

**Una muy breve introducción a los solitones, breathers,
y a la no integrabilidad**

EPN & USFQ
Septiembre 2018

Claudio Muñoz,
CMM-DIM U. de Chile y CNRS Francia

Índice

1. Introducción	3
2. Presentación de los modelos	4
2.1. Motivaciones	4
2.2. Los modelos	4
2.3. Observaciones preliminares	4
2.4. Relaciones entre SG, NLKG y ϕ^4	6
2.4.1. Relación entre SG y NLKG	6
2.4.2. Relación entre SG y ϕ^4	6
2.4.3. Relación entre NLKG y ϕ^4	6
2.5. Propiedades básicas de SG, NLKG y ϕ^4	6
2.6. Problemas propuestos	6
3. Kinks, solitones y breathers	8
3.1. El Kink de SG	8
3.2. El Kink de ϕ^4	8
3.3. El Solitón de NLKG	9
3.4. El Breather de SG	10
3.5. Algunos comentarios relevantes sobre el breather	10
3.6. Ejercicios	10
4. Problemas abiertos (y cerrados) relacionados con kinks y breathers	12
4.1. La conjetura de resolución en solitones (o kinks)	12
4.2. Ejercicios	13
5. Marco Funcional	14
5.1. Espacios de Energía	14
5.2. Cantidades Conservadas	14
5.3. Ejercicios propuestos	15
6. Buen colocamiento	16
6.1. Noción de buen colocamiento	16
6.2. Teorema de buen colocamiento	16
6.3. Demostración del Teorema	16
6.4. Problemas propuestos	18
7. Estabilidad de Kinks	19
7.1. Estabilidad Orbital	19
7.2. El Teorema de Henry, Pérez y Werszinski	19
7.3. Demostración del Teorema 7.1	19
7.4. Observaciones importantes	21

7.5. Problemas propuestos	21
8. Estabilidad Asintótica	22
8.1. Demostración del Teorema 8.2	22
8.2. Problemas propuestos	24
9. Estabilidad de Breathers	25
9.1. Idea de la demostración del Teorema 9.1	25
9.2. Problemas propuestos	27

1. Introducción

Este curso piensa en presentar de manera somera y en español los conceptos básicos relacionados con ecuaciones dispersivas de tipo solitónico, vistos esta vez desde un punto de vista EDP. Primeramente, estudiaremos el concepto de ecuación de campo escalar, distinguiendo las que son integrables de las que no son.

En una segunda parte, estudiaremos cómo encontrar sus soluciones, entre ellas solitones y breathers. También describiremos algunos ejemplos donde es posible estudiar en gran detalle la dinámica de soluciones. En una última parte, estudiaremos técnicas de EDPs que permiten comprender estas soluciones desde un punto de vista más robusto, que no dependa del carácter integrable de la ecuación.

Estas notas fueron presentadas en un Curso de Verano AMARUN (tipo nivel Master 1) de 9 horas llevado a cabo entre el 19 y 21 de Septiembre 2018 en la Universidad San Francisco de Quito (USFQ) Cumbayá, Ecuador, y fueron recopiladas por **Manuel F. Cortez**, al cual agradezco enormemente su esfuerzo al llevar a texto las notas del curso.

También a través de estas notas quisiera agradecer a Diego Chamorro, Oscar Jarrín, Manuel F. Cortez, María Medina y Carlos Marín, por sus dudas y comentarios que mejoraron enormemente la calidad de las presentaciones y del curso en general. Agradecimientos especiales también a Diego Chamorro, Oihanne Blanco, la Universidad Técnica de Ambato (UTA) y a la USFQ por la posibilidad y el soporte entregado para la realización de este curso.

Este curso y estas notas fueron también en parte financiadas por el proyecto Fondecyt Regular 1150202.

2. Presentación de los modelos

2.1. Motivaciones

La motivación fundamental de este breve curso es estudiar de cierta forma las diferencias existentes entre ciertas ecuaciones de evolución (es decir, con variable temporal) de tipo Ondas Dispersivas. Parte del problema mismo es entender los conceptos de onda solitaria y dispersión o decaimiento. Para ello recurriremos a un estudio de ciertos casos o ejemplos concretos. Explicaremos más adelante nociones como:

- Ecuaciones de tipo campo escalar
- Solitones, Kinks y Breathers
- Carácter bien puesto de un problema de Cauchy
- Estabilidad
- Decaimiento

Por simplicidad trabajaremos siempre en una dimensión espacial (1-D), y donde la variable de tiempo es $t \in \mathbb{R}$. De más está decir que, al concentrarnos sólo en estos aspectos, dejaremos fuera de enfoque multitud de otros aspectos relevantes para la investigación actual.

2.2. Los modelos

Nuestro objetivo en este mini curso sera entender algunos conceptos particulares de las siguientes ecuaciones:

1. La ecuación de Sine-Gordon (SG)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \sin u = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde (u_0, u_1) son funciones dadas.

2. La ecuación Nolineal de Klein-Gordon (NLKG) cúbica,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u - u^3 = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (2.2)$$

3. Finalmente, consideraremos el modelo ϕ^4 ,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - u + u^3 = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Estos tres modelos están íntimamente ligados por fenómenos transversales a cada uno de ellos, pero a la vez son diferentes en ciertas propiedades esenciales, las que estudiaremos más en detalle.

2.3. Observaciones preliminares

Antes de proceder a la matemática asociada a estas ecuaciones, las siguientes observaciones son de relevancia:

- Las ecuaciones (2.2) y (2.3) son muy diferentes, por ejemplo en Física se dice que la ecuación (2.2) posee **masa positiva** (el término $-u$), mientras ϕ^4 posee masa negativa.
- Los tres modelos anteriores provienen de la **Teoría Cuántica de Campos** (Física); aunque nosotros sólo nos concentraremos en estudiar propiedades básicas (desde el punto de vista Físico) de estos modelos. Ver [6] para más detalles.

- Los tres modelos son perturbaciones no-lineales del modelo clásico de ondas lineales en una dimensión conocido como **Klein-Gordon Lineal**

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u \pm u = 0. \quad (2.4)$$

En este sentido, esta ecuación será relevante para entender el comportamiento en tiempos grandes de cada una de las ecuaciones de arriba.

- La ecuación (ϕ^4) (2.3) se denomina de esta forma pues corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional (o Acción)

$$\mathcal{S}(u, \partial_t u) := \underbrace{\mathcal{K}(u, \partial_t u)}_{\text{parte cinética}} - \underbrace{\mathcal{V}(u, \partial_t u)}_{\text{parte potencial}}, \quad (2.5)$$

donde

$$\mathcal{K}(u, \partial_t u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) dx,$$

y donde

$$\mathcal{V}(u, \partial_t u) := \underbrace{\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - 1)^2 dx}_{\text{potencia 4}}.$$

Si la variación de \mathcal{S} con respecto a $(u, \partial_t u)$ se hace cero, se tiene formalmente que se debe satisfacer la EDP

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - u + u^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que no es más que ϕ^4 .

- Con respecto a la ecuación (2.2), se tiene que la acción viene dada por

$$\mathcal{S}(u, \partial_t u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 + u^2) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} u^4 dx.$$

Finalmente, on respecto a la ecuación (2.1), se tiene que

$$\mathcal{S}(u, \partial_t u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) dx - \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos u) dx.$$

- Las tres ecuaciones antes mencionadas poseen una importante diferencia: mientras la ecuación Sine-Gordon (2.1) es un sistema **completamente integrable**, las ecuaciones Klein-Gordon Nolineal (2.2) y ϕ^4 (2.3) no lo son. Más adelante explicaremos someramente qué consecuencias implica poseer la propiedad de completa integrabilidad.
- Las tres ecuaciones antes consideradas poseen una simetría adicional llamada de **Lorentz**, proveniente de la Relatividad Especial. En efecto, sea $v \in (-1, 1)$ ($|v| = 1$ sería la velocidad de la luz) y $u(t, x)$ solución a alguna de las ecuaciones anteriores. Entonces

$$u_v(t, x) := u(\gamma(t - vx), \gamma(x - vt)), \quad \underbrace{\gamma := (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{factor de Lorentz}}, \quad (2.6)$$

también es solución de la misma ecuación. Esta simetría permite introducir velocidades a las soluciones de SG, NLKG y ϕ^4 , como veremos más adelante.

