquier subvariedad afín con una estructura de espacio anillado usando el haz de funciones regulares. Una variedad afín es esencialmente la misma cosa.

Definición 17. Una variedad afín es un espacio anillado, el cual es isomorfo, como un espacio anillado, a un par $\left(V(S), \mathscr{O}_{V(S)}\right)$, donde $V(S)$ es una subvariedad afín y $\mathscr{O}_{V(S)}$ es el haz estructural de $V(S)$. Además, un morfismo de variedades afines es simplemente un morfismo de espacios anillados.

Observación 9. En particular, el espacio afín n-dimensional es una variedad afín.

La siguiente definición está un poco fuera del contexto del presente artículo, pero es necesaria para comprender el concepto de variedad algebraica. El lector podrá notar que comprender dicha definición no presenta dificultad alguna.

Definición 18. Un espacio topológico X es quasi-compacto, si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito.

En este momento, contamos con todas las herramientas necesarias para poder presentar y comprender el concepto de variedad algebraica. Los conceptos y resultados se han presentado de manera que todas las ideas sigan una conexión ordenada. Esperamos que el lector pueda asimilar el concepto de variedad algebraica de forma sencilla y así poder utilizar esto como punto de partida para la comprensión de la geometría algebraica.

Definición 19. (**Variedad algebraica**) Una variedad algebraica es un espacio anillado quasi-compacto, el cual es localmente isomorfo a una variedad afín. Asimismo, un morfismo de variedades algebraicas es simplemente un morfismo de espacios anillados.

Observación 10.

- Decir que $(X, \mathscr{O}_X)$ es localmente isomorfo a una variedad afín significa que para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto U que contiene a x, tal que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ es isomorfo a una variedad afín.
- Toda variedad afín es quasi-compacta y, por lo tanto, es una variedad algebraica.

En geometría algebraica, las variedades afines juegan un rol análogo al que juegan las cartas locales en geometría diferencial. Es decir, proveen el entorno local sobre el cual estudiar las variedades algebraicas. Con esto en mente, finalizamos con la siguiente definición.

Definición 20. Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ una variedad algebraica. Los conjuntos abiertos de X que son isomorfos a variedades afines son llamados conjuntos abiertos afines o cartas afines de X.

6.1. Comentarios finales

Una vez dada la definición de variedad algebraica, el lector podría plantearse preguntas como: **¿Cuál es el siguiente paso?** y **¿Para qué sirve saber qué es una variedad algebraica?**

Para la **primera pregunta**, podemos responder: explorar las propiedades de las variedades algebraicas, así como los problemas de estudio de esta rama y los conceptos inspirados por la noción de variedad.

Ejemplo 17. En el espacio $\mathbb{A}^2$, consideremos la variedad $V(y^3 - x^2)$, misma que se muestra en la Figura 1.

La figura muestra que la variedad tiene un punto que es notablemente distinto a los demás, específicamente, el punto $(0,0)$ es una "cúspide" que da el nombre a esta curva.

La intuición nos dice que esta cúspide debe tener alguna propiedad distinta a los otros puntos de la variedad. Esta idea se formaliza con el concepto de punto *singular* en una variedad. Decimos así que $(0,0)$ es un punto singular (o una *singularidad*) de la curva, mientras que el resto de los puntos son llamados *regulares*. La misma intuición nos lleva a pensar que un punto singular puede ser "problemático" y de hecho lo es; por tal razón, la *resolución de singularidades* es un tema de constante estudio dentro de la geometría algebraica. Tal estudio nos lleva en la dirección de los llamados *morfismos biracionales*, el *blow-up*, grupos de *cohomología* y demás temas avanzados

La variedad descrita la hemos llamado *curva* y no sorprenderá al lector si decimos que tiene *dimensión* igual a 1. Resulta que la dimensión de una variedad es de las primeras propiedades que podemos analizar y nos da una primera idea de clasificación de las variedades algebraicas. De hecho, el problema de *clasificación* de las variedades es uno de los problemas abiertos más importantes de la geometría algebraica.

Finalmente, mencionamos que el concepto de variedad se puede generalizar, de cierta manera, con el concepto de *esquema*, el cual hace uso de la teoría de haces expuesta en el presente artículo y otras herramientas del álgebra. Para el lector interesado en indagar en estos temas se recomienda [10], [13] y [16].

Para responder la **segunda pregunta**, podríamos decir que entender el concepto de variedad algebraica es el primer paso hacia el aprendizaje de la geometría algebraica. De hecho, esperamos que con el presente artículo, el lector sienta motivación por aprender más sobre esta rama. Actualmente, la geometría algebraica tiene varias aplicaciones en distintos campos. A continuación, exponemos algunas de estas aplicaciones.

