Lección n°3: Problema de Stefan unidimensional

Este documento da continuidad a las Lecciones 1 y 2, donde se reunieron resultados que nos ayudan a abordar el estudio del problema de Stefan: propiedades de la ecuación del calor, principio de máximo, y criterios de existencia y unicidad en 1D. Con ese trasfondo, la Lección 3 se centra en la formulación unidimensional del problema de Stefan (frontera libre), presentando resultados de dependencia monótona, unicidad y existencia. Para los enunciados sin demostración y para un desarrollo pormenorizado de las pruebas incluidas, véase [1].

1. Problema de Stefan unidimensional unifásico

El problema de Stefan de una sola fase es un ejemplo elemental de frontera libre para la ecuación del calor. Desde el punto de vista físico, imaginemos un semiplano ocupado por hielo a 0°C en contacto con una franja infinita de agua. Despreciando la circulación del líquido, nos preguntamos: dadas la temperatura del agua (inicial y en la frontera) y la posición inicial de la interfaz, ¿puede determinarse la evolución temporal de la frontera hielo–agua?

Para describir el problema de forma precisa, tomemos como origen $x = 0$ la cara delgada del extremo conocido de la franja de agua, y orientemos el eje x perpendicular a ella, apuntando hacia el hielo. Así, el dominio de la temperatura del agua durante el intervalo de tiempo $0 < t \leq T$ viene dado por

$$D_T \;=\; \big\{(x,t) \mid 0 < x < s(t),\; 0 < t \leq T\big\},$$

donde T es una constante positiva fija y $x = s(t)$ denota la posición de la interfaz hielo–agua en el instante t, medida respecto a la cara conocida del agua en $x = 0$. Ignorando la circulación en el agua, y especificando las condiciones iniciales y de contorno para la temperatura, así como la posición inicial de la interfaz, se obtiene entonces el problema de Stefan en fase única:

$$\partial_t u = k\,\partial_{xx} u, \qquad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = f(t) \geq 0, \qquad 0 < t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq b = s(0), \tag{3}$$

$$u\big(s(t),t\big) = 0, \qquad 0 < t \leq T, \tag{4}$$

donde

- u es la temperatura del agua,
- $k > 0$ es la conductividad térmica del agua,
- s es la posición de la interfaz hielo–agua en el tiempo t,
- f es la temperatura impuesta en $x = 0$, y
- φ es la temperatura inicial en $0 \leq x \leq b$.

Para determinar de forma simultánea y única la temperatura u y la posición de la interfaz $s(t)$, hace falta una condición extra que relacione el movimiento de la frontera con el flujo de calor. Como el hielo se mantiene a 0°C, toda la energía que alcanza la interfaz se emplea en la fusión. Aplicando la ley de Fourier al flujo térmico y equiparando el flujo entrante con la tasa de fusión, se obtiene la condición de Stefan

$$\alpha\,\dot{s}(t) \;=\; -\,k\,\partial_x u\big(s(t),t\big), \qquad 0 < t \leq T,$$

donde $\dot{s}(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$,

$$\alpha = \rho\,\ell \quad \text{(densidad del hielo por calor latente de fusión)}, \qquad k: \quad \text{conductividad térmica del agua.}$$

En lo sucesivo, y sin pérdida de generalidad, escalaremos x, t y u de modo que

$$\alpha = 1, \quad k = 1,$$

dejando el problema en su forma adimensional más sencilla, por lo que estudiaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & 0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = f(t) \geq 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq b = s(0), \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{s}(t) = -\,\partial_x u\big(s(t),t\big), \qquad 0 < t \leq T. \tag{6}$$

Ahora, antes de comenzar a mostrar algunos resultados, consideremos dos definiciones que nos permitirán establecer la validez de una solución.

