Lección n°4: Problema de Stefan (continuación)

Consideremos el problema de Stefan de la lección anterior

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & 0 < x < s(t),\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) = f(t) \ge 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x) \ge 0, & 0 \le x \le b = s(0), \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t \le T. \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{s}(t) = -\,\partial_x u\big(s(t),t\big), \qquad 0 < t \le T. \tag{2}$$

En continuidad con la lección anterior, proseguimos el estudio de la existencia y unicidad de solución del problema (1)–(2). Para los enunciados sin demostración y un tratamiento detallado de las pruebas, véase [1]. Con este marco, estudiamos la existencia de soluciones en el caso siguiente.

Caso 3. Consideremos nuevamente $b = 0$, sin dato inicial φ, y una función f no negativa, continua a trozos y continua en $t = 0$, con $f(0) \ge 0$. A estos supuestos nos referiremos como *Hipótesis B*. Luego para une estudio bajo dicha hipótesis se tiene el siguiente Lema.

Lema 1 *(Bajo la Hipótesis B) El problema de Stefan* (1)-(2) *admite una solución única* (s,u).

Demostración. Bajo la Hipótesis B, existen $\eta > 0$ y constantes $0 < \lambda \le \Lambda$ tales que

$$0 < \lambda \le f(t) \le \Lambda, \qquad 0 \le t \le \eta. \tag{3}$$

Nos centraremos primero en el intervalo $0 \le t \le \eta$; luego, mediante el Lema 6 (Lección 3), extenderemos la solución al tramo $\eta \le t \le T$.

Para cada $b > 0$, sea (s^b, u^b) la solución de (1)–(2) con datos $(b, \varphi \equiv 0, f)$. Por el Teorema de monotonía (Teorema 1, Lección 3) y el Lema de existencia para el Caso 1 (Lema 4, Lección 3), aplicados bajo las cotas (3), existen constantes $c(\lambda), c(\Lambda) > 0$ tales que

$$c(\lambda)\, t^{1/2} \ \le\ s^b(t) \ \le\ b + c(\Lambda)\, t^{1/2}, \qquad 0 \le t \le \eta. \tag{4}$$

Del principio del máximo se sigue además $0 \le u^b \le \Lambda$ en $0 \le t \le \eta$.

Luego, usando (4), buscamos cotas uniformes para $\dot{s}^b$. Para cada $t_0 \in (0,\eta]$, definimos el super–solución lineal

$$w(x) := \Lambda\, c(\Lambda)^{-1}\, t_0^{-1/2}\, \big(s^b(t_0) - x\big).$$

Entonces $\partial_{xx} w = \partial_t w$, $w \ge u^b$ en $0 \le x \le s^b(t_0)$, $0 \le t \le t_0$, y $w(s^b(t_0), t_0) = u^b(s^b(t_0), t_0) = 0$. Aplicando el principio del máximo como en el Lema 5 (Lección 3), obtenemos

$$-\Lambda\, c(\Lambda)^{-1} t_0^{-1/2} \ \le\ u_x^b\big(s^b(t_0), t_0\big) \ \le\ 0.$$

Usando la condición de Stefan, $\dot{s}^b(t) = -u_x^b\big(s^b(t), t\big)$, concluimos

$$0 \le \dot{s}^b(t) \le \Lambda\, c(\Lambda)^{-1}\, t^{-1/2}, \qquad 0 < t \le \eta. \tag{5}$$

En particular, las funciones s^b son no decrecientes, uniformemente acotadas (4) y equicontinuas en $[0,\eta]$.

Sea $\sigma^b(t) := t\, s^b(t)$. De (4) y (5) se deduce que $\{\sigma^b\}$ es acotada y equicontinua en $[0,\eta]$. Por el teorema de Ascoli–Arzelà, existe una subsucesión σ^{b_n} que converge uniformemente a una función Lipschitz no decreciente σ. Definiendo

$$s(t) := t^{-1}\sigma(t),$$

y pasando al límite en (4) obtenemos

$$c(\lambda)\, t^{1/2} \le s(t) \le c(\Lambda)\, t^{1/2}, \qquad 0 \le t \le \eta. \tag{6}$$

En particular, s es continua y no decreciente.

