Lección n°1: AMARUN 2024
El criterio de Serrin y ciertas generalizaciones.

1. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes tienen como objetivo dar un modelo matemático que permita comprender el comportamiento de la evolución de fluidos Newtonianos, viscosos e incompresibles en un cierto dominio del espacio. En efecto, si fijamos nuestro cuadro de trabajo en $\mathbb{R}^3$, y si consideramos un fluido definido en todo el espacio, entonces las ecuaciones que describen la evolución de la velocidad del fluido $\vec{u}(t,x)$ y la presión asociada en el tiempo t y posición x están dadas por:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p, \ \ \mathrm{div}(\vec{u}) = 0, \\ \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Recordemos que $\vec{u} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ representa la velocidad, $p : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la presión asociada y $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es el dato inicial. El objetivo de esta serie de lecciones consiste en presentar una demostración del resultado de Serrin en [6] sobre la regularidad local de las ecuaciones de Navier-Stokes. En particular, veremos como, a partir de cierta información de integrabilidad local sobre la velocidad, podemos demostrar que la solución es regular.

Antes de enunciar el resultado principal de esta lección, recordemos ciertos resultados importantes alrededor de las ecuaciones de Navier-Stokes.

1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes locales

Recordemos que estamos interesados en el comportamiento local de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, dicho de otra manera, la única información que poseemos sobre este sistema es local. Esto no es un inconveniente dado que se puede fácilmente adaptar nuestro problema a este cuadro de trabajo.

Para fijar las ideas, consideramos un conjunto acotado $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, y estudiaremos el comportamiento de la solución dentro de este conjunto. Así, dado un campo vectorial $\vec{u}$ que pertenece a $L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, diremos que $\vec{u}$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω si para toda función test $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$, con $\mathrm{div}(\varphi) = 0$ tenemos:

$$\Big\langle \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\ ,\ \vec{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0. \tag{1}$$

Además, dada una solución débil $\vec{u}$, se puede construir una distribución $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que llamaremos la presión asociada del sistema tal que $(\vec{u}, p)$ verifican las ecuaciones de Navier-Stokes.

Ahora para una mejor comprensión de los resultados que vamos a presentar, presentemos en primer lugar un recordatorio de ciertas herramientas de base.

2. Espacios locales

Empezamos primero recordando ciertos espacios locales y varias propiedades. Definimos $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < +\infty$, como el espacio de las funciones L^p*-localmente integrables*, es decir

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \left(\int_K |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \mathbb{R}^n \right\},$$

además, si $p = +\infty$, tenemos:

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_{x\in K} \text{ess}|\varphi(x)| < +\infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \mathbb{R}^n \right\},$$

el cual denota el espacio de las funciones *localmente acotadas*. Es fácil ver que para $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ tenemos las inclusiones:

$$L^\infty_{loc} \subset L^{p_2}_{loc} \subset L^{p_1}_{loc} \subset L^1_{loc}.$$

Es claro que, a partir de estas inclusiones, el hecho de pertenecer a L^∞_{loc} es en realidad una condición muy fuerte dado que exige pertenecer a todos los espacios localmente integrables.

Estas definiciones se pueden generalizar para funciones vectoriales fácilmente considerando componente por componente y de manera similar para funciones definidas en $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$. Estas últimas las denotaremos por $(L^p_t L^q_x)_{loc}$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$, para las funciones que son localmente integrables en tiempo y espacio.

Recordemos ahora ciertas desigualdades importantes:

1. Desigualdad de Hölder: si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y se tiene la estimación siguiente:
$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

2. Desigualdad de Young: Para $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. definimos la convolución de estas dos funciones como $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y)dy$. Entonces se tiene que:
$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$
tal que $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Veamos rápidamente una aplicación de las desigualdades previas:

Ejemplo 1 *Sea V un potencial tal que para toda $f \in L^p$, tenemos que:*

$$\|V * f\|_{L^n} \leq C\|f\|_{L^p},$$

con $\frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$. Si buscamos $r > 1$ tal que para todo $w \in L^r$ se tiene que $(V * ww)w \in L^2(\mathbb{R}^3)$, se puede mostrar que $r = \frac{18}{7}$.

Finalmente, podemos enunciar los resultados principales de este mini-curso.

3. Criterio de regularidad local de Serrin

Como mencionamos al inicio de esta lección, es posible obtener una ganancia de regularidad a partir de ciertas hipótesis adicionales sobre la solución $\vec{u}$. Recordemos así el siguiente teorema obtenido inicialmente por Serrin en [5].

Teorema 3.1 *Sea $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\vec{u}$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \tag{2}$$

y si además, tenemos que $\vec{u}$ es acotado en Ω, i.e.