Definición 1 *Sea $s = s(t)$ una función continua conocida con $s(0) = b > 0$. Decimos que una función*

$$u = u(x,t)$$

es solución de (5) *en el dominio*

$$D_T \ \cup \ B_T,$$

donde

$$D_T = \big\{(x,t) \mid 0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T\big\}, \tag{7}$$

$$B_T = \{(0,t) \mid \ 0 < t \leq T\} \ \cup \ \{(x,t) \mid x = s(t),\ 0 < t \leq T\} \ \cup \ \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq b\}, \quad b = s(0), \tag{8}$$

si cumple las siguientes propiedades:

1. *$\partial_t u$ y $\partial_{xx} u$ existen y*

$$\partial_t u,\ \partial_{xx} u \in C(D_T).$$

2. *u satisface las ecuaciones y condiciones de las ecuaciones (5):*

$$\begin{cases} \partial_t u = \ \partial_{xx} u, & 0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq b, \\ u\big(s(t),t\big) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases}$$

3. *$u \in C\big(D_T \cup B_T\big)$ salvo en posibles puntos de discontinuidad de f o φ.*

4. *u está acotada en D_T. En particular, en cada punto de discontinuidad de f o φ se verifica*

$$0 \ \leq \ \liminf u \ \leq \ \limsup u \ < \ \infty.$$

Definición 2 *Un par de funciones*

$$\big(s(t),\ u(x,t)\big)$$

es solución del problema de Stefan (5)-(6) *si se cumplen:*

1. *$s(0) = b, \quad s(t) > 0$ para $0 < t \leq T$.*

2.

$$s \in C^1\big((0,T]\big) \ \cap \ C^0\big([0,T]\big).$$

3. *Para ese s, la función u es solución de (5) en el sentido de la Definición 1*

4. *La derivada espacial $\partial_x u\big(s(t),t\big)$ existe y es continua para $0 < t \leq T$.*

5. *s y u satisfacen la condición de Stefan (6):*

$$\alpha\, \dot{s}(t) = -\, k\, \partial_x u\big(s(t), t\big), \quad 0 < t \leq T.$$

Nuestro primer resultados es una consecuencia del Teorema de Green.

Lema 1 *Equivalencia de la condición Stefan*
La condición

$$\dot{s}(t) = -\partial_x u(s(t), t) \tag{9}$$

puede ser reemplazada por la condición equivalente

$$s(t)^2 = b^2 + 2\int_0^t f(\tau)\, d\tau + 2\int_0^b \xi\varphi(\xi)\, d\xi - 2\int_0^{s(t)} \xi u(\xi, t)\, d\xi. \tag{10}$$

Demostración. Consideramos el operador $\mathscr{L}(u) = 0$ (donde $\mathscr{L}(u) = \partial_t u - \partial_{xx} u$), y tomamos $v = -x$ para aplicar la identidad de Green:

$$\int_D \{v\mathscr{L}(u) - uMv\}\, dx\, dt = \oint_{\partial D} \{(v\partial_x u - uv_x)\, dt + uv\, dx\}\,, \tag{11}$$

donde $Mv = v_{xx} + v_t$. Al sustituir $v = -x$, se obtiene la identidad:

$$\oint_{\partial D} \{(u - x\partial_x u)\, dt - xu\, dx\} = 0. \tag{12}$$

Sea (s, u) una solución del sistema dado por las ecuaciones (5)-(6). Aplicamos la identidad (12) al dominio

$$D = D_T \cap \{(\xi, \tau) \mid 0 < \epsilon \leq \tau \leq t\}\,,$$

con $t \leq T$ y haciendo tender $\epsilon \to 0$, se obtiene la ecuación (10).

Por otro lado, si (s, u) satisface las ecuaciones (5) y (10), y si $\partial_x u$ existe y es continuo en la frontera $x = s(t)$, entonces, a partir de (10) y la identidad (12), se deduce que:

$$s(t)^2 = b^2 - 2\int_0^t s(\tau)\partial_x u(s(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Diferenciando la ecuación (13) con respecto a t, se obtiene que se satisface la condición original (9), lo que completa la demostración. □

