**Lección n°2: Problema de valor inicial con condición de borde**

En la Lección 1 se introdujo el problema de Stefan y se revisó la ecuación de difusión, junto con resultados de existencia y unicidad para la ecuación del calor en una dimensión.

En la presente Lección se exponen resultados clásicos de existencia y unicidad para problemas con condiciones de frontera de tipo Dirichlet y Neumann; a continuación, se consideran resultados análogos en presencia de una frontera libre. Para los enunciados cuya demostración no se incluye, así como para un tratamiento detallado de las pruebas presentadas, véase [1]. Esta revisión proporciona el marco teórico necesario para el estudio posterior del problema de Stefan.

# 1. Problema de valor inicial con condición de borde Dirichlet

Con la finalidad de estudiar la solución de la ecuación del calor con condición de tipo Dirichlet, consideremos el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones.

**Teorema 1 (Existencia y unicidad)** *Sea $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos y*

$$|f(x)| \le C_1 \exp\{\, C_2 |x|^{1+\alpha}\}, \qquad 0 \le \alpha < 1,$$

*y sea $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos con*

$$|g(t)| \le C_1 t^{-\alpha} \quad \text{para } 0 < t < \varepsilon,$$

*donde $C_1, C_2, \varepsilon > 0$.*

1. (Existencia). *Definamos, para $x > 0$, $t > 0$,*

$$u(x,t) = -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

*con*

$$G(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) - K(x+\xi,t), \qquad t > 0, \tag{2}$$

*y $K$ el núcleo del calor (solución fundamental). Entonces $u$ resuelve el problema de Cauchy–frontera en el semieje*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0. \end{cases}$$

*Si en cambio $f(x) \sim C_1 \exp\{C_2 x^2\}$ cuando $x \to +\infty$, la solución anterior satisface las condiciones de frontera sólo para*

$$0 < t < (4C_2)^{-1}.$$

2. (Unicidad). *Además, $u$ es* única *dentro de la clase de soluciones $v$ que admiten un número finito de discontinuidades acotadas sobre la frontera parabólica y satisfacen*

$$|v(x,t)| \le C_1 \exp\{\, C_2 x^2\}, \qquad x > 0,\ t > 0.$$

**Demostración.**

1. **Unicidad**
   El argumento es análogo al de la Lección 1 para el problema de valor inicial: se introduce una función de comparación y se procede del mismo modo para concluir la unicidad.

2. **Existencia**

Estudiemos el problema de determinar la solución $u$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \\ u(0,t) = g(t), \quad 0 < t \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

donde $f$ y $g$ son funciones continuas a trozos. Por la linealidad de la ecuación de difusión, el sistema (3) se descompone como $u = v + w$, donde $v$ es solución

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \\ v(0,t) = 0, \quad 0 < t \\ v(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

y $w$ es solución de

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \\ w(0,t) = g(t), \quad 0 < t \\ w(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Para encontrar una solución al problema (4), consideremos la extensión impar $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de $f$ (*recordemos que, al menos, debe cumplirse* $|f(x)| \leq C_1 \exp\{C_2 x^2\}$ *cuando* $|x| \to \infty$), definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Al resolver el problema de valor inicial en $\mathbb{R}$ con dato $\tilde{f}$ (se deja como ejercicio), se obtiene

$$v(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi, \qquad x > 0,\ t > 0,$$

donde

$$G(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) - K(x+\xi,t), \qquad t > 0,$$

y $K$ es el núcleo del calor.

Ahora para encontrar una solución al problema (5), consideremos la expresión

$$W(x,t) = -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau) d\tau, \tag{6}$$

la cual, dado que $\lim_{\tau \uparrow t} (\partial K/\partial x)(x, t-\tau) = 0$, satisface la ecuación $W_t = W_{xx}$ para $x > 0$ y $t > 0$. Con el cambio de variable $\rho = x/\big(2\sqrt{t-\tau}\big)$ en (6) se obtiene

$$W(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^\infty \exp\{-\rho^2\}\, d\rho, \tag{7}$$

expresión que usaremos para construir una solución de (5) por medio del método de Duhamel. De (7) se deduce además

$$\lim_{x \downarrow 0} W(x,t) = 1, \qquad t > 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} W(x,t) = 0, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Definamos luego

$$W(x,t) \equiv 0, \quad t \leq 0. \tag{10}$$

Entonces, para cada $\tau$, $W(x, t-\tau)$ satisface:

$$\begin{cases} W_t = W_{xx}, & x > 0, \quad \text{para todo } t \\ W(0, t-\tau) = 1, & \tau < t \\ W(x, t-\tau) = 0, & x > 0, \quad t \leq \tau. \end{cases} \tag{11}$$