- Cada una de las ecuaciones antes descritas posee velocidad de propagación finita. Esto es, si inicialmente $\text{supp}(u_0, u_1) \subset [x_{\min}, x_{\max}]$, entonces $\forall t > 0$, tenemos que el soporte supp satisface

$$\text{supp}(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) \subset [x_{\min} - t, x_{\max} + t],$$

y donde $(u, \partial_t u)(t)$ es la solución asociada a los datos (u_0, u_1) en tiempo t .

2.4. Relaciones entre SG, NLKG y ϕ^4

2.4.1. Relación entre SG y NLKG

Si $u = u(t, x)$ es solución de (SG) (2.1) y además es pequeña, entonces podemos decir que

$$\sin u \approx u - \frac{u^3}{6} + O(u^5). \quad (2.7)$$

Luego SG (2.1) (para $\|u\|_{L^\infty} \ll 1$) se lee al orden 3 como

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u - \frac{u^3}{6} \approx 0,$$

que se comporta como la ecuación (2.2), salvo por una constante que puede evitarse haciendo un escalamiento apropiado.

2.4.2. Relación entre SG y ϕ^4

La siguiente es una relación informal que conecta SG y ϕ^4 (ver también (2.7)). Sea $u = u(t, x)$ solución de (SG) (2.1). Sea ahora $v(t, x) := u(t, x) - \pi$. Remplazando en la ecuación SG (2.1), se tiene

$$\partial_t^2(v + \pi) - \partial_x^2(v + \pi) + \sin(v + \pi) = 0 \quad \implies \quad \partial_t^2 v - \partial_x^2 v - \sin v = 0.$$

Que no es más que SG con signo de sin cambiado. Si ahora añadimos una hipótesis de pequeñez para v como en el párrafo anterior, se tiene que

$$\partial_t^2 v - \partial_x^2 v - v + \frac{v^3}{6} \approx 0,$$

que corresponde precisamente a ϕ^4 módulo una constante de normalización.

2.4.3. Relación entre NLKG y ϕ^4

Esta relación es la más informal de todas, y no corresponde exactamente a una transformación válida desde el punto de vista físico. Si $u(x, t)$ es solución de la ecuación (2.2), haciendo el cambio de variables $x \rightarrow ix, t \rightarrow it$, se llega a la ecuación ϕ^4 .

En lo que sigue intentaremos dar ciertas propiedades de cada una de las ecuaciones anteriores.

2.5. Propiedades básicas de SG, NLKG y ϕ^4

- La función $u = 0$ es solución exacta de (2.1), (2.2) y (2.3).
- Si $u_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), entonces u_k es solución constante de (2.1).
- $u = \pm 1$ es solución de la ecuación ϕ^4 .

En el caso de las ecuaciones SG (2.1) y NLKG, la solución $u = 0$ se llama **vacío**, y veremos que es estable. Sin embargo, esta solución no es buena para la ecuación ϕ^4 (2.3) a causa de la energía potencial

$$V(u, \partial_t u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - 1)^2 dx,$$

que no queda bien definida si $u = 0$. Por lo mismo, $u = \pm 1$ se llaman los vacíos para ϕ^4 .

2.6. Problemas propuestos

1. Mostrar que la variación de S en (2.5) da como resultado la ecuación ϕ^4 .
2. Lo mismo con las acciones correspondientes a NLKG y SG.
3. Mostrar que u_v en (2.6) es solución de cualquiera de las tres ecuaciones escalares antes mencionadas, si u también lo es.

3. Kinks, solitones y breathers

3.1. El Kink de SG

SG (2.1) posee una solución no trivial que conecta los estados exactos 0 y 2π . Esta función se conoce como Kink. En efecto,

$$u(t, x) := K(x) := 4 \arctan e^x, \quad (3.1)$$

es solución estacionaria (es decir, independiente del tiempo) de la ecuación Sine Gordon (2.1). Ver Fig. 1 para más detalles.

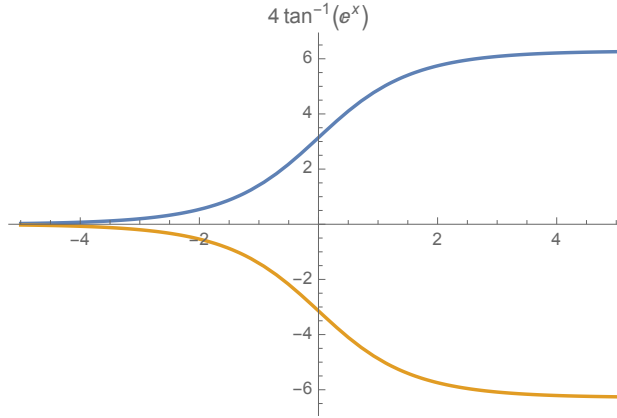


Figura 1: El kink estacionario de SG K , y el antikink $-K$ graficados, ambos soluciones de SG.

Además, K verifica las siguientes propiedades:

1. Módulo substracción de π , $K(x)$ es una función impar.
2. Se tienen los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 2\pi \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} K(x) = 0 \quad (3.2)$$

Se dice en la literatura que $K(x)$ conecta las soluciones exactas 0 y 2π (de manera creciente).

3. Además $K(x) + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) también es solución, lo mismo que para $-K(x)$, pues la ecuación sine-Gordon es impar. A la función $-K(x)$ se le denomina **anti-Kink** y conecta los vacíos 0 y -2π de manera decreciente.

3.2. El Kink de ϕ^4

Con respecto a la ecuación ϕ^4 (2.3), la función

$$u(t, x) := H(x) := \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.3)$$

es una solución estacionaria de ϕ^4 y también se denomina **Kink**. Ver Fig. 2 para más detalles.

No es difícil mostrar que $H(x)$ resuelve la siguiente E.D.O.

$$-H'' - H + H^3 = 0. \quad (3.4)$$

Además, $H(x)$ verifica las siguientes propiedades:

1. $H(x)$ es una función impar.
2. Se tienen los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = -1, \quad (3.5)$$

por lo que se dice que $H(x)$ conecta las soluciones exactas (vacíos de la ecuación) -1 y 1 , de manera creciente.

3. $-H(x)$ se le denomina **anti-Kink** y conecta los vacíos 1 y -1 de manera decreciente.

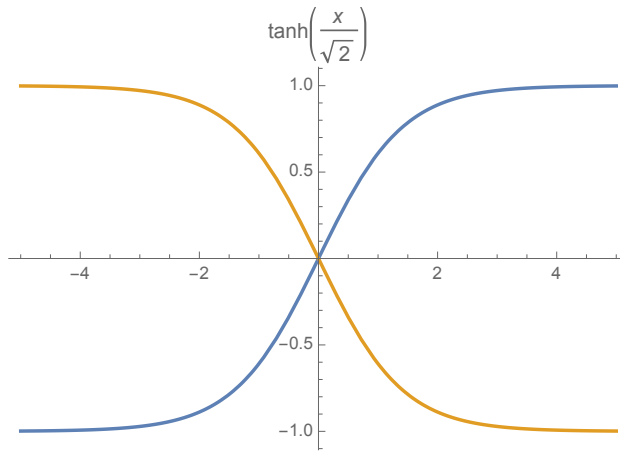


Figura 2: El kink estacionario de $\phi^4 H$, y su antikink $-H$.