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega),$$

entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $\Omega' \subset \Omega$ tenemos

$$\vec{u} \in L^\infty\big(]t-\rho^2, t[, \dot{H}^{k+1}(B(x_0,\rho))\big) \cap L^2\big(]t-\rho^2, t[, \dot{H}^{k+2}(B(x_0,\rho))\big).$$

Este resultado merece ciertos comentarios:

(i) Recordemos que nuestra hipótesis sobre la solución está dada por

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega),$$

y usando el criterio de regularidad de Serrin (Teorema 3.1), en realidad logramos obtener que

$$\vec{u} \in L^\infty_t \dot{H}^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x(\Omega'),$$

con $\Omega' \subset \Omega$. Así, se puede ver claramente la ganancia de regularidad, respecto a la variable espacial, en efecto pasamos de $L^\infty_t L^2_x$ al espacio $L^\infty_t \dot{H}^1_x$ y del espacio $L^2_t \dot{H}^1_x$ al espacio $L^2_t \dot{H}^2_x$.

(ii) Es importante remarcar que la hipótesis adicional $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)$ es en realidad una hipótesis muy restrictiva y que no puede ser deducida a partir de las informaciones usuales de una solución débil. En efecto, dado que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, por las inyecciones de Sobolev, tenemos que $\dot{H}^1 \subset L^6$. Así, podemos deducir que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t L^6_x(\Omega)$, lo cual implica utilizando interpolación en espacios de Lebesgue:

$$\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega) \qquad \text{con} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2 \leq p \leq +\infty,\ 2 \leq q \leq 6, \tag{3}$$

lo cual claramente, el par $(p, q) = (\infty, \infty)$ no verifica. Dicho de otra manera, esta es una verdadera hipótesis y no existe alguna razón particular para pensar que esta se satisface.

Así, el objetivo de esta serie de lecciones es presentar una primera generalización de este resultado, la cual está dada como sigue:

Teorema 3.2 *Sea $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\vec{u}$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \tag{4}$$

y si además, tenemos que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$, tal que $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, entonces para todo $\Omega' \subset \Omega$, se tiene que

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q_\rho)$$

Referencias

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer. (2011).

[2] P.G. Lemarié-Rieusset. *Recent Developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC. (2002).

[3] P.G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* Chapman & Hall/CRC. (2016).

[4] J. Robinson. *An introduction to the classical theory of the Navier– Stokes equations.* Lecture notes, IMECC-Unicamp. (2010).

[5] J. Serrin. *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9:187-195. (1962).

[6] J. Serrin. *The initial value problem for the Navier–Stokes equations.* In Nonlinear Problems (Rudolph E. Langer, ed.), 69–98. Madison: The University of Wisconsin press. (1963).

Lección n°2: AMARUN 2024
Algunas estimaciones del núcleo del calor

Recordemos en primer lugar que nuestro objetivo consiste en mostrar que dada una solución débil $(\vec{u}, p)$ de las ecuaciones de Navier-Stokes, deducir que $\vec{u}$ es acotada en tiempo y espacio a partir de cierta información adicional de integrabilidad. Para ello, la estrategia consiste en utilizar las propiedades de regularización del núcleo del calor, por lo cual en esta lección vamos a presentar rápidamente varios resultados bien conocidos alrededor de la ecuación del calor.

1. La ecuación del calor

Consideremos por un momento la ecuación del calor, la cual está dada por:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f, \\ u(0,x) = 0, \end{cases}$$

donde f es una fuerza exterior arbitrario suficientemente regular. En particular, vamos a considerar un dato inicial nulo dado que en nuestro análisis, el dato inicial no tendrá un rol primordial.

Así, recordemos que la formulación integral de este sistema está dada por:

$$u(t,x) = \int_0^t \mathfrak{h}_{t-s} * f(s)\, ds,$$

donde $\mathfrak{h}_{t-s}$ es el núcleo del calor definido como

$$\mathfrak{h}_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Presentaremos ahora varias propiedades importantes que nos permitan obtener una ganancia de información para la solución de la ecuación del calor a partir de la información que poseemos sobre f, de manera que podamos responder la siguiente pregunta:

Pregunta 1 *Sea $f \in X$ donde X es un espacio funcional en tiempo y espacio. ¿A qué espacio funcional Y pertenece la solución u? Dicho de otra manera, buscamos una estimación del tipo siguiente:*

$$\|u\|_Y = \left\| \int_0^t \mathfrak{h}_{t-s} * f\, ds \right\|_Y \leq C\|f\|_X.$$

Para responder esta pregunta, vamos a limitar nuestro estudio, considerando simplemente que el espacio X es en realidad un espacio de Lebesgue en tiempo y espacio, y veremos en efecto que por las propiedades del núcleo del calor, es posible obtener una ganancia de integrabilidad de la solución de la ecuación del calor. Para ello, comencemos con la siguiente proposición que nos permite estudiar y estimar las normas L^p del núcleo del calor.