Sea u la solución acotada de (1) asociada al s del paso anterior (existencia por el Teorema 16.3.1 junto con el Lema 16.4.4 del libro [1]). Tomando $b_n \downarrow 0$, de (5) y de la continuidad de f en 0 se obtiene, para n grande,

$$|s^{b_n}(t) - s(t)| \le C^{-1}\varepsilon, \qquad |\,\chi^{b_n}\varphi - \varphi\,| \le N b_n \le \varepsilon,$$

donde χ^b es la función indicadora de $[0, b]$. Extendiendo u^{b_n} y u por cero fuera de sus dominios y aplicando el Principio del Máximo y el Lema 5 (Lección 3) a la diferencia $u^{b_n} - u$, se deduce que, para n suficientemente grande,

$$\left|u^{b_n}(x,t) - u(x,t)\right| \le \varepsilon \quad \text{en } 0 \le x \le \text{máx}\{s^{b_n}(t), s(t)\},\ 0 \le t \le \eta. \tag{7}$$

Por tanto $u^{b_n} \to u$ uniformemente en los dominios pertinentes.

Ahora verificamos la condición de Stefan, para ello, La identidad integral de Stefan (Lema 1, Lección 3) para (s^{b_n}, u^{b_n}) y la convergencia (7) implican, al pasar al límite $n \to \infty$, que (s, u) satisface dicha identidad integral. En particular, por el Teorema 7 (Lección 2) se sigue que $\partial_x u(s(t), t)$ existe y es continua, y por el Lema 1 (Lección 3), (s, u) resuelve (1)-(2) en $[0, \eta]$.

Con respecto a la Extensión a $0 \le t \le T$. Tomando como nuevos datos en (1)-(2) los valores en $t = \eta/2$, el Lema 6 (Lección 3) proporciona una extensión a $[\eta/2, \eta]$. Iterando sobre los intervalos $[2^{-k}\eta, 2^{-k+1}\eta]$ y usando la unicidad (Teorema 2, Lección 3) para pegar las soluciones, obtenemos una solución en todo $[0, T]$. Asimismo, si $(\tilde{s}, \tilde{u})$ es otra solución bajo Hipótesis B, el Teorema de 2 (Lección 3) aplica con la condición de crecimiento estándar, de donde $(\tilde{s}, \tilde{u}) = (s, u)$. ■

Con los lemas anteriores obtenemos el siguiente teorema de existencia para el problema de Stefan (1)–(2).

Teorema 1 *Si f y φ son funciones no negativas y por tramos continuas tales que, cuando $b > 0$, o bien $\varphi \not\equiv 0$ o $f \not\equiv 0$ en $0 \le t < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, o, cuando $b = 0$ y φ es irrelevante, $f \not\equiv 0$ en $0 \le t < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces existe una solución única (s, u) al problema de Stefan (1)–(2).*

1. Comportamiento asintótico de la frontera libre cuando $t \to \infty$

En esta sección presentamos resultados sobre el comportamiento asintótico de la frontera libre $s(t)$ cuando el tiempo t tiende a infinito. Dado que, siempre que la solución pueda prolongarse más allá de un tiempo final T, también se extiende la trayectoria de la frontera, resulta natural estudiar su evolución a largo plazo y describir tasas de crecimiento y límites (cuando existan) de $s(t)$.

Teorema 2 *Sea (s, u) solución del problema de Stefan (1)-(2) con datos (b, φ, f). Entonces:*

(i) Si $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\, dt = +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{t\to\infty} s(t) = +\infty$.

(ii) Si $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\, dt < \infty$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \ell^{1/2}, \qquad \textit{donde } \ell := b^2 + 2\int_0^b \xi\, \varphi(\xi)\, d\xi + 2\int_0^\infty f(\tau)\, d\tau.$$

Demostración. Usamos la identidad integral de Stefan (Lema 1, Lección 3)

$$s(t)^2 = b^2 + 2\int_0^b \xi\, \varphi(\xi)\, d\xi + 2\int_0^t f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi, t)\, d\xi. \tag{8}$$

Como $u \ge 0$, el último término es no positivo.