Observación 1 *La equivalencia del Lema se estableció suponiendo que $\partial_x u$ existe y es continua en la frontera $x = s(t)$. Por el Teorema 7 de la Lección 2, si u resuelve (5)-(6) y s es Hölder continua con exponente $> \frac{1}{2}$, entonces $\partial_x u$ existe y es continua sobre dicha frontera. A continuación construiremos soluciones de (5)-(6) para funciones s Lipschitz continuas. En virtud del Teorema 7, esto garantiza la validez de la equivalencia afirmada en el Lema.*

1.1. Dependencia monótona de los datos y unicidad de la solución

A partir del Lema 1, podemos emplear indistintamente (9) o (10) para analizar las soluciones del problema de Stefan (5)-(6). En particular, la dependencia monótona con respecto a los datos suele requerir el uso conjunto de ambas formulaciones. En esta sección supondremos la existencia de soluciones para el problema de Stefan.

Lema 2 *Sean (s_1, u_1) y (s_2, u_2) soluciones del problema de Stefan (5)-(6) correspondientes a los datos (b_1, φ_1, f_1) y (b_2, φ_2, f_2) respectivamente. Si $b_1 < b_2$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $s_1 < s_2$.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $t_0 > 0$ el primer instante tal que $s_1(t) = s_2(t)$. Entonces, $\dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0)$. Por el principio del máximo fuerte (Teorema 9, Lección 1), se concluye que $u_2(s_1(t), t) > 0$ para $0 < t < t_0$. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $\varphi_2 \not\equiv 0$ o $f_2 \not\equiv 0$, lo cual implica $u_2 - u_1 > 0$ en $0 < x < s_1(t)$, $0 < t < t_0$. Como ambas funciones se anulan en el punto de frontera libre $x = s_1(t_0)$, se deduce por el Teorema de Hopf (véase Teorema 5, Lección 2) que:

$$\dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) = u_{2x}(s_1(t_0), t_0) - u_{1x}(s_1(t_0), t_0) < 0,$$

lo cual es una contradicción. □

Este uso de la condición de Stefan (9) permite establecer un resultado parcial de monotonía. Combinándolo ahora con (10), se obtiene el siguiente resultado general

Teorema 1 (Monotonía) *Sean (s_1, u_1) y (s_2, u_2) soluciones del problema de Stefan (5)-(6) con datos (b_1, φ_1, f_1) y (b_2, φ_2, f_2) respectivamente. Si $b_1 \leq b_2$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$ y $f_1 \leq f_2$, entonces $s_1 \leq s_2$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ y sea (s_2^δ, u_2^δ) una solución del problema de Stefan con datos modificados $(b_2+\delta, \varphi_2, f_2)$, donde se extiende φ_2 como cero fuera de $0 \leq x \leq b_2$. Por el Lema 2, se concluye que $s_1 < s_2^\delta$. Restando las formulaciones integrales correspondientes (10) se obtiene:

$$(s_2^\delta(t))^2 - (s_2(t))^2 = (b_2 + \delta)^2 - b_2^2 \tag{14}$$

$$- 2\int_0^{s_2(t)} \xi\big(u_2^\delta(\xi, t) - u_2(\xi, t)\big)d\xi - 2\int_{s_2(t)}^{s_2^\delta(t)} \xi u_2^\delta(\xi, t)d\xi. \tag{15}$$

Por el principio del máximo, $u_2^\delta \geq 0$ y $u_2^\delta - u_2 \geq 0$, por lo tanto

$$(s_2^\delta(t))^2 \leq (s_2(t))^2 + (b_2 + \delta)^2 - b_2^2. \tag{16}$$

Esto implica que

$$(s_1(t))^2 < (s_2(t))^2 + (b_2 + \delta)^2 - b_2^2. \tag{17}$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario, se concluye que $s_1(t) \leq s_2(t)$. □

Teorema 2 (Unicidad) *Puede existir a lo sumo una solución al problema de Stefan (5)-(6) .*

Demostración. Sean (s_1, u_1) y (s_2, u_2) soluciones con los mismos datos (b, φ, f). Por el Teorema 1, se tiene que $s_1 \leq s_2$ y $s_2 \leq s_1$, de donde se concluye $s_1 \equiv s_2$. Por el Teorema de Unicidad (Teorema 8, Lección 1), se deduce $u_1 \equiv u_2$. □