3.3. El Solitón de NLKG

Finalmente la ecuación Nolineal de Klein Gordon (2.2) posee una solución exacta (estacionaria) denominada **onda solitaria** o **solitón**,

$$u(t, x) := Q(x) := \frac{\sqrt{2}}{\cosh x} = \sqrt{2} \operatorname{sech} x. \quad (3.6)$$

La Fig. 3 muestra más detalles sobre Q . De la misma manera que antes $Q(x)$ resuelve la siguiente EDO

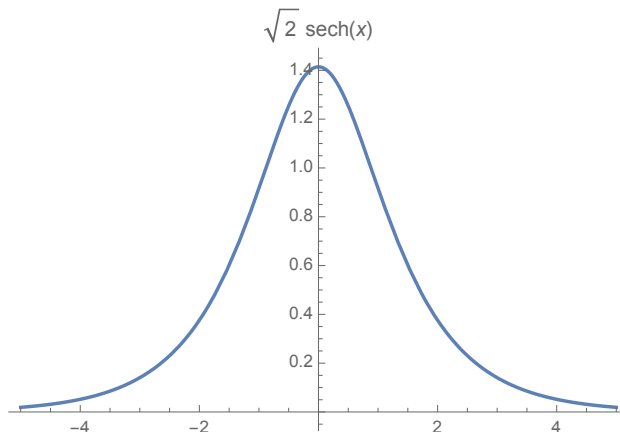


Figura 3: El Solitón estacionario de NLKG. Notar que, a diferencia de K y H , esta solución decae a cero en espacio.

$$-Q'' + Q - Q^3 = 0. \quad (3.7)$$

A diferencia de las soluciones estacionarias de las anteriores ecuaciones, la solución $Q(x)$ conecta el vacío 0 consigo mismo.

Usando la simetría de Lorentz (2.6), es posible dar velocidad a los objetos K , H y Q antes definidos. Por ejemplo, si $v \in (-1, 1) - \{0\}$, entonces

$$Q(\gamma(x - vt)) \quad \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}},$$

es un soliton que se mueve con velocidad v .

3.4. El Breather de SG

Sin embargo la ecuación de Sine Gordon (2.1) es tan especial que posee muchas otras soluciones **básicas**. La más famosa se llama **breather** (o respirador, en español),

$$u(t, x) := B(t, x) := 4 \arctan \left(\frac{\beta \cos(\alpha t)}{\alpha \cosh(\beta x)} \right), \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (3.8)$$

Notar que α, β son libres, excepto por la restricción $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ver Fig. 4 para más detalles.

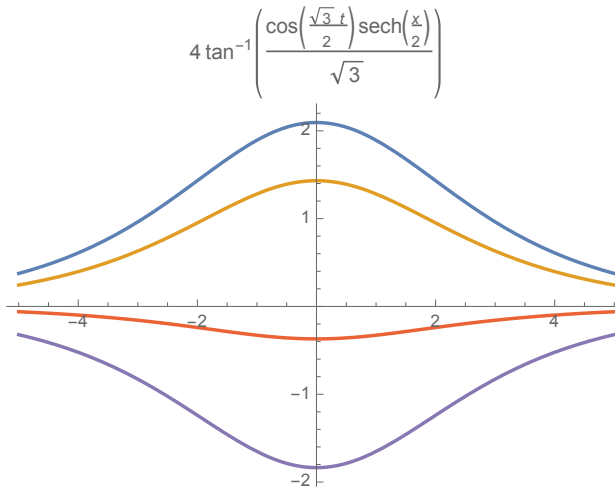


Figura 4: El breather de SG con valor $\beta = \frac{1}{2}$, graficado en tiempos $t = 0$ (azul), $t = 1$ (amarillo), $t = 2$ (rojo), y $t = 3$ (morado). Notar como B baja a medida que el tiempo avanza, para luego comenzar a subir (pues es periódico en tiempo).

3.5. Algunos comentarios relevantes sobre el breather

- $B(t, x)$ es localizada en espacio y periódica en tiempo, es decir existe $T > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} B(t, x) = 0 \quad \text{y} \quad B(t + T, x) = B(t, x). \quad (3.9)$$

- $B(t, x)$, como función de x a tiempo fijo t , es par.
- Además si $|\beta| \ll 1$, entonces $\alpha \approx 1$ y se tiene

$$\begin{aligned} B(t, x) &\approx 4 \arctan \left(\beta \frac{\cos t}{\cosh(\beta t)} \right) \approx 4 \cos t \beta \operatorname{sech}(\beta x) \\ &\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\arctan x \sim x \text{ Si } |x| \sim 0} \\ &\approx c\beta Q(\beta x) \cos t, \end{aligned}$$

donde $Q(\cdot)$ es el solitón de NLKG. En otras palabras, en el límite de amplitud pequeña, el breather se comporta como un solitón de NLKG rescalado, con una oscilación $\cos t$ de frecuencia 1.

3.6. Ejercicios

1. Probar que K , H y Q resuelven las ecuaciones correspondiente de SG, ϕ^4 y NLKG.
2. Probar que B en (3.8) resuelve SG. Indicación: Primero verifique qué ecuación resuelve ϕ en $u = 4 \arctan \phi$, para luego reemplazar ϕ adecuadamente.
3. Usando la transformación de Lorentz (2.6), y dada una velocidad $v \in (-1, 1)$ no nula y el breather B de (3.8), escribir el breather B_v que se mueve con velocidad v .

4. Problemas abiertos (y cerrados) relacionados con kinks y breathers

Es natural, conociendo ya las soluciones del capítulo anterior, preguntar las siguientes cuestiones interesantes:

1. ¿Las ecuaciones (*NLKG*) (2.2) y ϕ^4 (2.3), poseen ellas breathers? Es decir, ¿poseen soluciones localizadas en espacio y periódicas en tiempo?
2. Si no poseen breathers, ¿se puede probar que todas las soluciones **decaen a un vacío**? Esto es, si se comportan como una solución de la ecuación lineal Klein-Gordon lineal y convergen a cero en norma L^∞ .
3. ¿Son las soluciones antes descritas (K, H, Q, B) estables en el tiempo? ¿Son estables si ahora perturbamos la ecuación?
4. ¿Es posible caracterizar la integrabilidad de la ecuación de Sine-Gordon (2.1) versus la no integrabilidad de las ecuaciones *NLKG* y ϕ^4 ?

En este curso daremos las respuestas siguientes:

1. Con respecto a la primera pregunta antes mencionada:
 - Ni la ecuación ϕ^4 , ni *NLKG*, ni (S-G) poseen breathers impares pequeños en espacio.
2. Con respecto a la segunda pregunta, se tienen las siguientes respuestas:
 - Si perturbamos K de la ecuación de Sine-Gordon, no se sabe aún completamente (y la respuesta es falsa si el dato es par).
 - Si perturbamos H de la ecuación ϕ^4 con dato impar las perturbaciones escapan a $+\infty$. Es decir, no hay breathers impares.
 - Si perturbamos 0 con dato inicial impar en la ecuación Sine-Gordon, la respuesta es afirmativa mientras que la respuesta es falso si el dato es par (un contraejemplo son los breathers).
3. Con respecto a la tercera pregunta de estabilidad de nuestras soluciones básicas, tenemos las siguientes respuestas:
 - K, H son estables.
 - Q es inestable.
 - B es estable.

Mientras que si perturbamos las ecuaciones, la estabilidad del sistema es falsa en general. En estas notas intentaremos dar respuesta a la estabilidad de K y H , como a la de B .