Física-matemática. La geometría algebraica se ha empleado en la teoría de twistor [1], donde se hace uso de las variedades algebraicas llamadas espacios proyectivos complejos [16]. También, existen aplicaciones de esta rama en la teoría de supercuerdas, donde se utilizan a las variedades de Calabi–Yau para modelar a las dimensiones adicionales del espacio-tiempo. Sin embargo, quizá una de las aplicaciones más relevantes y creativas, debido a que está ligada a un experimento, es el uso de Arkani-Hamed, y sus colegas, del grassmanniano positivo, la cual es otra variedad algebraica, para calcular las amplitudes de dispersión [2].

Cinemática matemática. Aquí nos relacionamos con la geometría computacional no-lineal. Un *mecanismo* es una disposición de cuerpos rígidos acoplados entre sí en uniones que tienen movimientos específicos. La fijación del tipo combinatorio (por ejemplo, el tipo y número de uniones entre los diferentes cuerpos) da una clase de mecanismos que depende de parámetros continuos (longitud de la varilla o colocación y orientación de las uniones). Para ilustrar esto, el robot paralelo Hexapod [3] o el mecanismo plano de 4 barras [15] son dos clases usuales. Describimos un mecanismo dado en esta clase como una variedad de incidencia que vincula sus posiciones en el espacio con los movimientos de sus articulaciones. Aquí hay muchos problemas interesantes. Por ejemplo, clasificar todos los mecanismos de una clase dada que tengan movimientos excepcionales, analizar los movimientos de un mecanismo dado o contar todas las posiciones posibles de un mecanismo dado después de que se hayan fijado algunos o todos los movimientos de las articulaciones. Lo mencionado previamente es un problema de geometría algebraica real enumerativa [8]. La cinemática debería proporcionar una rica clase de problemas geométricos que exhiban interesantes fenómenos de números reales.

Criptografía. La criptografía se ocupa de técnicas matemáticas para el diseño y análisis de algoritmos y protocolos de seguridad digital en presencia de adversarios malintencionados. Por ejemplo, el cifrado y las firmas digitales se utilizan para construir canales de comunicación privados y auténticos, que son fundamentales para asegurar las transacciones en Internet. Algunos de los avances más fascinantes se basan en la geometría algebraica: las curvas elípticas, las cuales son variedades algebraicas, juegan un rol sustancial en la investigación en criptografía, principalmente porque han recibido un impulso reciente con los emparejamientos de criptografía; y, también, las curvas sobre campos finitos tienen aplicaciones en esquemas de compartición secreta. El lector puede encontrar más información de lo que acabamos de mencionar en [14].

Podemos estar seguros de que existen muchas otras aplicaciones de la geometría algebraica en múltiples campos que no hemos mencionado, pero esperamos que los aludidos previamente hayan sido del interés de nuestro lector.

Referencias

[1] Adamo T., *Lectures on twistor theory*, arXiv:1712.02196v2 [hep-th], 2018.

[2] Arkani-Hameda N., Bourjailyb J., Cachazoc F., Goncharovd A., Postnikove A. y Trnka J., *Scattering Amplitudes and the Positive Grassmannian*, arXiv:1212.5605 [hep-th], 2012.

[3] Bernal J. and Campa R., *Control de dinámica inversa del robot paralelo Hexapod*, Memorias del XVIII Congreso Mexicano de Robótica 2016, Universidad Autónoma de Sinaloa y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC, 2016

[4] Cox D., Little J. and O'Shea D., *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer International Publishing, 2015

[5] Dummit D. and Foote R., *Abstract Algebra*, 3rd Edition, published by Wiley, 2003.

[6] Eilenberg S. y Mac Lane S., *Group Extensions and Homology*, Annals of Mathematics, 43: 757–831, 1942.

[7] Eilenberg S. y Mac Lane S., *General Theory of Natural Equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society, 58: 231–294, 1945.

[8] *Enumerative real algebraic geometry*, Algorithmic and quantitative real algebraic geometry (Piscataway, NJ, 2001), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 139–179.

[9] Gathmann A., *Algebraic Geometry*, Class Notes TU Kaiserslautern 2019/20.

[10] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer New York 2013.

[11] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Springer 1998.

[12] Marquis J., *Category Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Metaphysics Research Lab, Stanford University 2021.

[13] Montero P., *Curvas algebraicas*, disponible en http://pmontero.mat.utfsm.cl/pdf_mat426/MAT426.pdf

[14] Niederreiter H. y Xing Ch., *Algebraic Geometry in Coding Theory and Cryptography*, Princeton University Pres, 2009.

[15] Romero N., *Análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras utilizando coordenadas naturales*, Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 20, N.º 2, pp. 83-90, 2016

[16] Perrin D., *Algebraic Geometry - An Introduction*, Springer 2008.

[17] Sottile F., *Applicable Algebraic Geometry: Real Solutions, Applications, and Combinatorics*.

[18] Vakil R., *The Rising Sea: Foundations Of Algebraic Geometry*, 2015.