Proposición 1.1 *Si $\alpha \in \mathbb{N}^3$ es un multiíndice y $k \in \mathbb{N}$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ y $t > 0$, se tiene que*

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \mathfrak{h}_t \right\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{|\alpha|+k}{2} + \frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

Prueba. Por simplicidad, estudiaremos simplemente el caso particular $k = 0$ y $|\alpha| = 1$. Primero veamos que se obtiene fácilmente la siguiente estimación:

$$|D^\alpha \mathfrak{h}_t(x)| \leq C \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{|x|}{4t}$$

Luego, si consideramos la norma $L^p(\mathbb{R}^3)$ con $1 \leq p < +\infty$, se sigue que:

$$\|D^\alpha \mathfrak{h}_t\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha \mathfrak{h}_t|^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3p/2}} \left(\frac{|x|}{4t}\right)^p e^{-\frac{p|x|^2}{4t}} \, dx.$$

Así, considerando el cambio de variable $z = \frac{1}{2\sqrt{t}} x$, se sigue que $dz = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^3 dx$ y además $|z| = \frac{1}{2\sqrt{t}}|x|$, entonces:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \mathfrak{h}_t\|_p^p &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3p/2}} \left(\frac{2\sqrt{t}|z|}{4t}\right)^p e^{-|z|^2 p} t^{\frac{3}{2}} \, dz \\ &= C \frac{1}{t^{3p/2}} \cdot \frac{1}{t^{p/2}} \cdot t^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |z|^p e^{-|z|^2 p} \, dz \\ &= C t^{-\frac{3p}{2} - \frac{p}{2} + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |z|^p e^{-|z|^2 p} \, dz. \end{aligned}$$

Luego, dado que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |z|^p e^{-|z|^2 p} \, dz < +\infty$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \mathfrak{h}_t\|_p &\leq C t^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2p}} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})}, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba de la proposición. ■

Veamos así como aplicar esta desigualdad a la ecuación del calor en la siguiente proposición:

Proposición 1.2 *Sean $1 \leq p, q \leq +\infty$ y $f \in L^q(\mathbb{R}^3)$. Entonces para todo $r \geq 0$ tal que $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se tiene*

$$\|D^\alpha \mathfrak{h} * f\|_{L^r} \leq t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})} \|f\|_{L^q}.$$

Prueba: Es una aplicación directa de la desigualdad de Young y la Proposición 1.1. ■

Veamos ahora como los resultados precedentes se aplican directamente al estudio de la ecuación del calor,

Proposición 1.3 *Sea $f \in L_t^p L_x^q(\mathbb{R}^3)$ tal que $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$. Sea u la solución de la ecuación del calor*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \partial f, \\ u(0, x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Entonces, para todo $1 \leq p_1 \leq q_1 < +\infty$ tales que $p \leq p_1$, $q \leq q_1$ y la relación siguiente se verifique

$$-1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{2}{p_1} + \frac{3}{q_1},$$

se tiene que $u \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Observación 1.1 *Observemos que, como por hipótesis $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, podemos encontrar (p_1, q_1) tal que la condición (1.3).*

Prueba. En primer lugar, dado que u es una solución de la ecuación (1), usando la formula de Duhamel y las propiedades de convolución, se tiene que:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \mathfrak{h}_{t-s} * \partial f \, ds \\ &= \int_0^t \partial \mathfrak{h}_{t-s} * f \, ds \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad precedente, vamos a mostrar que existe $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq +\infty$ tales que $u \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ con $-1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{2}{p_1} + \frac{3}{q_1}$.

En primer lugar, si estudiemos la norma L^{q_1}, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q_1}} &\leq \left\| \int_0^t \partial \mathfrak{h}_{t-s} * f \, ds \right\|_{L^{q_1}} \\ &\leq \int_0^t \|\partial \mathfrak{h}_{t-s} * f\|_{L^{q_1}} \, ds \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young, con $\frac{1}{q_1} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$, se sigue que:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^{q_1}} \leq \int_0^t \|\partial \mathfrak{h}_{t-s}\|_{L^r} \|f\|_{L^q} \, ds.$$

Usando la propiedad del núcleo del calor dada en la Proposición 1.1, tenemos:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^{q_1}} \leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})} \|f(s,\cdot)\|_{L^q} \, ds.$$

Si consideramos ahora la norma en variable temporal L^{p_1} se tiene que:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}} &\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})} \|f(s,\cdot)\|_{L^q} \, ds \right\|_{L^{p_1}} \\ &= \|t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})} * \|f(t,\cdot)\|_{L^q}\|_{L_t^{p_1}}. \end{aligned}$$

Así, por la desigualdad de Young respecto a la variable temporal, observamos que:

$$\|u\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}} \leq \|t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})}\|_{L^{r_1}} \|f\|_{L_t^p L_x^q}$$

donde $\frac{1}{p_1} + 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p}$. Por lo tanto, con el fin de obtener que $u \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$, observamos que es suficiente encontrar $r, r_1 > 1$ tal que tenemos el control siguiente

$$\|t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})}\|_{L^{r_1}} < +\infty. \tag{2}$$

Notemos así que

$$\|t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})}\|_{L^{r_1}}^{r_1} = \int_0^T t^{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r}))r_1} \, dt.$$

y entonces para que esta integral converja, en particular es suficiente tener el control siguiente

$$(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1-\frac{1}{r}))r_1 + 1 > 0,$$

lo cual es equivalente a tener que

$$4 < \frac{2}{r_1} + \frac{3}{r}.$$

Además, dado que $\frac{1}{q_1} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ y $\frac{1}{p_1} + 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p}$, se sigue fácilmente que

$$-1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{2}{p_1} + \frac{3}{q_1}.$$