4.1. La conjetura de resolución en solitones (o kinks)

El estudio de los problemas anteriores tiene como fin último poder entender y ojalá probar la siguiente conjetura, relacionada con la evolución de todas las soluciones de las ecuaciones antes mencionadas:

*Intentar probar que toda solución global en el tiempo de (*NLKG*), ϕ^4 y *SG* se descompone como suma de solitones, objetos raros (breathers) y radiación (soluciones de ecuación lineal), cuando el tiempo se tiende a $+\infty$.*

Para el caso de la ecuación de Sine Gordon la respuesta se conoce con un cierto grado de rigurosidad: Si $u(t, x)$ es una solución global en el tiempo, entonces cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene la descomposición

$$u \approx \underbrace{\sum \text{Solitones/Kinks}}_{\text{Soluciones básicas}} + \underbrace{\sum \text{Objetos raros}}_{\text{Breathers}} + \underbrace{\text{Radiación/Scattering}}_{\text{Sols. de la ec. lineal}}$$

La demostración final de este resultado sería de gran importancia en el desarrollo de las matemáticas.

4.2. Ejercicios

1. Probar que si el dato inicial es impar en ϕ^4 , entonces la solución es impar. Probar el mismo resultado para S-G.
2. Probar que SG preserva ambas propiedades: paridad e imparidad.

5. Marco Funcional

El propósito de este capítulo es discutir brevemente el marco funcional analítico sobre el cual demostraremos los resultados avanzados de estas mini notas.

5.1. Espacios de Energía

Primero que todo, recordemos ciertas definiciones de espacios de Sobolev. El lector puede consultar el libro de Linares y Ponce [5] para más detalles. El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$ y $s \in \mathbb{R}$, corresponde al espacio vectorial

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in S'(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Aquí, $\widehat{(\cdot)}$ es la transformada de Fourier en \mathbb{R}^d , y S' es la clase de distribuciones temperadas, dual de la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$. Claramente $H^0 = L^2$. Si $s \geq 0$, entonces

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

El ejemplo más clásico de espacio de Sobolev es $H^1(\mathbb{R}^d)$, muy utilizado en la Física, que (puede probarse como ejercicio) corresponde al espacio

$$H^1(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall j \quad \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Consecuentemente, partir de la energía conservada de nuestros sistemas, podemos definir los espacios de energía asociados a cada ecuación: $(u, \partial_t u)$ está en

$$\mathcal{E}_{SG} := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{E}_{NLKG} := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{E}_{\phi^4} := (H, 0) + H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \quad (5.3)$$

y finalmente, para trabajar en una vecindad del kink K ,

$$\mathcal{E}_{K,SG} := (K, 0) + H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}). \quad (5.4)$$

5.2. Cantidades Conservadas

Las tres ecuaciones poseen cantidades que se preservan en el tiempo; por ejemplo, el momento

$$P(u, u_t) = \int_{\mathbb{R}} (u_t u_x)(t, x) dx, \quad (5.5)$$

es conservada en las tres ecuaciones que nosotros trabajamos. Una atención especial es para la **energía conservada** en estos sistemas que son las siguientes

$$E_{SG}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + u_x^2)(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos u)(t, x) dx \geq 0 \quad (5.6)$$

$$E_{NLKG}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)(t, x) dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} u^4(t, x) dx \quad (5.7)$$

$$E_{\phi^4}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + u_x^2)(t, x) dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - 1)^2(t, x) dx \geq 0. \quad (5.8)$$

5.3. Ejercicios propuestos

1. Probar que \mathcal{E}_{ϕ^4} en (5.3) define un espacio de Hilbert.
2. Verificar que las energías $E_{\text{SG}}(t)$, $E_{\text{NLKG}}(t)$ y $E_{\phi^4}(t)$ en (5.6), (5.7) y (5.8) respectivamente, son conservadas.
3. Verificar que el momentum P en (5.5) se conserva para cada ecuacion de campo escalar vista en las notas.
4. Calcule las energías de K , H y Q .
5. Usando un programa de cálculo simbólico, calcule la energía de B , y muestre que depende de β solamente.
6. ¿Cuál es el momento de K , H y Q ?
7. Muestre que B posee momentum nulo.

6. Buen colocamiento

6.1. Noción de buen colocamiento

Queremos resolver los problemas (2.1)-(2.2)-(2.3) para ciertos datos u_0 y u_1 dados. La noción de resolución de tales problemas no es trivial, y es parte de lo que se llama **buen colocamiento de Hadamard**.

A modo de ejemplo, consideremos el problema para (2.1). Sean (u_0, u_1) datos dados en un espacio de Sobolev de tipo $H^s \times H^{s-1}$, con $s \geq 0$. Diremos que (2.1) está bien colocado si las siguientes propiedades se cumplen

- **Existencia.** Existe $T = T(u_0, u_1) > 0$ y un subespacio cerrado $X_T \subseteq C([-T, T] : (H^s \times H^{s-1})(\mathbb{R}))$ tal que (2.1) posee una solución $(u, \partial_t u) \in X_T$.
- **Unicidad.** Esta solución es única en la clase X_T ;
- **Dependencia continua.** El mapa $H^s \times H^{s-1} \ni (u_0, u_1) \mapsto (u, \partial_t u) \in X_T$ es continuo.

Si alguna de ellas no se cumple, diremos que hay mal colocamiento.

6.2. Teorema de buen colocamiento

En esta Sección probaremos el siguiente resultado:

Teorema 6.1 (Buen colocamiento local). *Todas las ecuaciones (SG, NLKG, y ϕ^4) están localmente bien colocadas en sus espacios de energía respectivos, es decir: Dados $(u_0, u_1) \in \mathcal{E}_X$ (con $X = SG, NLKG, \phi^4$), existe $T = T(u_0, u_1) > 0$ y una única solución $(u, \partial_t u)$ de X tal que $(u, u_t) \in C([-T, T], \mathcal{E}_X)$.*

Algunos comentarios:

- Además, para las ecuaciones (SG) (2.1) y (ϕ^4) (2.3), la solución es global, es decir se puede tomar $T = +\infty$. Este hecho proviene de la no negatividad de la energía y la conservación de energía de cada sistema.
- Para la ecuación (NLKG) (2.2) este resultado es falso, pues posee soluciones que explotan en tiempo finito.

6.3. Demostración del Teorema

Probaremos el resultado para el caso de la ecuación de Sine-Gordon (2.1). Para los demás casos el análisis es similar, pero con ligeras diferencias. Retomemos la ecuación de Sine-Gordon

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \sin u = 0.$$

Aplicando la transformada de Fourier en la ecuación tenemos la siguiente EDO

$$\partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) + \xi^2 \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) \quad (6.1)$$

con $f = -\sin u$, con las condiciones iniciales siguientes $\hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0$, $\partial_t \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_1$. La solución a esta EDO viene dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}\hat{f}(s, \xi) ds. \quad (6.2)$$

Por otro lado derivando con respecto a t , se tiene

$$\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -|\xi| \sin(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \cos(t|\xi|)\hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \cos((t-s)|\xi|)\hat{f}(s, \xi) ds \quad (6.3)$$

Tanto (6.2) como (6.3), se puede escribir de manera funcional gracias a la fórmula de Duhamel. Se tiene que

$$u(t) = \cos(tD)u_0 + \frac{\sin(tD)}{D}u_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-s)D)}{D}f(s) ds, \quad (6.4)$$

y

$$\partial_t u(t) = -D \sin(tD)u_0 + \cos(tD)u_1 + \int_0^t \cos((t-s)D)f(s) ds, \quad (6.5)$$

donde $D = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$. En lo que sigue aplicaremos el principio de contracción de Banach.