Lema 3 *La frontera libre $s(t)$ es una función creciente.*

Demostración. Dado que $\varphi \geq 0$ y $f \geq 0$, por el principio del máximo se concluye $u \geq 0$. Si $u \equiv 0$, entonces $\partial_x u \equiv 0$ y $\dot{s} \equiv 0$. Si $u > 0$, el Teorema de Hopf (Lección 2) implica que $\partial_x u(s(t), t) < 0$, y por lo tanto $\dot{s}(t) > 0$. En cualquier caso, se concluye que $\dot{s}(t) \geq 0$, es decir, s es creciente. □

Observación 2 *Si $\varphi \not\equiv 0$ o $f \not\equiv 0$ en cada vecindad de $t = 0$, entonces el principio del máximo fuerte implica que $\dot{s}(t) > 0$, es decir, s es estrictamente creciente.*

Observación 3 *Estos resultados concuerdan con la realidad física. La monotonía expresa que el hielo se derrite más rápido si se aumenta la temperatura inicial o en la frontera. Por ejemplo, un cubo de hielo lanzado al agua hirviendo desaparece más rápido que uno en agua fría. El hecho de que $s(t)$ sea creciente significa que el hielo a 0°C no puede congelar el agua, sólo derretirse.*

1.2. Existencia

Para la demostración de la existencia de soluciones, procederemos por etapas, relajando gradualmente las hipótesis sobre los datos

Caso 1. Comenzamos el estudio de existencia con el caso especial importante en que $b = 0$, $\varphi \equiv 0$ y $f \equiv \lambda > 0$.

Es fácil verificar que la función

$$v(x,t) = \int_0^{x/(2t^{1/2})} \exp\{-\rho^2\}\, d\rho \tag{18}$$

satisface la ecuación del calor. Por diferenciación, se obtiene:

$$v_x(x,t) = 2^{-1}t^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}. \tag{19}$$

Dada una constante positiva c, asumimos

$$s(t) = ct^{1/2}, \tag{20}$$

y por tanto

$$\dot{s}(t) = 2^{-1}ct^{-1/2}. \tag{21}$$

Se observa entonces que

$$v_x(s(t),t) = 2^{-1}t^{-1/2} \exp\left\{-\frac{c^2}{4}\right\}, \tag{22}$$

lo que implica

$$c \exp\left\{\frac{c^2}{4}\right\} v_x(s(t),t) = \dot{s}(t). \tag{23}$$

Consideramos ahora la función

$$u(x,t) = \Lambda - c \exp\left\{\frac{c^2}{4}\right\} v(x,t), \tag{24}$$

donde Λ es una constante positiva dada por

$$\Lambda = c \exp\left\{\frac{c^2}{4}\right\} \int_0^{c/2} \exp\{-\rho^2\}\, d\rho. \tag{25}$$

Entonces u satisface la ecuación del calor en $0 < x < ct^{1/2}$, $0 < t$, con $u(0,t) \equiv \Lambda$ para $0 < t$, $u(ct^{1/2},t) = 0$ y $-\partial_x u(ct^{1/2},t) = 2^{-1}ct^{-1/2}$. Además, u está acotada.

La función $\Lambda = \Lambda(c)$ definida en (25) es continua, estrictamente creciente y satisface $\Lambda(0) = 0$ y $\lim_{c\to\infty} \Lambda(c) = \infty$, por lo que existe un único valor $c = c(\lambda)$ tal que $\Lambda(c(\lambda)) = \lambda$. Definiendo

$$u^\lambda(x,t) = \lambda - c(\lambda) \exp\left\{\frac{(c(\lambda))^2}{4}\right\} v(x,t), \tag{26}$$

se concluye que $(c(\lambda)t^{1/2}, u^\lambda)$ es la solución única del problema de Stefan (5)-(6) para los datos $b = 0$, $\varphi \equiv 0$, $f \equiv \lambda > 0$. Con lo que hemos demostrado el siguiente lema