Para cada entero positivo $n$, definimos la siguiente expresión

$$w_n(x,t) = \sum_{j=0}^{[nt]} \{W(x, t-\tau_j) - W(x, t-\tau_{j+1})\}\, g\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \tag{12}$$

donde $\tau_j = j/n$, y $g$ es el dato Dirichlet inicial en (3). Notemos que $w_n$ satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_n}{\partial t} & = \dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}, \\ w_n(x,0) & = 0, \quad x > 0, \end{cases} \tag{13}$$

y para casi todo $t$

$$w_n(0,t) = g\left(\frac{2[nt]+1}{2n}\right) \tag{14}$$

De (14), observemos que los $w_n$ son aproximaciones a $w$, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2[nt]+1}{2n} = t. \tag{15}$$

Así, como también se tiene que

$$W(x, t-\tau_j) - W(x, t-\tau_{j+1}) = \frac{\partial W}{\partial \tau}\left(x, t - \frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{16}$$

vemos que los $w_n$ son aproximaciones a la integral de Riemann

$$w(x,t) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial \tau}(x, t-\tau) g(\tau) d\tau = -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau) g(\tau) d\tau \tag{17}$$

Estudiemos la regularidad de la convolución

$$w(x,t) \;=\; -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

Para $m, n \in \mathbb{N}_0$ se tiene (ejercicio)

$$\frac{\partial^{m+n} K}{\partial x^m \partial t^n}(x, t-\tau) = R_{m,n}\big(x, (t-\tau)^{1/2}\big)\, \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\}, \tag{19}$$

donde $R_{m,n}$ es una función racional. Luego para $x$ fijo, en la ecuación (19), aplicamos

$$\exp\{-\xi\} \leq p!\, \xi^{-p}, \qquad \xi > 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

con $\xi = \dfrac{x^2}{4(t-\tau)}$, para obtener, eligiendo $p > m + n/2$,

$$\left|\frac{\partial^{m+n} K}{\partial x^m \partial t^n}(x, t-\tau)\right| \;\leq\; C_{m,n,p}(x)\, (t-\tau)^{\,p-m-n/2} \underset{\tau\uparrow t}{\longrightarrow} 0,$$

por lo que las derivadas parciales de $K$ quedan acotadas por constantes que dependen de $x, m, n$. En consecuencia, para que la convolución $w$ esté bien definida, basta que $g$ sea integrable y continua a trozos. Esto es, en el extremo $\tau = 0$, que $g$ crezca como $\tau^{-\alpha}$ para $0 < \alpha < 1$.

Usando la regla de Leibniz, se deduce que $w_t = w_{xx}$ para $x > 0$, $t > 0$, ya que $K_x$ satisface la ecuación del calor.

Además, para $x > 0$:

$$\lim_{t \downarrow 0} w(x,t) = 0, \tag{21}$$

Este límite es uniforme para $x \geq \delta > 0$. Aplicando (20) con $p = 2$, se obtiene

$$2\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)\right| \leq \frac{16\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\pi}\, x^3} \leq 16\pi^{-1/2}\delta^{-3}(t-\tau)^{1/2}. \tag{22}$$

Esto implica (por la integrabilidad y continuidad a trozos de $g$) que para algún $C > 0$

$$|w(x,t)| \leq Ct^{(3-2\alpha)/2}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{23}$$

lo que prueba la uniformidad del límite (21) en $x \geq \delta > 0$.