Teorema 6.2. *Sea X un espacio de Banach, y $B(0, R)$ una bola cerrada en X de centro 0 y radio R . Si $T : B(0, R) \rightarrow B(0, R)$ es contractante, es decir $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$ para todo $x, y \in B(0, R)$ y cierto $L \in (0, 1)$, entonces T posee un único punto fijo, es decir existe un único $u \in X$ tal que $T(u) = u$.*

Aplicaremos este resultado para el operador $T = (T_1, T_2)$, donde

$$T_1(u) = \cos(tD)u_0 + \frac{\sin(tD)}{D}u_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-s)D)}{D}f(s) ds, \quad (6.6)$$

y

$$T_2(u) = -D \sin(tD)u_0 + \cos(tD)u_1 + \int_0^t \cos((t-s)D)f(s) ds \quad (6.7)$$

Ahora construiremos nuestro espacio de Banach en variable espacial y temporal de la siguiente manera;

$$\mathcal{X}_T = C([-T, T]; H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})),$$

para un cierto $T > 0$ aún por determinar. La norma de \mathcal{X}_T esta definido de la siguiente manera,

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T} = \sup_{t \in [-T, T]} \|\vec{u}(t)\|_{H^1 \times L^2},$$

donde

$$\|\vec{u}(t)\|_{H^1 \times L^2} = \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ahora consideramos

$$B_{\mathcal{X}_T}(0, R) = \{u \in \mathcal{X}_T : \|u\|_{\mathcal{X}_T} < R\},$$

con $R > 0$ aún por determinar. Entonces realizamos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \|\partial_x T_1(u)(t)\|_{L^2} &= \left\| \cos(tD)\partial_x u_0 + \frac{\sin(tD)}{D}\partial_x u_1 - \int_0^t \frac{\sin((t-s)D)}{D}u_x \cos(u)(s) ds \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \cos(tD)\partial_x u_0 \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\sin(tD)}{D}\partial_x u_1 \right\|_{L^2} \\ &\quad + \int_0^t \left\| \frac{\sin((t-s)D)}{D}u_x \cos(u)(s) \right\|_{L^2} ds \\ &\leq \|u_0\|_{H^1} + \|\sin(tD)u_1\|_{L^2} + \int_0^t \left\| \frac{\sin((t-s)D)}{D}(u_x \cos(u))(s) \right\|_{L^2} ds \\ &\leq \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^2} + \int_0^t \left\| \frac{\sin((t-s)D)}{D}u_x(s) \right\|_{L^2} ds \\ &\leq \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} + \int_0^T \|u(s)\|_{L^2} ds \leq \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} + RT. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ahora tomando $R = 8\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}$ y $T \leq \frac{2}{9}$, se tiene que

$$\|T_1(u)(t)\|_{H^1} \leq \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} + RT \leq \frac{R}{4}.$$

Similarmente podemos acotar T_2 , de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\|T_2(u)(t)\|_{L^2} &= \left\| -D \sin(tD)u_0 + \cos(tD)u_1 + \int_0^t \cos((t-s)D)f(s) ds \right\|_{L^2} \\
&\leq \|D \sin(tD)u_0\|_{L^2} + \|\cos(tD)u_1\|_{L^2} + \int_0^t \left\| \cos((t-s)D)f(s) \right\|_{L^2} ds \\
&\leq \|\partial_x u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|u(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} + \int_0^T \|u(s)\|_{L^2} ds \leq \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} + RT \leq \frac{R}{4}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\sup_{t \in [-T, T]} \|T(\vec{u})(t)\|_{H^1 \times L^2} \leq \frac{R}{2}$ (\Rightarrow envía bolas en bolas).

Nos falta probar que es una contracción. Para ello probaremos solo el caso T_2 y sin perder generalidad podemos considerar dos soluciones u, v a partir de los mismos datos iniciales, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(T_2(u) - T_2(v))(t)\|_{L^2} &= \left\| \int_0^t \cos((t-s)D)(\sin u - \sin v)(s) ds \right\|_{L^2} \\
&\leq \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} \left\| \left(\frac{\sin u - \sin v}{u - v} \right)(s) \right\|_{L^2} ds \\
&\leq \sup_{s \in [-T, T]} \|(u - v)(s)\|_{L^2} \int_0^T \left\| \left(\frac{\sin u - \sin v}{u - v} \right)(s) \right\|_{L^2} ds \\
&\leq T \|u - v\|_{\mathcal{X}_T} \\
&\leq \frac{9}{10} \|u - v\|_{\mathcal{X}_T}.
\end{aligned}$$

Gracias al Teorema de Punto Fijo de Banach existe una única solución de la ecuación Sine-Gordon admite una única solución en $C([-T, T]; H^1 \times L^2)$.

Como lo dijimos anteriormete, este resultado con algunas modificaciones razonables también es válido para las ecuaciones **NLKG** y ϕ^4 .

6.4. Problemas propuestos

1. Verificar que (6.1) se cumple.
2. Completar la demostración del Teorema 6.2, estimando $T_1(u)$ en L^2 y probando la contracción de T_1 .

7. Estabilidad de Kinks

7.1. Estabilidad Orbital

¿Qué significa ser estable? Informalmente, algo es estable si persiste bajo perturbaciones. La mayor parte de las cosas que forman nuestro universo son estables: nuestros cuerpos no se desintegran, los árboles no decaen repentinamente, y el sol sigue estando todos los días de mañana, al menos por miles de millones de años más.

Por lo mismo, la noción de estabilidad es muy importante, pues explicita de manera simple cuáles objetos son factibles de ver corrientemente en la naturaleza. Como las ecuaciones que estudiamos son parte de la Física, y esta ciencia se preocupa de los hechos reales, es razonable que éstos sean estables.

Volvamos pues a los kinks H y K de (2.3) y (2.1). Un kink se dirá estable si persiste bajo **pequeñas** perturbaciones de energía finita.

7.2. El Teorema de Henry, Pérez y Werszinski

Probaremos:

Teorema 7.1 (Henry-Perez-Werszinski, [2]). *Existen $\varepsilon_0, C_0 > 0$ tales que lo siguiente se cumple para cualquier $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Sea $(u, \partial_t u)$ una solución de la ecuación Sine Gordon (2.1), o bien ϕ^4 (2.3), tal que*

$$\|(u_0, u_1) - (J, 0)\|_{H^1 \times L^2} < \varepsilon, \quad J = H, K, \quad (7.1)$$

y donde (u_0, u_1) son los datos iniciales asociados a la solución $(u, \partial_t u)$. Entonces existe $\rho(t) \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(u, \partial_t u)(t) - (J(x - \rho(t)), 0)\|_{H^1 \times L^2} < C_0 \varepsilon_0. \quad (7.2)$$

El Teorema anterior asume que el problema de Cauchy para perturbaciones $H^1 \times L^2$ del kink está bien definido, lo cual es cierto. La teoría local se debe hacer en $(H, 0) + H^1 \times L^2$, o bien en $(K, 0) + H^1 \times L^2$ respectivamente, de la misma forma como fue hecha en el capítulo anterior.

Asimismo, la traslación $\rho(t)$ es necesaria en el Teorema 7.1 a causa de la invariancia de Lorentz. La razón viene dada porque para v pequeño, $(u_0, u_1) = (J(\gamma x), -v\gamma J'(\gamma x))$ satisface (7.1), y además $(u, \partial_t u) = (J(\gamma(x - vt)), -v\gamma J'(\gamma(x - vt)))$, pero a menos que $\rho(t) \approx vt$, entonces (7.2) no se satisface.