Como por hipótesis tenemos que $\frac{2}{q} + \frac{3}{p} < 1$, podemos encontrar (p_1, q_1) tal que la estimación precedente sea verificada, y entonces (2) se verifica. Así, hemos mostrado en particular que $u \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}$, lo que concluye la prueba de la proposición. ■

Finalmente, remarquemos que a partir de cierta información de integrabilidad de la fuerza exterior, estamos en la capacidad de recuperar una información de integrabilidad sobre la solución de la ecuación del calor. En particular, hemos considerado una derivada en la fuerza exterior, y este hecho permite observar el efecto regularizante del núcleo del calor y este caso particular será útil en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes, como veremos en la lección siguiente.

Lección n°3: AMARUN 2024

Demostración del criterio de Serrin - parte 3.

En esta lección vamos a presentar la prueba del criterio de Serrin dado en [2] que recordemos en el siguiente teorema

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ un conjunto acotado en tiempo y espacio. Sea $(\vec{u},p)$ una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω, i.e., tenemos que*

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}p - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0,$$

tal que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ y $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si además se tiene que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$ con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, entonces para todo $\Omega' \subset \Omega$, se sigue que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')$.

Para demostrar este teorema nos vamos a inspirar en [1].

Demostración. Notamos en primer lugar que no tenemos ninguna hipótesis sobre la presión p, la cual es en principio simplemente una distribución. Por tal motivo, no podemos deducir una ganancia de información de la velocidad $\vec{u}$ directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para ello, y dado que nuestras hipótesis son locales, para deshacernos de la presión vamos a seguir la estrategia habitual y entonces, vamos a estudiar en un primer lugar la vorticidad, con el fin de aplicar las estimaciones del núcleo de calor obtenidas en la lección anterior.

Así, la demostración se desarrolla en 2 etapas. Primero estudiaremos la vorticidad de $\vec{u}$ y eventualmente veremos cómo deducir la ganancia de integrabilidad para $\vec{u}$ usando ciertas estimaciones elípticas.

Etapa 1: estudio de un problema sin presión. Dado que en primer lugar buscamos deshacernos de la presión y que nuestro cuadro de trabajo es local, el argumento más simple consiste en aplicar el operador rotacional a las ecuaciones de Navier-Stokes. Veamos así ciertas propiedades interesantes de este operador.

Recordemos que el rotacional $\vec{\nabla}\times$ de una función vectorial $\vec{\varphi}$ está dado por la expresión siguiente:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}\varphi_3 - \partial_{x_3}\varphi_2 \\ \partial_{x_3}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_3 \\ \partial_{x_1}\varphi_2 - \partial_{x_2}\varphi_1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar, utilizando identidades vectoriales básicas que

i) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}p = 0$,

ii) $\vec{\nabla}\times(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}) = \mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{w} - \vec{w}\otimes\vec{u})$, donde hemos denotado $\vec{w} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$.

Para una demostración más detallada de estas propiedades, referimos al lector a la serie de lecciones del curso de verano del 2023.

Definiremos así la vorticidad $\vec{w}$ como $\vec{\nabla}\wedge\vec{u}$. Remarquemos que dado que $\vec{u} \in L^2_t\dot{H}^1_x(\Omega)$, se puede ver fácilmente que la información inicial que tenemos sobre la vorticidad es $\vec{w} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$.

Por otro lado, observemos que como $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$, se puede mostrar que

$$-\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{w}.$$

Así, a partir de la relación precedente podemos ver que la información que obtenemos sobre $\vec{w}$ se la puede inyectar en $\vec{u}$. En particular, veremos que si mostramos que $\vec{w}$ es acotada, entonces usando

estimaciones clásicas de ecuaciones elípticas, la velocidad $\vec{u}$ también debe ser acotada.

Enfaticemos que inicialmente tenemos que $\vec{w} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$, lo cual no es suficiente para deducir que $\vec{u}$ sea acotada, y es por ello que debemos pasar por un proceso adicional que nos permita ganar información para la vorticidad. En efecto, vamos a deducir una ganancia de integrabilidad de $\vec{w}$ estudiando su dinámica.

Así, si tomamos el operador rotacional a las ecuaciones de Navier-Stokes, se tiene que

$$\vec{\nabla} \times (\partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} p) = 0.$$

Luego, por las propiedades $i)$ y $ii)$ del operador rotacional, se sigue que

$$\partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w} - \vec{w} \otimes \vec{u}). \tag{1}$$

Observemos así que la vorticidad verifica una ecuación de tipo parabólica, por lo cual usando el hecho que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$, y las estimaciones del núcleo del calor dadas en la lección pasada, podremos obtener una ganancia de integrabilidad de $\vec{w}$. Sin embargo, remarquemos que dichas estimaciones están realizadas en un todo el espacio, y nuestras hipótesis son definidas solamente sobre un conjunto acotado Ω. Entonces, no podemos estudiar directamente las ecuaciones precedentes, por lo que debemos pasar por un proceso de localización.