Ahora demostraremos que para $t > 0$:

$$\lim_{x \downarrow 0} w(x,t) = g(t), \tag{24}$$

cuando $t$ es un punto de continuidad de $g$. Consideramos:

$$g(t)W(x,t) = -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)g(t)d\tau, \tag{25}$$

y por linealidad,

$$\lim_{x \downarrow 0} g(t)W(x,t) = g(t). \tag{26}$$

Para demostrar (24), basta mostrar que:

$$\lim_{x \downarrow 0} -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)(g(\tau) - g(t))d\tau = 0. \tag{27}$$

Debido a $g$ es continua en $t$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|g(t) - g(\tau)| < \varepsilon/2 \qquad \text{para todo } |t-\tau| \leq \delta_\varepsilon.$$

Sea $J = -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)(g(\tau) - g(t))d\tau$. Dividimos a $J$ dos terminos

$$J_1 = -2\int_0^{t-\delta_\varepsilon} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)(g(\tau) - g(t))d\tau, \tag{28}$$

$$J_2 = -2\int_{t-\delta_\varepsilon}^{t} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)(g(\tau) - g(t))d\tau. \tag{29}$$

Para $J_2$, usando que $|g(\tau) - g(t)| < \varepsilon/2$ en ese intervalo,

$$|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30}$$

Para $J_1$ usamos una cota similar con $x$ pequeño

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Por tanto,

$$|J| < \varepsilon, \tag{32}$$

lo que prueba (24). Además, la convergencia en (24) es uniforme para $t$ en cualquier subconjunto compacto de un intervalo de continuidad de $g$; en particular, si $t$ recorre un subintervalo cerrado y acotado contenido en dicho intervalo, puede elegirse $\delta_\varepsilon$ independiente de $t$ por la continuidad uniforme local de $g$.

■

## 2. Problema de valor inicial con condición de borde Neumann

El problema de valor inicial con condición de frontera Neumann consiste en determinar una solución $u$ que satisfaga

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \\ \partial_x u(0,t) = g(t), \quad 0 < t \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \infty \end{cases} \tag{33}$$

donde $f$ y $g$ son funciones continuas. Como hicimos en la sección anterior, usamos la linealidad para reemplazar el problema por dos problemas separados. Definimos $u = v + w$, donde $v$ es solución de

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t, \\ v_x(0,t) = 0, \quad 0 < t, \\ v(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \infty, \end{cases}$$

y $w$ es solución de

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t, \\ w_x(0,t) = g(t), \quad 0 < t, \\ w(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

A continuación, para estudiar la solución del problema (33), enunciamos el siguiente teorema de existencia y unicidad. La demostración sigue un procedimiento análogo al de la sección anterior.

**Teorema 2 (Existencia y unicidad)** *Sea $g$ continua en $[0,\infty)$ y sea $f$ continua en $[0,\infty)$ con*

$$|f(x)| \leq C_1 \exp\{C_2 |x|^{1+\alpha}\}, \qquad 0 \leq \alpha < 1,$$

*donde $C_1, C_2 > 0$.*

Existencia. *Definamos, para $x > 0$, $t > 0$,*

$$u(x,t) = \int_0^\infty N(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi - 2\int_0^t K(x,t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau, \tag{34}$$

*con*

$$N(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) + K(x+\xi,t), \qquad t > 0,$$

*y $K$ el núcleo del calor. Entonces $u$ resuelve*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & x > 0,\ t > 0, \\ \partial_x u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0. \end{cases}$$

*Además, si $f(x) \sim C_1 \exp\{C_2 x^2\}$ cuando $x \to +\infty$, la construcción anterior define $u$ y satisface el problema únicamente para*

$$0 \leq t \leq (4C_2)^{-1}.$$

Unicidad. *La solución anterior es única dentro de la clase de soluciones $v$ que cumplen*

$$|v(x,t)| \leq C_1 \exp\{C_2 x^2\}, \qquad x > 0,\ t > 0.$$

## 3. Resultados de existencia y unicidad para un dominio acotado

En esta sección enunciamos algunos resultados clásicos sobre el problema del calor en dominios acotados, útiles para el estudio del problema de Stefan. Sus demostraciones pueden consultarse, por ejemplo, en [1, 4].