(i) Caso $\int_0^\infty f = +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el truncado

$$f_n(t) := \begin{cases} f(t), & 0 < t \le n, \\ 0, & t > n. \end{cases}$$

Sea (s_n, u_n) la solución correspondiente. Por el Teorema de Monotonía (Lección 3) se tiene $f_n \le f \Rightarrow s_n(t) \le s(t)$ para todo t. Del paso (ii) que probaremos enseguida (aplicado a f_n con soporte compacto) obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} s_n(t) = \ell_n^{1/2}, \qquad \ell_n := b^2 + 2\int_0^b \xi\,\varphi(\xi)\,d\xi + 2\int_0^n f(\tau)\,d\tau.$$

Como $\int_0^\infty f = +\infty$, se tiene $\ell_n \to +\infty$. Dado $M > 0$, escojemos n con $\ell_n^{1/2} > M$; entonces existe t_n tal que $s_n(t) > M$ para todo $t \ge t_n$. Como $s \ge s_n$, resulta $s(t) > M$ para $t \ge t_n$. Como M es arbitrario, $\lim_{t\to\infty} s(t) = +\infty$.

(ii) Caso $\int_0^\infty f < \infty$. Definimos

$$\ell := b^2 + 2\int_0^b \xi\,\varphi(\xi)\,d\xi + 2\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau < \infty.$$

Cota superior. De (8) y $u \ge 0$ se obtiene

$$s(t)^2 \le \ell \qquad \Rightarrow \qquad s(t) \le \ell^{1/2} \quad \text{para todo } t \ge 0.$$

Primero tratamos el caso en que f tiene soporte compacto: existe t_0 con $f \equiv 0$ en $[t_0, \infty)$. Considérese el problema lineal en el intervalo fijo $0 < x < \ell^{1/2}$:

$$\partial_{xx} w = \partial_t w, \quad w(0,t) = f(t), \quad w(x,0) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x \le b, \\ 0, & b < x \le \ell^{1/2}, \end{cases} \qquad w(\ell^{1/2}, t) = 0.$$

Por el principio del máximo se tiene $0 \le u \le w$ en el dominio considerado. En un dominio acotado, con dato de contorno homogéneo en $x = \ell^{1/2}$ y forzamiento nulo para $t \ge t_0$, la representación espectral de w (véase, por ejemplo, el Cap. 6 de [1]) muestra decaimiento exponencial en t

$$\|w(\cdot,t)\|_\infty = O(\exp\{-\alpha t\}) \quad (t \to \infty), \qquad \alpha = \alpha(\ell) > 0.$$

En particular, $w(\cdot,t) \to 0$ uniformemente, y por ende $u(\cdot,t) \to 0$ uniformemente cuando $t \to \infty$. De aquí,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi = 0. \tag{9}$$

Tomando límite $t \to \infty$ en (8) y usando (9) se concluye

$$\lim_{t\to\infty} s(t)^2 = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} s(t) = \ell^{1/2}.$$

Para un f cualquiera con $\int_0^\infty f < \infty$, definimos los truncados f_n como antes. Sea s_n la frontera libre correspondiente y ℓ_n el valor de ℓ con f reemplazado por f_n. Por el Teorema de Monotonía,

$$s_n(t) \le s(t) \le \ell^{1/2} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} s_n(t) = \ell_n^{1/2}.$$

Como $\ell_n \to \ell$, se obtiene

$$\ell^{1/2} = \lim_{n\to\infty} \ell_n^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} s_n(t) \le \liminf_{t\to\infty} s(t) \le \limsup_{t\to\infty} s(t) \le \ell^{1/2},$$

y, por tanto, $\lim_{t\to\infty} s(t) = \ell^{1/2}$. ■

EL siguiente resultado muestra que cuando $\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$, el comportamiento de la frontera en $t = \infty$ depende únicamente del dato f.

Teorema 3 *Para $\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$, sea (s,u) la solución del problema de Stefan (1)–(2) y sea (σ, v) la solución de*

$$\begin{cases} \partial_{xx} v = \partial_t v, & 0 < x < \sigma(t), \quad t_0 < t < \infty, \\ v(0,t) = f(t), & t_0 < t < \infty, \\ v(\sigma(t),t) = 0, & t_0 < t < \infty, \\ \dot\sigma(t) = -\,v_x(\sigma(t),t), & t_0 < t < \infty, \\ \sigma(t_0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Entonces, cuando $t \to \infty$,

$$\frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right), \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1. \tag{12}$$