7.3. Demostración del Teorema 7.1

Demostraremos el teorema para el caso de la ecuación ϕ^4 . Utilizaremos una idea de Weinstein [8], tomando la energía asociada a la ecuación (5.8)

$$E_{\phi^4}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2 + u_x^2)(t, x) dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - 1)^2(t, x) dx \geq 0.$$

Recordemos que $H(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ y $H'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Escribimos la solución $\vec{u}(t) = (u(t, x), \partial_t u(t, x))$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(t, x) &= H(x - \rho(t)) + z(t, x), \\ \partial_t u(t, x) &= w(t, x), \end{aligned} \quad (7.3)$$

con $\rho(t)$ a encontrar mas tarde. Remplazando (9.2) en la energía (5.8), se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Constante} &= E_{\phi^4} \left(H(\cdot - \rho(t) + z(t, x)), w(t, x) \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(w^2 + \left(H'(\cdot - \rho(t)) + \partial_x z \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(H(\cdot - \rho(t)) + z \right)^2 - 1 \right)^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{w^2}{2} + \frac{1}{2} H'^2 + H' \partial_x z + \frac{1}{2} (\partial_x z)^2 \right) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \left(H^2 + 2Hz + z^2 - 1 \right)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} H'^2 + \frac{1}{4} (H^2 - 1)^2 \right) + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{w^2}{2} - H'' z + \frac{1}{2} (\partial_x z)^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \left(2(H^2 - 1)(2Hz + z^2) + (2Hz + z^2)^2 \right) \\
&= \underbrace{E_{\phi}(H, 0)}_{\text{cte}} + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{w^2}{2} - H'' z + \frac{1}{2} (\partial_x z)^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \left(2(H^2 - 1)(2Hz + z^2) + (2Hz + z^2)^2 \right) \\
&= c_H + \int_{\mathbb{R}} z \left(-H'' - H + H^3 \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (H^2 z^2 - z^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (2Hz + z^2)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} w^2 + (\partial_x z)^2 \\
&= c_H + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (z^2(H^2 - 1) + w^2 + (\partial_x z)^2) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (2Hz + z^2)^2 \\
&= c_H + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (z^2(H^2 - 1) + w^2 + (\partial_x z)^2 + 2H^2 z^2) + \int_{\mathbb{R}} \left(Hz^3 + \frac{1}{4} z^4 \right) \\
&= c_H + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} w^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (3z^2(H^2 - 1) + (\partial_x z)^2 + 2z^2) + \int_{\mathbb{R}} \left(Hz^3 + \frac{1}{4} z^4 \right).
\end{aligned}$$

El problema ahora es entender la forma cuadrática

$$B(z) = \int_{\mathbb{R}} (3z^2(H^2 - 1) + (\partial_x z)^2 + 2z^2) \quad (7.4)$$

Se puede probar que $\forall z \in H^1$, se tiene que $B(z) \geq 0$ y que $B(H') = 0$. Esto viene del hecho que

$$\mathcal{L}z \geq 0, \quad \mathcal{L}H' = 0,$$

donde $\mathcal{L} := -\partial_x^2 + 2 - 3(1 - H^2)$ es tal que

$$B(z) = \int z \mathcal{L}z.$$

Esto se prueba usando Teoría Espectral, que está fuera del alcance de estas notas. Se puede probar también que escogiendo $\rho(t)$ adecuadamente podemos tener que

$$\int_{\mathbb{R}} z(t, x) H'(x - \rho(t)) dx = 0.$$

Suponiendo esto, podemos demostrar (nuevamente usando teoría espectral) que existe $c_0 > 0$ tal que

$$B(z) \geq c_0 \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x z)^2 + z^2) > 0 \quad \forall z \perp H'(x - \rho(t)).$$

Finalmente tenemos que

$$\mathcal{E}_{\phi^4}(0) \geq c_H + \frac{c_0}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x z)^2 + z^2) + \int_{\mathbb{R}} \left(Hz^3 + \frac{1}{4} z^4 \right).$$

Si (z, w) es son pequeños para un tramo de de tiempo se tiene que

$$\frac{c_0}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x z)^2 + z^2) + \int_{\mathbb{R}} \left(H z^3 + \frac{1}{4} z^4 \right) \geq \frac{c_0}{4} \int_{\mathbb{R}} (w^2 + (\partial_x z)^2 + z^2)(t) dx.$$

Variando en un tiempo $t = 0$ y $t > 0$, tenemos,

$$\|(z, w)(t)\|_{H^1 \times L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} (w^2 + (\partial_x z)^2 + z^2)(t) dx \leq c \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (w^2 + (\partial_x z)^2 + z^2)(0) dx}_{\epsilon_0^2},$$

lo que muestra finalmente el resultado.

7.4. Observaciones importantes

- El resultado anterior nos dice que toda perturbación pequeña del Kink módulo una traslación en tiempo $\rho(t)$ es estable. Este resultado se conoce en la literatura como estabilidad orbital.
- Una pregunta fundamental es saber el estado final de la solución $(u, u_t)(t)$ y si converge a algún Kink. Esta propiedad se llama estabilidad asintótica.

7.5. Problemas propuestos

1. Probar que $\mathcal{L}(H') = 0$.
2. Usando un resultado clásico de autofunciones, muestre que $\mathcal{L}(z) \geq 0$ para cualquier $z \in H^2(\mathbb{R})$.

8. Estabilidad Asintótica

Una pregunta importante que deja abierta el Teorema 7.1 de estabilidad de kinks es saber el estado final de la solución $(u, \partial_t u)(t)$, y si converge a algún estado final tipo kink. Si tal límite existe, hablamos de **Estabilidad Asintótica** del kink.

Antes de enunciar los resultados de este capítulo, un par de comentarios son relevantes. Primero, es importante notar que la solución $(u, \partial_t u)$ del Teorema 7.1 no puede converger al mismo $(H, 0)$ en $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, pues por conservación de la energía E en (5.8), u y H deben coincidir.

También, notemos que la pregunta de estabilidad asintótica en el caso del kink de la ecuación de Sine-Gordon (2.1) tiene respuesta negativa: existen soluciones cerca de $(K, 0)$ que nunca convergen a un estado final. Estas soluciones raras son explícitas (pero complicadas de escribir), y se llaman **wobbling kinks**. Ver por ejemplo [1] para más detalles.

¿Qué pasa para $(H, 0)$ en la ecuación ϕ^4 ? Tenemos la siguiente respuesta parcial, dada por Kowalczyk, Martel y Muñoz.

Teorema 8.1 (Estabilidad asintótica del kink de ϕ^4 , [4]). *Si (u_0, u_1) es impar y tal que la diferencia $\|(u_0, u_1) - (H, 0)\|_{H^1 \times L^2}$ es menor que ϵ pequeño, entonces para cualquier compacto $I \subset \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u, \partial_t u)(t) - (H, 0)\|_{(H^1 \times L^2)(I)} = 0,$$

donde $(u, \partial_t u)$ es la solución asociada al dato inicial (u_0, u_1) en $t = 0$.

Esto mismo nos dice que toda perturbación del kink debe escapar a infinito en espacio, cuando el tiempo se va a infinito. El mismo resultado es válido también para la ecuación Sine-Gordon. Esto no se contrapone al hecho de que existan wobbling kinks cerca del kink; éstos son pares, y el teorema es válido para datos iniciales impares solamente.

La demostración del resultado anterior es complicada, por lo que en estas notas nos contentaremos en probar un resultado mas simple, ya no en torno a kink, sino en torno al cero. Consideremos, a modo de ejemplo, la ecuación cúbica de NLKG:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u - u^3 = 0. \quad (\text{NLKG})$$

Entonces lo siguiente se cumple.

Teorema 8.2 (No existencia de breathers, [3]). *Si (u_0, u_1) es impar y tal que $\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} \leq \epsilon$ pequeño, entonces para cualquier compacto $I \subset \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^1 \times L^2(I)} = 0,$$

donde $(u, \partial_t u)$ es la solución de NLKG asociada al dato inicial (u_0, u_1) en $t = 0$.

En particular, este resultado nos demuestra que no existen breathers pequeños impares para NLKG. Sin embargo, la validez de este resultado no depende de la ecuación misma, siendo verdadera para un sin número de ecuaciones similares, entre ellas SG (recordar que el breather de SG es par en x).

8.1. Demostración del Teorema 8.2

Usaremos una técnica llamada **Virial**, procediendo por partes. El Virial será un funcional cuya evolución en tiempo permite controlar las cantidades que precisamente tenderán a cero a medida que el tiempo avance.