Para ello, consideremos $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ tal que para $\Omega' \subset \Omega$, tenemos que $\varphi = 1$ en Ω' y $\sup(\varphi) \subseteq \Omega$. Definimos ahora la función $\vec{W} = \varphi \vec{w}$, y vamos a mostrar que $\vec{W} \in L^\infty_t L^\infty_x([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ para cierto $T < +\infty$. Observemos así que por las propiedades de la función test, se sigue inmediatamente que $\vec{w} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')$.

Estudiemos ahora la función $\vec{W}$. Notemos primero que esta función está definida sobre todo el espacio, por lo cual podemos aplicar las estimaciones de la ecuación del calor. Deduzcamos así la ecuación que verifica $\vec{W}$. Para ello, usando relaciones básicas de derivación tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{W} - \Delta \vec{W} &= \partial_t \varphi \vec{w} + \varphi \partial_t \vec{w} + \Delta \varphi \vec{w} + 2 \sum_{i=1}^{3} \partial_i (\partial_i \varphi \vec{w}) - \varphi \Delta \vec{w} \\
&= (\partial_t \varphi + \Delta \varphi) \vec{w} - 2 \sum_{i=1}^{3} \partial_i (\partial_i \varphi \vec{w}) + \varphi (\partial_t \vec{w} - \Delta \vec{w}) \\
&= (\partial_t \varphi + \Delta \varphi) \vec{w} - 2 \sum_{i=1}^{3} \partial_i (\partial_i \varphi \vec{w}) + \varphi (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w} - \vec{w} \otimes \vec{u})).
\end{aligned}$$

donde en la última línea hemos usado el hecho que $\vec{w}$ verifica la ecuación (1).

Luego, usando la formula de Duhamel se sigue que

$$\vec{W} = \int_0^t \mathfrak{h}_{t-s} * \left((\partial_t \varphi + \Delta \varphi) \vec{w} - 2 \sum_{i=1}^{3} \partial_i (\partial_i \varphi \vec{w}) + \varphi (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w} - \vec{w} \otimes \vec{u})) \right) ds, \tag{2}$$

donde $\mathfrak{h}_t$ representa el núcleo del calor. Así, la idea principal consiste en aplicar las estimaciones de la ecuación del calor dadas en la lección precedente con el fin de deducir que que cada término de la expresión precedente es acotado.

Es claro que el término $\displaystyle\int \mathfrak{h}_{t-s} * \operatorname{div}(\varphi \vec{w} \otimes \vec{w} - \vec{w} \otimes \vec{u}) ds$ es el más técnico a tratar y en realidad, es suficiente estudiar solamente esta expresión, dado que podemos aplicar argumentos similares para tratar el resto de términos. Notemos además que dicha expresión se la puede descomponer de la

siguiente manera: para todo $1 \leq i, j, k \leq 3$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi \partial_j (u_k w_j) ds &= \int \mathfrak{h}_{t-s} * \partial_j (\varphi u_k w_j) ds - \int \mathfrak{h}_{t-s} * (\partial_j \varphi)(u_k w_j) ds \\
&= \int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds - \int \mathfrak{h}_{t-s} * (\partial_j \varphi)(u_k w_j) ds \\
&= (I) + (II) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Así, nuestro objetivo es mostrar que los dos términos de la expresión anterior son acotados. Sin embargo, dado que la información inicial que tenemos es $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$, con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$ y $\varphi \vec{w} \in L^2_t L^2_x$, por lo cual no podemos deducir directamente que los términos (I) y (II) son acotados. No obstante, sí es posible determinar indices $2 < p_1 \leq q_1 + \infty$ tales que los términos (I) y (II) pertenezcan a $L^{p_1}_t L^{q_1}_x$. Notemos que esto implicará que $\vec{W} \in L^{p_1}_t L^{q_1}_x$ lo cual representa una ganancia de integrabilidad dado que inicialmente tenemos que $\vec{W} \in L^2_t L^2_x$. Posteriormente, iterando este proceso, podemos mostrar que $\vec{W}$ pertenezca a $L^\infty_t L^\infty_x$.

Probemos así la primera ganancia de integrabilidad y entonces mostremos que cada término en (3) pertenece a $L^{p_1}_t L^{q_1}_x$ para cierto $2 < p_1 \leq q_1 < +\infty$ que serán definidos luego. Para ellos, remarquemos que dado que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x$ con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$ y $\vec{w} \in L^2_t L^2_x$, por la desigualdad de Hölder se sigue que $\varphi \vec{u} \vec{w} \in L^a_t L^b_x$, con

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Estudiemos ahora el primer término de (3). Tenemos entonces que estimar la cantidad siguiente:

$$\left\| \int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds \right\|_{L^{p_1}_t L^{q_1}_x}.$$