Demostración. Del Teorema de Monotonía (Teorema 1, Lección 3) aplicado con los mismos datos en $x = 0$ y con $\sigma(t_0) = 0 \le s(t_0)$, se obtiene

$$0 \le \sigma(t) \le s(t) \qquad (t \ge t_0). \tag{13}$$

Por el principio del máximo, con $\sigma \le s$ y las mismas condiciones en $x = 0$,

$$0 \le v(x,t) \le u(x,t) \qquad \text{para } 0 \le x \le \sigma(t),\ t \ge t_0. \tag{14}$$

Para (s,u), tomando t_0 como tiempo inicial en la identidad integral (véase Teorema 1, Lección 3),

$$s(t)^2 - s(t_0)^2 = 2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi. \tag{15}$$

Para el problema auxiliar (10), con $\sigma(t_0) = 0$,

$$\sigma(t)^2 = 2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^{\sigma(t)} \xi\, v(\xi,t)\,d\xi. \tag{16}$$

Restando (16) de (15) y usando (14)–(13), obtenemos

$$s(t)^2 - s(t_0)^2 - \sigma(t)^2 = -2\int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi + 2\int_0^{\sigma(t)} \xi\, v(\xi,t)\,d\xi \le 0.$$

De aquí se deduce la primera desigualdad

$$\sigma(t)^2 \le s(t)^2 \qquad (t \ge t_0). \tag{17}$$

Por otra parte, como $u(\cdot,t) \ge 0$ y $\sigma(t) \le s(t)$,

$$-2\int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi \le -2\int_0^{\sigma(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi,$$

y usando (14),

$$-2\int_0^{\sigma(t)} \xi\, u(\xi,t)\,d\xi \le -2\int_0^{\sigma(t)} \xi\, v(\xi,t)\,d\xi.$$

Insertando estas dos estimaciones en (15) y comparando con (16) se obtiene

$$s(t)^2 - s(t_0)^2 \le \sigma(t)^2 \qquad (t \ge t_0). \tag{18}$$

Combinando (17) y (18),

$$\sigma(t)^2 \ \le\ s(t)^2 \ \le\ \sigma(t)^2 + s(t_0)^2. \tag{19}$$

Luego, usando además la identidad integral en $t = t_0$,

$$s(t_0)^2 = 2\int_{t_0}^{t_0} f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^{s(t_0)} \xi\, u(\xi,t_0)\,d\xi = -2\int_0^{s(t_0)} \xi\, u(\xi,t_0)\,d\xi,$$

y por tanto

$$\sigma(t)^2 \;\le\; s(t)^2 \;\le\; \sigma(t)^2 + s(t_0)^2 + 2\int_0^{s(t_0)} \xi\, u(\xi, t_0)\, d\xi. \tag{20}$$

Definimos la constante

$$C_0 := s(t_0)^2 + 2\int_0^{s(t_0)} \xi\, u(\xi, t_0)\, d\xi \;\ge 0.$$

Dividiendo (20) por $\sigma(t)^2$ se obtiene

$$1 \;\le\; \frac{s(t)^2}{\sigma(t)^2} \;\le\; 1 + \frac{C_0}{\sigma(t)^2} \qquad (t \ge t_0). \tag{21}$$

Como $v \ge 0$ en (16), de allí $\sigma(t)^2 \le 2\int_{t_0}^t f(\tau)\, d\tau$. Bajo la hipótesis $\int_0^\infty f = \infty$, se concluye $\sigma(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Tomando raíces en (21) y usando $\sqrt{1+x} = 1 + O(x)$ para $x \downarrow 0$, se deduce

$$\frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1 + O\Big(\frac{1}{\sigma(t)^2}\Big) \quad (t \to \infty),$$

lo que, en particular, implica

$$\frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1 + O\Big(\frac{1}{\sigma(t)}\Big) \quad (t \to \infty), \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1.$$

■

Finalmente, presentamos dos resultados clave sobre la frontera libre s: su comportamiento asintótico cuando el dato f no decae al infinito y su regularidad.