**Teorema 3** *Sean*

$$f \in C([0,1]), \qquad g, h : (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad \textit{continuas a trozos.}$$

*Defínase*

$$u(x,t) = \int_0^1 \big\{\theta(x-\xi,t) - \theta(x+\xi,t)\big\}\, f(\xi)\, d\xi \;-\; 2\int_0^t \frac{\partial\theta}{\partial x}\big(x, t-\tau\big)\, g(\tau)\, d\tau \;+\; 2\int_0^t \frac{\partial\theta}{\partial x}\big(x-1, t-\tau\big)\, h(\tau)\, d\tau,$$

*donde*

$$\theta(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(x+2m,t), \qquad K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\big(-x^2/4t\big).$$

*Entonces $u$ satisface el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ u(1,t) = h(t), & t > 0. \end{cases}$$

*y es la única solución acotada.*

**Teorema 4 (Flujo de calor prescrito en ambos extremos)** *Sea $f \in C([0,1])$ y sean $g, h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ piezas–continuas. Sea*

$$b_0 = \int_0^1 f(x)\, dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*Defínase*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp\{-n^2\pi^2 t\}\cos(n\pi x) \;-\; 2\int_0^t \theta\big(x, t-\tau\big)\, g(\tau)\, d\tau \;+\; 2\int_0^t \theta\big(x-1, t-\tau\big)\, h(\tau)\, d\tau,$$

*con la misma $\theta$ del Teorema 3. Entonces $u$ resuelve*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < 1, \\ \partial_x u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ \partial_x u(1,t) = h(t), & t > 0. \end{cases}$$

*y es la única solución.*

**Teorema 5 (Hopf)** *Sea $D_T = \{(x,t) \mid s_1(t) < x < s_2(t),\ 0 < t \le T\}$, donde $s_2(t)$ es Lipschitz inferior y $s_1(t)$ es Lipschitz superior. Sea $u$ una solución de la ecuación del calor en $D_T$ que es continua en $D_T \cup B_T$ y que no es idénticamente constante en cada $D_t$, $0 < t \le T$.*

*Si $u$ alcanza su valor máximo en $(s_2(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces*

$$\lim_{x \uparrow s_2(t_0)} \inf \frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0),t_0)}{x - s_2(t_0)} > 0. \tag{35}$$

*Si en este caso $\partial_x u$ existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces*

$$\partial_x u(s_2(t_0), t_0) > 0. \tag{36}$$

*Si $u$ alcanza su valor mínimo en $(s_2(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces*

$$\lim_{x \uparrow s_2(t_0)} \sup \frac{u(x,t_0) - u(s_2(t_0),t_0)}{x - s_2(t_0)} < 0. \tag{37}$$

*Si en este caso $\partial_x u$ existe en $(s_2(t_0), t_0)$, entonces*

$$\partial_x u(s_2(t_0), t_0) < 0. \tag{38}$$

*Si $u$ alcanza su valor máximo en $(s_1(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces*

$$\lim_{x \downarrow s_1(t_0)} \sup \frac{u(x,t_0) - u(s_1(t_0),t_0)}{x - s_1(t_0)} < 0. \tag{39}$$

*Si en este caso $\partial_x u$ existe en $(s_1(t_0), t_0)$, entonces*

$$\partial_x u(s_1(t_0), t_0) < 0. \tag{40}$$

*Si $u$ alcanza su valor mínimo en $(s_1(t_0), t_0)$, $t_0 > 0$, entonces*

$$\lim_{x \downarrow s_1(t_0)} \inf \frac{u(x,t_0) - u(s_1(t_0),t_0)}{x - s_1(t_0)} > 0. \tag{41}$$

*Si en este caso $\partial_x u$ existe en $(s_1(t_0), t_0)$, entonces*

$$\partial_x u(s_1(t_0), t_0) > 0. \tag{42}$$

Ahora para antes de presentar los dos últimos teorema de esta lección, nos conviene presentar algunas definiciones útiles que tienen que ver con la regularidad de funciones. Sea una función $\psi(t)$, se ha usado la norma:

$$\|\psi\|_T = \sup_{0 \le t \le T} |\psi(t)|, \tag{43}$$

y para funciones de variable espacial $x$:

$$\|\psi\|_{[a,b]} = \sup_{a \le x \le b} |\psi(x)|. \tag{44}$$

Con el objetivo de precisar mejor la regularidad de las funciones, se introducen ahora normas y seminormas que cuantifican el grado de continuidad de Hölder. Sea $I$ un intervalo. Se definen los espacios:

- $C^0(I)$: funciones continuas en $I$,
- $C^1(I)$: funciones continuamente derivables en $I$,
- $C^\beta(I)$: funciones Hölder continuas con exponente $\beta$ en $I$, para $0 < \beta \le 1$.