Consideremos en primer lugar la norma espacial $L^{q_1}_x$. Por la desigualdad de Young, con $\frac{1}{q_1} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{b}$, se sigue que

$$\left\| \int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds \right\|_{L^{q_1}_x} \leq \int_0^t \|\partial_j \mathfrak{h}_{t-s}\|_{L^r_x} \|\varphi u_k w_j\|_{L^b_x} ds.$$

Usando, las estimaciones del núcleo del calor dadas en la lección 2, se sigue que

$$\left\| \int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds \right\|_{L^{q_1}_x} \leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{r})} \|\varphi u_k w_j\|_{L^b_x} ds$$

Luego, considerando la norma L^a_t en tiempo y la desigualdad de Young en tiempo, con $\frac{1}{p_1} + 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{a}$ se sigue que

$$\left\| \int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds \right\|_{L^{p_1}_t L^{q_1}_x} \leq \|t^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{r})}\|_{L^{r_1}_t} \|\varphi u_k w_j\|_{L^a_t L^b_x}.$$

Así, como $\varphi \vec{u} \vec{w} \in L^a_t L^b_x$, para que la cantidad precedente sea finita necesitamos que $\|t^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{r})}\|_{L^{r_1}_t} < +\infty$. Dado que nuestro intervalo de integración es $[0, T]$, es suficiente que el par (r, r_1) verifiquen la relación siguiente

$$(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{r}))r_1 + 1 > 0, \qquad (5)$$

la cual podemos reescribir de la manera siguiente.

$$4 < \frac{2}{r_1} + \frac{3}{r}.$$

Ahora, usando el hecho que $\frac{1}{p_1} + 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{a}$ y $\frac{1}{q_1} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{b}$, tenemos que

$$-\frac{2}{p_1} - \frac{3}{q_1} < 1 - \frac{2}{a} - \frac{3}{b}.$$

Dado que $\frac{1}{a} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2}$, se sigue que (5) es equivalente a considerar (p_1, q_1) tales que se verifica la relación siguiente

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{p_1} - \frac{3}{q_1} < 1 - \frac{2}{p} - \frac{3}{q}. \qquad (6)$$

Observemos que dado que $1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}>0$ por hipótesis, siempre vamos a poder encontrar un par (p_1,q_1) tal que $p_1,q_1>2$ que verifica la relación anterior. Así, se sigue que $\|t^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})}\|_{L_t^{r_1}}<+\infty$, y entonces el primer término de (3) pertenece a $L_t^{p_1}L_x^{q_1}$, *i.e.*,

$$\left\|\int \partial_j \mathfrak{h}_{t-s} * \varphi u_k w_j ds\right\|_{L_t^{p_1}L_x^{q_1}} < +\infty.$$

Estudiemos ahora el segundo término de (3). Usando los mismos argumentos que el caso anterior es fácil ver que

$$\left\|\int \mathfrak{h}_{t-s} * (\partial_j\varphi) u_k w_j ds\right\|_{L_t^{p_1}L_x^{q_1}} \leq \|t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})}\|_{L_t^{r_1}}\|(\partial_j\varphi)u_k w_j\|_{L_t^a L_x^b},$$

Nuevamente, para que la expresión anterior sea finita, necesitamos que

$$-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r}) > -\frac{1}{r_1},$$

es decir,

$$3 < \frac{2}{r_1}+\frac{3}{r}.$$

Nuevamente, usando el hecho que $\frac{1}{p_1}+1=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{q_1}+1=\frac{1}{r}+\frac{1}{b}$, se tiene que

$$-\frac{2}{p_1}-\frac{3}{q_1} < 2-\frac{2}{a}-\frac{3}{b}.$$

Dado que $\frac{1}{a}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{b}=\frac{1}{q}+\frac{1}{2}$, se sigue que (5) es equivalente a tomar (p_1,q_1) tales que se verifica la relación siguiente

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{p_1}-\frac{3}{q_1} < 1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}.$$

Como $1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}>0$ por hipótesis, vamos a poder encontrar un par (p_1,q_1) tal que $p_1,q_1>2$ que verifica la relación anterior, y entonces tenemos que

$$\left\|\int \mathfrak{h}_{t-s} * (\partial_j\varphi) u_k w_j ds\right\|_{L_t^{p_1}L_x^{q_1}} < +\infty.$$

Así, hemos mostrado que existe $p_1,q_1>2$ tales que cada término en (3) pertenecen a $L_t^{p_1}L_x^{q_1}$. Usando los mismos argumentos, se puede mostrar que la expresión dada en (2), pertenece a $L_t^{p_1}L_x^{q_1}$, y entonces tenemos que $\vec{W}\in L_t^{p_1}L_x^{q_1}$. Como $p_1,q_1>2$, esto representa una ganancia de información, y esto termina la primera iteración.

Notemos ahora que podemos iterar este proceso, considerando ahora como punto de partida el hecho que $\vec{w}\in L_t^{p_1}L_x^{q_1}$, lo cual implicará que el lado izquierdo de la desigualdad (6), se vuelva más pequeño lo que nos permitirá, eventualmente mostrar que $\vec{W}\in L_t^\infty L_x^\infty$.