Teorema 4 *Si $f(t) \sim \rho$, $\rho > 0$, entonces $s(t) \sim \beta t^{1/2}$, donde β satisface:*

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \beta^{2n}. \tag{22}$$

Si $\log f(t) \sim \rho t^\gamma$, $\rho > 0$, $0 < \gamma < \infty$, entonces $s(t) \sim \beta t^{(1+\gamma)/2}$, donde β satisface:

$$\beta = 2\rho^{1/2}\gamma^{1/2}(1+\gamma)^{-(1+\gamma)/2}. \tag{23}$$

Finalmente, respecto a la regularidad de la frontera libre se tiene

Teorema 5 *La frontera libre s pertenece a $C^\infty((0,T))$.*

2. Problema de Stefan con condiciones de flujo

Consideremos ahora una formulación alternativa del problema de Stefan, conocida como el problema de una fase con especificación de flujo en la frontera. El objetivo es determinar funciones $s = s(t)$ y $u = u(x,t)$ tal que el par (s,u) satisfaga

$$\begin{cases} \partial_{xx} u = \partial_t u, & 0 < x < s(t),\ 0 < t \le T, \\ -\partial_x u(0,t) = h(t) > 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x) \ge 0, & 0 \le x \le b = s(0), \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t \le T. \end{cases} \tag{24}$$

y

$$\dot{s}(t) = -\partial_x u(s(t),t), \quad 0 \le t \le T, \tag{25}$$

donde T es una constante positiva.

Para esta variante del problema de Stefan, las demostraciones de existencia y unicidad siguen el mismo esquema que en las secciones anteriores. A continuación enunciamos algunos resultados sobre el comportamiento de la frontera libre.

Teorema 6 (18.4.2) *Para* $\int_0^\infty h(t)\,dt = \infty$, *sea* (s,u) *la solución del problema de Stefan* (24)–(25) *y sea* (σ, v) *la solución de:*

$$\begin{cases} v_{xx} = v_t, & 0 < x < \sigma(t), \quad t_0 < t < \infty, \\ -v_x(0,t) = h(t), & t_0 < t, \\ v(\sigma(t),t) = 0, & t_0 < t, \\ \dot{\sigma}(t) = -v_x(\sigma(t),t), & t_0 < t < \infty, \\ \sigma(t_0) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Entonces, cuando $t \to \infty$,

$$\frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right), \tag{27}$$

lo cual implica que $s(t) \sim \sigma(t)$ *ya que* $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$.

Teorema 7 *Si* (s,u) *es la solución del problema de Stefan* (24)–(25), *y si*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(\tau)\,d\tau = \infty, \tag{28}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{h(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = 0, \tag{29}$$

entonces, cuando $t \to \infty$,

$$s(t) \sim \int_0^t h(\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

Observación 1 *Las relaciones en* (28)-(29) *expresan el caso delicado donde la energía total es infinita, pero la temperatura en la frontera tiende a cero. Por ejemplo, si:*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ t^{-\gamma}, & 1 < t < \infty, \end{cases} \qquad \text{con } \frac{1}{2} < \gamma \le 1, \tag{31}$$

y usando la desigualdad del tipo (14.2.2):

$$\int_0^t \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \le \int_0^t \frac{1}{\tau^\gamma (t-\tau)^{1/2}}\,d\tau = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2-\gamma)} t^{1-\gamma-1/2}, \tag{32}$$

que tiende a cero cuando $t \to \infty$.

Teorema 8 *Sea* (s,u) *la solución del problema de Stefan* (24)–(25). *Si*

$$h(t) \sim t^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n-1}\Gamma(2n\alpha - \alpha + 1) t^{2n\alpha - n}}{\Gamma(2n)\Gamma(2n\alpha - \alpha - n + 1)}, \tag{33}$$

entonces

$$s(t) \sim \beta t^\alpha, \quad \alpha \ge 1/2. \tag{34}$$

Observación 2 *Para los casos* $\alpha = 1/2$ *y* $\alpha = 1$, *el comportamiento de frontera es fácil de identificar. Para* $\alpha = 1/2$:

$$h(t) \sim t^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)\beta^{2n-1}}{\Gamma(2n)\Gamma(1/2)}, \tag{35}$$

$$s(t) \sim \beta t^{1/2}. \tag{36}$$

Para $\alpha = 1$:

$$h(t) \sim \beta \exp\{\beta^2 t\}, \tag{37}$$

$$s(t) \sim \beta t. \tag{38}$$

Referencias

[1] John Rozier Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Vol. 23. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 0-521-30243-9.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

[3] Fritz John. *Partial Differential Equations*. 4th. Vol. 1. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982. ISBN: 978-0387906096.