Paso 1. Primer cálculo. Consideremos el siguiente funcional dependiente del tiempo

$$\tilde{I}(t) := \int_{\mathbb{R}} \left(x \partial_t u \partial_x u + \frac{1}{2} u \partial_t u \right) dx. \quad (8.1)$$

$\tilde{I}(t)$ se inspira en la conservación del momento (ver (5.5))

$$P(u, \partial_t u) = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)(\partial_x u) dx = P(u_0, u_1) = \text{cte.}$$

Lema 8.3. *Se tiene*

$$\frac{d}{dt} \tilde{I}(t) = - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u^4}{4} dx. \quad (8.2)$$

Demostración. Calculemos la derivada de $\tilde{I}(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{I}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(x (\partial_t u)(\partial_x u) + \frac{1}{2} u \partial_t u \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(x (\partial_t^2 u)(\partial_x u) + x (\partial_t u)(\partial_t (\partial_x u)) + \frac{1}{2} (u \partial_t^2 u + (\partial_t u)^2) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x (\partial_x u)(\partial_x^2 u - u + u^3) dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{2} \partial_x ((\partial_t u)^2) dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx}_{\text{I.I.P ambos términos se anulan}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{2} (\partial_x^2 u - u + u^3) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{I}(t) &= \int_{\mathbb{R}} x \partial_x \left(\frac{(\partial_x u)^2}{2} \right) dx - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx}_{\text{I.I.P ambos se anulan}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} x \partial_x \left(\frac{u^4}{4} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u^4}{2} + \frac{u}{2} \partial_x^2 u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \partial_x \left(\frac{(\partial_x u)^2}{2} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u^4}{4} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{2} \partial_x^2 u dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u^4}{4} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x (u \partial_x u) dx}_{\text{I.I.P, se anula}} \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{u^4}{4} dx. \end{aligned}$$

Esto prueba finalmente (8.2). □

Paso 2. Generalización. Ahora, es necesario mejorar la identidad anterior colocando un peso φ general, que nos permita tomar datos solo del espacio de energía. Definamos ahora

$$I(t) := \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi \left(\frac{x}{\lambda} \right) \partial_t u \partial_x u + \frac{1}{2\lambda} \varphi' \left(\frac{x}{\lambda} \right) u \partial_t u \right) dx,$$

y con $\varphi = \tanh$ y $\lambda > 0$.

Lema 8.4. *Se tiene ahora que*

$$-\frac{d}{dt} I(t) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \text{sech}^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right) (\partial_x u)^2 - \frac{1}{4\lambda^3} \int_{\mathbb{R}} \text{sech}^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right) u^2 - \frac{1}{4\lambda} \int_{\mathbb{R}} \text{sech}^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right) u^4. \quad (8.3)$$

La demostración de este resultado la dejamos como ejercicio para el lector, que debe seguir los pasos de la prueba de (8.2).

Paso 3. Propiedad espectral. La parte clave de la demostración es la siguiente propiedad espectral, consecuencia de un análisis espectral fino: Si $(u, \partial_t u)$ es impar, entonces existe $c_0 > 0$ independiente de u y λ y tal que

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2 + \frac{1}{4\lambda^3} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{\lambda}\right) u^2 \geq \frac{c_0}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2.$$

Finalmente, usando una desigualdad de Poincaré bien escogida, junto a la condición $u(t, 0) = 0$, se tiene que el término $\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) u^4$ se puede controlar por $\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2$. Esencialmente llegamos a

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \tilde{I}(t) &\geq \frac{c_0}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2, \\ \implies \frac{c_0}{\lambda} \int_1^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2(t) dx \right) dt &\leq \tilde{I}(1) - \tilde{I}(+\infty) \leq C < \infty. \end{aligned}$$

Dado que integra en tiempo, existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ e $I = (-\lambda, \lambda)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \left\| (\partial_x u)(t_n) \right\|_{L^2(I)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_0}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_x u)^2(t_n, x) dx = 0, \quad (8.4)$$

ya que $\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \geq \operatorname{sech}^2(1) = c > 0$, si $x \in (-\lambda, \lambda)$.

Paso 4. Conclusión. Falta probar la convergencia a cero para toda sucesión de tiempo. Para ello se utiliza otro **virial** para obtener la siguiente igualdad (**ejercicio**)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 + u^2) - \frac{1}{4} u^4 \right) dx = \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sech}^2)'\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_t u)(\partial_x u) dx. \quad (8.5)$$

Por lo tanto, integrado ente t y t_n , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_t^{t_n} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 + u^2) - \frac{1}{4} u^4 \right) dx dt' \\ \leq \frac{C}{\lambda} \int_t^{t_n} \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sech}^2)'\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_t u)(\partial_x u) dx dt'. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Gracias a (8.4), y por el primer virial se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sech}^2)'\left(\frac{x}{\lambda}\right) (\partial_t u)(\partial_x u) dx \right) dt = 0, \quad (8.7)$$

de donde se concluye nuestro resultado.

8.2. Problemas propuestos

1. Siguiendo los pasos de la demostración de (8.2), pruebe (8.3).
2. Probar (8.5).

9. Estabilidad de Breathers

En la última parte del curso hablaremos sobre el **Breather** de la ecuación de Sine-Gordon (2.1):

$$B(t, x) := 4 \arctan \left(\frac{\beta \cos(\alpha t)}{\alpha \cosh(\beta x)} \right), \quad \alpha, \beta > 0 \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (9.1)$$

Ver Sección 3.4 para más detalles. Notar que si β es pequeño, entonces $B(t, x)$ también lo es. El propósito de este capítulo es dar una demostración del siguiente resultado de estabilidad de breathers:

Teorema 9.1 (Palacios -Muñoz, 2018). *El par $(B, \partial_t B)$ es orbitalmente estable bajo perturbaciones pequeñas en $(H^1 \times L^2)(\mathbb{R})$.*

Algunos comentarios importantes sobre este resultado son los siguientes:

- Para probar este resultado, usaremos una herramienta denominada la **Transformación de Bäcklund**.
- La demostración del Teorema 9.1 se utiliza la estabilidad del 0, i.e, si

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} < \varepsilon \quad \implies \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(u, u_t)(t)\|_{H^1 \times L^2} \lesssim \varepsilon, \quad (9.2)$$

donde $(u, u_t)(t)$ es la solución asociada a los datos iniciales (u_0, u_1) .

- Lo segundo es que si $B(t, x)$ es pequeño ($\beta \ll 1$ en (9.1)), el breather es un contraejemplo a la estabilidad asintótica del vacío 0 para la ecuación de Sine Gordon (2.1), pues **oscila indefinidamente y no decae**.

9.1. Idea de la demostración del Teorema 9.1

Como hemos dicho antes, la demostración de este teorema se basa en dos argumentos principales: en primer lugar la estabilidad del cero (9.2) y la transformación de Bäcklund. Con respecto al primer punto, la demostración de la estabilidad del 0 proviene de la conservación de la energía, como muestra el siguiente argumento cualitativo:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &\approx E(u_0, u_1) = E(u, \partial_t u)(t) \quad (\text{por (5.6)}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) + 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \cos(u))}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right) + 2 \int_{\mathbb{R}} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx \\ &\approx \|(u, \partial_t u)\|_{H^1 \times L^2}^2. \end{aligned}$$

Esto prueba (9.2).

La otra parte del argumento involucra la Transformación de Bäcklund:

Definición 9.1. Sean $(u, \partial_t u)$ y $(v, \partial_t v)$ dos funciones suficientemente regulares. Diremos que las dos funciones están relacionadas a partir de la transformación de Bäcklund para la ecuación Sine-Gordon, si verifican el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_x u - \partial_t v = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) + a \sin \left(\frac{u-v}{2} \right) \\ \partial_t u - \partial_x v = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) - a \sin \left(\frac{u-v}{2} \right), \end{cases} \quad (9.3)$$

para cierto $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ fijo.