Así, hemos obtenido finalmente que para cierto $\Omega'\subset\Omega$, tenemos que $\vec{w}\in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega')$. Sin embargo, recordemos que nuestro objetivo es obtener esta ganancia pero para la velocidad $\vec{u}$.

Terminamos así esta lección recordando que $\vec{w}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$ y que tenemos la relación:

$$-\Delta\vec{u}=\vec{\nabla}\times(\vec{w}).$$

Veremos así, en la siguiente lección la segunda etapa de la demostración del Teorema 1, donde probaremos como deducir que $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega'')$ para cierto $\Omega''\subset\Omega'$ usando la relación previa.

Referencias

[1] J. Robinson. *An introduction to the classical theory of the Navier– Stokes equations.* Lecture notes, IMECC-Unicamp. (2010).

[2] J. Serrin. *The initial value problem for the Navier–Stokes equations.* In Nonlinear Problems (Rudolph E. Langer, ed.), 69–98. Madison: The University of Wisconsin press. (1963).

Lección n°4: AMARUN 2024

Demostración del criterio de Serrin - parte 2.

En esta ultima lección vamos a culminar con la prueba del criterio de Serrin, que recordemos en el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ un conjunto acotado en tiempo y espacio. Sea $(\vec{u},p)$ una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω, i.e., tenemos que*

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}p - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0,$$

tal que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ y $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supongamos además que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$ con $\frac{2}{p}+\frac{3}{q} < 1$. Entonces para todo $\Omega' \subset \Omega$, se tiene que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')$.

Demostración. Recordemos que la demostración de este resultado se desarrolla en 2 etapas. La primera etapa, dada en la lección precedente, consistía en la ganancia de integrabilidad de la vorticidad $\vec{w} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}$, que resumimos en la siguiente proposición:

Proposición 1 *Sea $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ un conjunto acotado en tiempo y espacio. Sea $(\vec{u},p)$ una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes tal que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ y $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supongamos además que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$ con $\frac{2}{p}+\frac{3}{q} < 1$. Entonces para todo $\Omega' =]c,d[\times B' \subset \Omega =]a,b[\times B$, se tiene que $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')$.*

Estudiemos ahora como a partir de esta información sobre $\vec{\omega}$, podemos deducir que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega'')$ para cierto $\Omega'' \subset \Omega'$.

Etapa 2: estimaciones elípticas. En primer lugar, dado que $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$, es fácil verificar que

$$-\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{\omega} \qquad en \qquad \Omega' \tag{1}$$

Así, a partir de la relación precedente podemos ver que la información que obtenemos sobre $\vec{\omega}$ se la puede inyectar en $\vec{u}$, usando estimaciones clásicas de ecuaciones elípticas. Enfaticemos que inicialmente tenemos que $\vec{\omega} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$, lo cual no es suficiente para deducir que $\vec{u}$ sea acotada. No obstante, veremos como la información obtenida en la Proposicion 1, es dice que la vorticidad sea acotada, nos permite deducir que $\vec{u}$ sea acotada igualmente.

Para ello, utilizaremos la ley de Bio-Savart que recordamos en las siguientes lineas. Supongamos por un momento que la relación (1) se verifica en todo $\mathbb{R}^3$. En este escenario la ley de Bio-Savart nos dice que podemos escribir la velocidad $\vec{u}$ de la siguiente manera:

$$\vec{u} = (-\Delta)^{-1}(\nabla\times\vec{\omega}),$$

cuya formulación integral está dada por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\nabla\times\omega\, dy.$$

Es importante remarcar que dado que el operador $(-\Delta)^{-1}$ es no local, no podemos aplicar la relación precedente a la ecuación (1) dado que estamos trabajando en conjuntos acotados. Sin embargo, es posible establecer una versión local que introducimos en la siguiente proposición.

Proposición 2 (Ley de Bio-Savart local) *Sean $\vec{u}$ una función tal que que $u \in L^q(B)$ y $\nabla u \in L^{q'}(B)$ para algún $1 \le q, q' \le \infty$ con $B \subset\subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado. Si para $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}$ se verifica la relación siguiente*

$$-\Delta u = \nabla\times\omega \quad en \quad B.$$

entonces, para todo abierto $B' \subset B$, y para todo $x \in B'$, se tiene que

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{B'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \wedge \omega\, dy + A(x),$$

donde $A(x)$ es una función armónica en B'.

Una prueba de este resultado se puede encontrar en [5, Teorema 12.5.] .