Notemos que $C^\beta(I)$ con $\beta = 1$ corresponde a las funciones Lipschitz continuas. El seminorma de Hölder se define como:

$$|\psi|_\beta = \sup_{t, t+\delta \in I,\, \delta > 0} \delta^{-\beta} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|. \tag{45}$$

Finalmente, para el intervalo $I = (0, C]$, con $C > 0$, se define el subespacio $C^0_{(\nu)}(I)$, $0 < \nu \le 1$, de funciones $\psi$ en $C(I)$ tales que

$$\|\psi\|_{C^{(\nu)}} = \sup_{t \in I} t^{1-\nu} |\psi(t)| < \infty. \tag{46}$$

Estos espacios serán fundamentales para enunciar y demostrar los teoremas de existencia en contextos más generales donde se requiera control sobre la regularidad de las soluciones o de las fronteras libres involucradas.

**Teorema 6** *Para el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & s_1(t) < x < s_2(t),\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = f(x), & a < x < b, \\ u\big(s_1(t), t\big) = g(t), & 0 < t \le T, \\ u\big(s_2(t), t\big) = h(t), & 0 < t \le T, \\ s_1(0) = a, \quad s_2(0) = b. \end{cases} \tag{47}$$

*donde $f \in C([a,b])$, $g \in C^0_{(\nu)}((0,T])$, $h \in C^0_{(\nu)}((0,T])$, $0 < \nu \le 1$, $s_i \in C^\gamma([0,T])$, $i = 1,2$, $\frac{1}{2} < \gamma \le 1$, y se satisfacen*

$$\delta = \inf_{0 \le t \le T} |s_1(t) - s_2(t)| > 0, \tag{48}$$

$$\Delta = \sup_{0 \le t \le T} |s_1(t) - s_2(t)| < \infty, \tag{49}$$

*entonces existe una solución $u$ que tiene la representación $f$ es una extensión con soporte compacto. La solución $u$ podría volverse no acotada en $x = a, b$ o $t = 0$, si $f$, $g$ o $h$ no son acotadas en esos puntos. Si $\nu = 1$ y $g$, $h$ son acotadas, entonces $u$ es la única solución acotada del problema (47).*

**Teorema 7** *Para la solución $w$ del problema*

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & 0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T, \\ w(x,0) = f(x), & 0 < x < b, \\ w(0,t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ w(s(t),t) = h(t), & 0 < t \leq T, \\ s(0) = b. \end{cases}$$

*donde $s \in C^{\gamma}([0,T])$, $\gamma > \frac{1}{2}$, $\delta_1 = \inf_{0 \leq t \leq T} s(t) > 0$, $g \in C^0_{(\nu)}((0,T])$, $0 < \nu \leq 1$, $h \in C^{\gamma_1}([0,T])$, $\gamma_1 > \frac{1}{2}$, $f \in C((0,b])$, $h(0) = f(b) = 0$, y*

$$|f(\xi)| = |f(\xi) - f(b)| \leq C_f |\xi - b|^{\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \tag{50}$$

*siendo $C_f$ una constante positiva, entonces existe el siguiente límite*

$$\lim_{x \uparrow s(t)} w_x(x,t) \tag{51}$$

*y además, $w_x(x,t)$ es bidimensionalmente continua en $x = s(t)$ para $0 < t \leq T$.*

**Corolario 1** *La condición $h(0) = f(b) = 0$ puede reemplazarse por $h(0) = f(b)$ y el Teorema 7 aún se cumple.*

## Referencias


[1] John Rozier Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Vol. 23. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 0-521-30243-9.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

[3] Fritz John. *Partial Differential Equations*. 4th. Vol. 1. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982. ISBN: 978-0387906096.

[4] A. M. Meirmanov. *The Stefan Problem*. Vol. 3. De Gruyter Expositions in Mathematics. Translated from Russian by Marek Niezgódka and Anna Crowley. Reprint 2011: eBook ISBN 978-3-11-084672-0. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. ISBN: 978-3-11-011479-9. DOI: 10.1515/9783110846720.