Lema 4 *Para los datos $b = 0$, $\varphi \equiv 0$ y $f \equiv \lambda$, donde $\lambda > 0$, existe una constante positiva única $c = c(\lambda)$ tal que el par*

$$s(t) = c(\lambda)t^{1/2}, \quad 0 < t, \tag{27}$$

y

$$u^\lambda(x,t) = \lambda - c(\lambda) \exp\left\{\frac{(c(\lambda))^2}{4}\right\} v(x,t), \tag{28}$$

donde

$$v(x,t) = \int_0^{x/(2t^{1/2})} \exp\{-\rho^2\}\, d\rho, \tag{29}$$

es la solución única del problema de Stefan (5)-(6).

Caso 2. Para la etapa siguiente consideraremos el caso $b > 0$ y funciones φ, f no negativas, continuas a trozos, que cumplen

$$0 \le \varphi(x) \le N(b-x) \qquad \text{para } x \in [0,b].$$

En lo que sigue nos referiremos a estos supuestos como Hipótesis A. Bajo ellas puede establecerse una estimación a priori para $\partial_x u\big(s(t),t\big)$; para ello enunciamos el siguiente lema.

Lema 5 *Bajo la Hipótesis A, sea u la solución de* (17,1,1) *para una frontera no decreciente s. Entonces existe una constante positiva C, que depende de b, de*

$$M := \text{máx}\Big(\max_{0\le t\le T} f(t),\ \max_{0\le x\le b} \varphi(x)\Big),$$

y de la constante de Lipschitz N de la Hipótesis A, tal que

$$0 \ \le\ \rho^{-1}\, u\big(s(t)-\rho,\, t\big) \ \le\ C \tag{30}$$

para todo $0 \le t \le T$ y $0 < \rho < b$.

Demostración. Como $f, \varphi \ge 0$, el principio del máximo implica $u \ge 0$. Fijamos

$$C := \text{máx}\{Mb^{-1},\, N\} \tag{31}$$

y, para cada $t_0 \in [0,T]$, definimos

$$w(x) := C\big(s(t_0) - x\big).$$

Se tiene $\partial_{xx} w = \partial_t w$ y, además,

$$w(0) = Cs(t_0) \ge Cb \ge M \ge f, \qquad w(x) \ge C(b-x) \ge N(b-x) \ge \varphi(x),$$

y para $0 \le t \le t_0$,

$$w\big(s(t)\big) = C\big(s(t_0) - s(t)\big) \ge 0.$$

Por el Principio del Máximo, $u(x,t) \le w(x)$ en $0 \le x \le s(t)$, $0 \le t \le t_0$. En particular, para $\rho > 0$,

$$0 \le \rho^{-1} u\big(s(t_0)-\rho,\, t_0\big) \le \rho^{-1} w\big(s(t_0)-\rho\big) = \rho^{-1} C\rho = C,$$

para todo $t_0 \in [0,T]$. ■

Observación 4 *El lema anterior acota $\partial_x u\big(s(t_0),t_0\big)$ (si existe)*

$$-C \le \partial_x u\big(s(t_0),t_0\big) \le 0.$$

Antes de demostrar la existencia de solucion bajo la Hipótesis A, hemos primero de construir para cada $\tau, 0 < \tau < b$ una familia de aproximaciones (s^τ, u^τ) a la solucion de (5)-(6) por medio de un desfase temporal in la condición de Stefan (6).

Comenzamos entonces a construir a la familia de soluciones a partir, para ello introducimos

$$\chi^\tau(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le b-\tau, \\ 0, & b-\tau < x \le b, \end{cases} \qquad \varphi^\tau := \chi^\tau \varphi.$$