Regresando así a la prueba del Teorema 1, dado que tenemos la igualdad

$$-\Delta \vec{u} = \nabla \times \vec{\omega} \quad \text{en} \quad \Omega =]a,b[\times B,$$

y como por hipótesis se tiene que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_x H^1_x(\Omega)$, podemos aplicar la ley de Bio-Savart local y entonces existe una función armónica A tal que para todo $B' \subset B$, se tiene que

$$\vec{u}(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_{B'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \wedge \vec{\omega}(t,y)dy + \vec{A}(t,x). \tag{2}$$

Ahora, con esta relación de $\vec{u}$ a la mano, podemos mostrar finalmente que dicha variable es acotada. En efecto, probaremos que cada termino de la expresión precedente pertenece a $L^\infty_{t,x}(B')$. Para el primero, dado que por la Proposición 1 se tiene $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')$, entonces es fácil ver que

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{B'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \wedge \vec{\omega}\, dy\right| \leq C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^\infty_x(\Omega')} \int_{B'} \left|\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}dy\right)\right|.$$

Además, es fácil notar que

$$\int_{B'} \left|\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right| dy \leq \int_{B'} \frac{1}{|x-y|^2}\, dy < +\infty,$$

y se obtiene que

$$\left\|\frac{1}{4\pi}\int_{B'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \wedge \vec{\omega} dy\right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \leq C\|\omega\|_{L^\infty_t L^\infty_x}.$$

Estudiemos ahora el segundo término de la parte derecha de la expresión (2). Notemos que podemos reescribir la función armónica $\vec{A}$ de la siguiente manera

$$\vec{A}(t,x) = \vec{u}(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{B'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \wedge \vec{\omega}(t,y)dy.$$

Ahora, dado que por hipótesis tenemos que $u \in L^\infty_t L^2_x(\Omega)$ y como probamos que el segundo término del lado derecho es acotado, en particular se sigue que

$$\vec{A} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega').$$

Por otro lado, dado que $\vec{A}$ es una función armónica, usando las estimaciones de Schauder (ver [5, Apéndice C]) se puede mostrar que para todo $B'' \subset B'$, tenemos

$$\vec{A}(t,x) = \frac{1}{|B''|}\int_{B''} A(y)\, dy.$$

Luego, para todo $(t,x) \in \Omega'' =]c,d[\times B'' \subset \Omega'$, se tiene que

$$|\vec{A}(t,x)| \leq C\|\vec{A}\|_{L^\infty_t L^2_x},$$

y entonces tenemos que $\vec{A} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega'')$. Luego, usando la identidad (2), podemos concluir que

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega''),$$

lo que termina la demostración del teorema . ■

Terminamos esta lección presentando algunos comentarios sobre el Teorema 1:

(i) Como mencionamos en la primera lección, el hecho de que la velocidad sea acotada implica una ganancia en regularidad. Por lo tanto, es posible deducir que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\vec{u} \in L_t^\infty \dot{H}_x^{k+1} \cap L_t^2 \dot{H}_x^{k+2}(\Omega').$$

Observemos que, en realidad, la ganancia de regularidad se manifiesta únicamente en la variable espacial, mientras que la regularidad en la variable temporal, dada por L_t^∞ y L_t^2, permanece igual. Esto se debe a la falta de información sobre la presión la cual es simplemente una distribución. Para más detalles sobre este fenómeno, referimos al lector a [4].

(ii) Por otro lado, recordemos que la hipótesis inicial sobre la solución $(\vec{u}, p)$ esta dada por

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega).$$

Por las inyecciones de Sobolev, sabemos que $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, lo que permite deducir que

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 L_x^6(\Omega).$$

Utilizando un argumento de interpolación en espacios de Lebesgue, se obtiene que

$$\vec{u} \in L_t^p L_x^q(\Omega) \qquad \text{con} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2 \leq p \leq +\infty,\ 2 \leq q \leq 6. \tag{3}$$

Así se puede ver que la hipótesis adicional $\vec{u} \in L_t^p L_x^q(\Omega)$, con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, constituye una restricción significativa que no puede deducirse a partir de la información inicial de una solución débil.

Además, es importante mencionar que el caso límite $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$, con $q > 3$, también nos permite deducir la regularidad de la solución y fue demostrado en [8] y [9]. Sin embargo, las técnicas utilizadas en la demostración del Teorema 1 no permiten cubrir este caso. Finalmente, cabe destacar que en el artículo [2] se demostró, en particular, el caso $q = 3$, donde se dedujo la regularidad de la solución, aunque la estrategia empleada para abordar este caso es más delicada.

Referencias

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer. (2011).

[2] L. Escauriaza, G. Seregin & W. Sverak. *$L^{\infty,3}$-solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness.* Uspekhi Mat. Nauk. 58(350):3-44 (2003).

[3] P.G. Lemarié-Rieusset. *Recent Developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC. (2002).

[4] P.G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* Chapman & Hall/CRC. (2016).

[5] J. Robinson. *An introduction to the classical theory of the Navier– Stokes equations.* Lecture notes, IMECC-Unicamp. (2010).

[6] J. Serrin. *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9:187-195. (1962).

[7] J. Serrin. *The initial value problem for the Navier–Stokes equations.* In Nonlinear Problems (Rudolph E. Langer, ed.), 69–98. Madison: The University of Wisconsin press. (1963).

[8] M. Struwe. *On partial regularity results for the Navier–Stokes equations.* American Mathematical Soc (2018).

[9] S. Takahashi. *On partial regularity results for the Navier–Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. 41:437–458 (1988).