Un resultado importante que satisfacen las soluciones de (9.3) es el siguiente:

Lema 9.2. *Ambas funciones (u, v) que satisfacen (9.3) son soluciones de la ecuación Sine Gordon (2.1).*

Demostración. Si derivamos la primera ecuación del sistema (9.3) con respecto a x y multiplicamos por (-1) mientras que en la segunda ecuación derivamos con respecto a t , se tiene que

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 u + \partial_x(\partial_t v) &= -\frac{1}{2a} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right)(\partial_x u + \partial_x v) - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)(\partial_x u - \partial_x v) \\ \partial_t^2 u + \partial_t(\partial_x v) &= \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right)(\partial_t u + \partial_t v) - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)(\partial_t u - \partial_t v). \end{aligned}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right)((\partial_t u - \partial_x v) + (\partial_t v - \partial_x u)) \\ &\quad - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)((\partial_x u - \partial_t v) + (\partial_t u - \partial_x v)) \\ &= \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \left(\frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) - a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) - a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \right) \\ &\quad - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \left(\frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) + a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) - a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \right) \\ &= -\left(\cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) + \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \right) = -\sin(u). \end{aligned}$$

Por tanto, $(u, \partial_t u)$ satisfacen la ecuación de Sine Gordon (2.1). El mismo cálculo sirve para probar que $(v, \partial_t v)$ satisfacen la ecuación (2.1). \square

El siguiente paso de la demostración es introducir los kinks complejos. Así como existe el **kink** $K(x) = 4 \arctan(e^x)$, existe su asociado **kink complejo**, dado por

$$\tilde{K}(t, x) := 4 \arctan(e^{\beta x + i\alpha t}), \quad \text{con} \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (9.4)$$

Notar que $\tilde{K}(t, x)$ resuelve la ecuación Sine-Gordon (2.1) (ejercicio). Además, en el límite $\beta \rightarrow 1^-$, $\alpha \rightarrow 0^+$, obtenemos el kink original $K(x)$. Nuestro siguiente paso es notar que $u(t, x) = \tilde{K}(t, x)$ y $v = 0$ están relacionados vía la Transformada de Bäcklund con parámetro $a = \beta - i\alpha$:

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{K} = \frac{1}{\beta - i\alpha} \sin\left(\frac{\tilde{K}}{2}\right) + (\beta - i\alpha) \sin\left(\frac{\tilde{K}}{2}\right), \\ \partial_t \tilde{K} = \frac{1}{\beta - i\alpha} \sin\left(\frac{\tilde{K}}{2}\right) - (\beta - i\alpha) \sin\left(\frac{\tilde{K}}{2}\right). \end{cases} \quad (9.5)$$

Además el conjugado $\overline{\tilde{K}}$ y 0 también están relacionados vía Bäcklund, con $a = \beta + i\alpha$

$$\begin{cases} \partial_x \overline{\tilde{K}} = \frac{1}{\beta + i\alpha} \sin\left(\frac{\overline{\tilde{K}}}{2}\right) + (\beta + i\alpha) \sin\left(\frac{\overline{\tilde{K}}}{2}\right), \\ \partial_t \overline{\tilde{K}} = \frac{1}{\beta + i\alpha} \sin\left(\frac{\overline{\tilde{K}}}{2}\right) - (\beta + i\alpha) \sin\left(\frac{\overline{\tilde{K}}}{2}\right). \end{cases} \quad (9.6)$$

El siguiente paso es mostrar que el **Breather** $B(t, x)$ y el **Kink complejo** \tilde{K} están relacionados vía la transformación de Bäcklund con $a = \beta + i\alpha$.

$$\begin{cases} \partial_x B - \partial_t \tilde{K} = \frac{1}{\beta + i\alpha} \sin\left(\frac{B + \tilde{K}}{2}\right) + (\beta + i\alpha) \sin\left(\frac{B - \tilde{K}}{2}\right), \\ \partial_t B - \partial_x \tilde{K} = \frac{1}{\beta + i\alpha} \sin\left(\frac{B + \tilde{K}}{2}\right) - (\beta + i\alpha) \sin\left(\frac{B - \tilde{K}}{2}\right). \end{cases} \quad (9.7)$$

donde, recordar que

$$\begin{cases} B(t, x) = 4 \arctan\left(\frac{\beta \cos(\alpha t)}{\alpha \cosh(\beta x)}\right), & \text{con } \alpha, \beta > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ \tilde{K}(t, x) = 4 \arctan(e^{\beta x + i\alpha t}), & \text{con } \alpha, \beta > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{cases}$$

Asimismo, conjugando (9.7) se tiene que $B(t, x)$ y $\overline{\tilde{K}}$ están relacionadas via la transformada de Backlund con parámetro $a = \beta - i\alpha$.

Por último, las ecuaciones perturbadas, que permiten probar finalmente la estabilidad, deben resolverse usando el **Teorema de la Función Implícita**, en torno a cada uno de los puntos $(0, K)$ y (K, B) . Este paso conlleva varias estimaciones complicadas, que el lector puede consultar en la publicación [7]. Sin embargo el diagrama de la Fig. 5 nos ayuda a entender la dinámica de la demostración:

$$\begin{array}{ccc} (B, B_t)(0) + (z_0, w_0) & \xrightarrow[\text{modulaciones}]{t} & (B, B_t)(t) + (z, w)(t) \\ \beta + i\alpha + \delta \downarrow & & \uparrow \beta - i\alpha + \tilde{\delta} \\ (K, K_t)(0) + (u_0, s_0) & & (\overline{K}, \overline{K}_t)(t) + (\bar{u}, \bar{s})(t) \\ \beta - i\alpha + \tilde{\delta} \downarrow & & \uparrow \beta + i\alpha + \delta \\ (y_0, v_0) & \xrightarrow[\text{Existencia global}]{t} & (y, v)(t) \end{array}$$

Figura 5: Diagrama de la demostración del Teorema de estabilidad de breathers (B, B_t) . Aquí (z_0, w_0) son las perturbaciones iniciales del breather, mientras que $(z, w)(t)$ son las perturbaciones en tiempo t .

9.2. Problemas propuestos

1. Encontrar los valores de tiempo $t = t_k$, $k \in \mathbb{Z}$ para los cuales $\partial_t \tilde{K}(t_k, x)$ sea singular.
2. Probar que fuera de estos tiempos t_k , el par $(\tilde{K}, \partial_t \tilde{K})$ en (9.4) resuelve SG (2.1).
3. Probar (9.5).
4. Probar (9.7).

Referencias

- [1] Sara Cuenda, Niurka R. Quintero and Angel Sánchez, Sine-Gordon wobbles through Bäcklund transformations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* **4** (2011), 1047–1056.
- [2] Daniel B. Henry, J. Fernando Perez, and Walter F. Wreszinski, Stability theory for solitary-wave solutions of scalar field equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), no. 3, 351–361 MR678151 (83m:35131).
- [3] M. Kowalczyk, Y. Martel, and C. Muñoz, Nonexistence of small, odd breathers for a class of nonlinear wave equations, *Lett. Math. Phys.* (2017) 107: 921.
- [4] M. Kowalczyk, Y. Martel, and C. Muñoz, Kink dynamics in the ϕ^4 model: asymptotic stability for odd perturbations in the energy space, *JAMS* **30** (2017), 769–798.
- [5] F. Linares, and G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Second Ed. Universitext Springer, 2015.
- [6] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe, Topological solitons, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [7] C. Muñoz, and J. M. Palacios, Nonlinear Stability of Sine-Gordon 2-solitons in the energy space, por aparecer en *Ann. IHP Analyse nonlinéaire* (2018).
- [8] M.I. Weinstein, Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation. *Comm. Partial Differential Equations* **12** (1987), no. 10, 1133–1173.