Primer intervalo $0 \le t \le \tau$. Ponemos $s^\tau(t) \equiv b$ y definimos u^τ como la solución única de (5) en $0 \le x \le s^\tau(t)$, $0 \le t \le \tau$, con dato inicial φ^τ. Entonces $u^\tau_x(b,t)$ existe y es continua para $0 \le t \le \tau$ y, por el Lema 5,

$$-C \ \le\ u^\tau_x(b,t) \ \le\ 0, \qquad 0 \le t \le \tau. \tag{32}$$

Paso inductivo. Suponemos construidos $\big(s^\tau, u^\tau\big)$ en $0 \le t \le n\tau$ con $s^\tau \in C^1$, $u^\tau_x\big(s^\tau(t),t\big)$ existente y continuo, y

$$-C \ \le\ u^\tau_x\big(s^\tau(t),t\big) \ \le\ 0, \qquad 0 \le t \le n\tau. \tag{33}$$

Para $t \geq \tau$ hacemos

$$s^\tau(t) = b - \int_\tau^t u_x^\tau\big(s^\tau(\eta-\tau),\, \eta-\tau\big)\, d\eta. \tag{34}$$

Siguiente intervalo $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$. Definimos s^τ por (34) y resolvemos (5) para $u^\tau(x,t)$ en $0 \leq x \leq s^\tau(t)$, $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$. Por la hipótesis inductiva sobre u_x^τ, se obtiene $s^\tau \in C^1$ con $0 \leq \dot{s}^\tau(t) \leq C$. En consecuencia, por (30) del Lema 5 y el Teorema 7 (Lección 2), $u_x^\tau\big(s^\tau(t),t\big)$ existe y es continua en $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, y de nuevo por el Lema 5 se tiene

$$-C \leq u_x^\tau\big(s^\tau(t),t\big) \leq 0 \qquad \text{en } [n\tau,(n+1)\tau].$$

Esto cierra el paso de inducción.

Por tanto, la aproximación $\big(s^\tau, u^\tau\big)$ queda construida para todo $0 < t \leq T$.

Luego usando esta familia de aproximaciones (s^τ, u^τ), se tiene el siguiente resultado de existencia.

Lema 6 *Bajo la Hipótesis A, el problema de Stefan (5)-(6) admite una solución única (s,u). Además, la frontera libre s es no decreciente, pertenece a C^1 y verifica*

$$0 \leq \dot{s}(t) \leq C \qquad (0 \leq t \leq T), \tag{35}$$

donde C es la constante definida en (31) (dependiente de los parámetros del Lema 5).

Bosquejo de la demostración. Para cada $\tau \in (0,b)$ considérese la aproximación (s^τ, u^τ) construida antes. Por el Lema 5,

$$0 \leq \dot{s}^\tau(t) \leq C, \qquad b \leq s^\tau(t) \leq b + Ct.$$

Las funciones s^τ son equicontinuas y uniformemente acotadas; por el teorema de Ascoli–Arzelà existe una subsucesión s^{τ_i} que converge uniformemente en $[0,T]$ a una función s no decreciente y Lipschitz. Para este s, sea u la solución de (5) .

Dado $\varepsilon > 0$, elija τ_i tan pequeño que

$$|s^{\tau_i}(t) - s(t)| \leq C^{-1}\varepsilon \quad (0 \leq t \leq T), \tag{36}$$

y, usando la Hipótesis A para $\varphi^{\tau_i} = \chi^{\tau_i}\varphi$,

$$|\varphi^{\tau_i}(x) - \varphi(x)| \leq N\tau_i \leq \varepsilon \quad (0 \leq x \leq b). \tag{37}$$

Extendiendo u^{τ_i} y u por cero fuera de sus dominios y aplicando el principio del máximo junto con la desigualdad (30) a la diferencia $u^{\tau_i} - u$, de (36)–(37) se obtiene

$$|u^{\tau_i}(x,t) - u(x,t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq x \leq \text{máx}\{s^{\tau_i}(t), s(t)\},\ 0 \leq t \leq T. \tag{38}$$

Por tanto $u^{\tau_i} \to u$ uniformemente y, al pasar al límite en la ecuación con retardo que define s^τ, resulta $s \in C^1$ y (35). ■

Referencias

[1] John Rozier Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Vol. 23. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 0-521-30243-9.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

[3] Fritz John. *Partial Differential Equations*. 4th. Vol. 1. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982. ISBN: 978-0387906096.