Lección n°3: Demostración del criterio de Serrin.
Parte 2: Regularidad de la ecuación del calor.

Escuela Politécnica
Nacional 2023

1. Introducción

Recordemos que, en la lección anterior obtuvimos la siguiente ecuación de la vorticidad

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - div(\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}.$$

Similarmente, como mencionamos en la lección anterior, vamos aplicar ciertas estimaciones de regularidad de la ecuación del calor, con el fin de obtener una ganancia en la regularidad de la vorticidad. Posteriormente, usaremos esta información para mejorar la regularidad de la velocidad $\vec{u}$.

Así, en esta leccion nos centraremos principalmente en recordar ciertos resultados alrededor de la ecuación del calor

2. La ecuación del calor

Estudiemos en primer lugar la regularidad de la solución de la ecuación del calor, en efecto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Sea $v : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real tal que*

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v + f, \\ v(0, \cdot) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una fuerza exterior que pertenece a $L^2([0, T[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ con $0 < T < +\infty$. Entonces, tenemos que

$$\|v\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} \quad y \quad \|v\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x}.$$

La idea de la demostración consiste en tomar ventaja de los efectos regularisantes del núcleo del calor el cual está dado por

$$\mathfrak{g}_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ , si } t > 0, \\ 0 \text{ si } t < 0. \end{cases}$$

Así, primero mostraremos ciertos lemas técnicos

Lema 1 *1. Si $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ entonces $\mathfrak{g}_t * \vec{f} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ y se tiene que*

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{f}\|_{L^2}.$$

2. Si $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ entonces $\mathfrak{g}_t * \vec{f} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ y además

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\vec{f}\|_{L^2}.$$

Prueba. Fijemos $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, una fuerza exterior.

1. Notemos que por la desigualdad de Young, tenemos que

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L^2_x} \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1_x} \|\vec{f}\|_{L^2_x} = \|\vec{f}\|_{L^2_x}. \tag{2}$$

Así, se sigue que

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{f}\|_{L^2}.$$

2. Con respecto al punto dos, usando la identidad de Plancherel, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|^2_{L^2_t \dot{H}^1_x} = \int_0^{+\infty} \|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|^2_{\dot{H}^1_x} dt &= \int_0^{+\infty} \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{g}_t * \vec{f})\|^2_{L_2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left\| |\xi| (\widehat{h}_t \cdot \widehat{\vec{f}}) \right\|^2_{L_2} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 \int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} dt d\xi \\
&\leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 2 *Sea $\vec{f} \in L^2([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$. Definimos $\vec{F}(t,x) = \int_0^t h_{t-s} * \vec{f}(s,x) ds$. Entonces, tenemos que*

1. $\|\vec{F}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} \leq C \|\vec{f}\|_{L^2_t L^2_x}$,
2. $\|\Delta \vec{F}\|_{L^2_t L^2_x} \leq C \|\vec{f}\|_{L^2_t L^2_x}$.

Prueba. Vamos a demostrar solamente el punto 1, para una demostración del punto dos referimos a [1]. Para ello, notemos que usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el teorema de Fubini y el lema precedente, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|\vec{F}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} &= \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{F}(t,x) \cdot \vec{\phi}(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (h_{t-s} * f(s,x)) ds \cdot \vec{\phi}(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (h_{t-s} * \vec{\phi}) \cdot \vec{f}(s,x) dx ds \right| \\
&\leq \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \left| \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} (h_{t-s} * \vec{\phi})\|_{L^2} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2_x} dx ds \right| \\
&\leq \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \|(h_{t-s} * \vec{\phi})\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2_t L^2_x} \\
&\leq C \sup_{\|\vec{\phi}\|_{L^2}} \|\vec{\phi}\|_{L^2} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2_t L^2_x} = C \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2_t L^2_x}.
\end{aligned}
$$

■

Prueba de la Proposición 2.1. Utilizando la formulación integral, o formula de Duhamel, la solución se puede reescribir como $v(t,x) = \displaystyle\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s,x) ds$, donde $\mathfrak{g}_t$ es el núcleo del calor. Así tenemos para todo $t \in [0,T]$,

$$
\|v(t,\cdot)\|_{L^2} = \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s,\cdot) ds \right\|_{L^2} = \left\| \int_0^t (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{g}_{t-s} * \frac{f(s,\cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} ds \right\|_{L^2} = \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \frac{f(s,\cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} ds \right\|_{\dot{H}^1}
$$

Utilizando las estimaciones para el núcleo del calor obtenemos que

$$
\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C \left\| \frac{f}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L^2_t L^2_x} = C \|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x},
$$

lo que implica a su vez que $\|v\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C \|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x}$. Para la segunda parte, reescribimos

$$
\|v\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} = \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_t L^2_x} = \left\| \Delta \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \frac{f(s,\cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} ds \right\|_{L^2_t L^2_x},
$$

y par la regularidad maximal del núcleo del calor, obtenemos que

$$\|v\|_{L^2_t\dot{H}^1_x} \leq C \left\| \frac{f}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L^2_t L^2_x} = C\|f\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x},$$

lo que termina la demostración del teorema ■

Observación 2.1 *Notemos que la información que poseemos sobre $\vec{f}$ inicialmente es $L^2_t\dot{H}^{-1}_x$, y sin embargo podemos ver que la solución v de la ecuación del calor pertenece a $L^\infty_t L^2_x$ y $L^2_t\dot{H}^1_x$. Se tiene en efecto una ganancia de regularidad con respecto a la información que tenemos sobre la fuerza exterior. Esto es realidad el efecto regularizante del núcleo del calor.*

3. Una ganancia de regularidad para la vorticidad

Teniendo a la mano la información sobre la ecuación del calor, recordemos que podemos reescribir la ecuación de la vorticidad como

$$\partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{g}. \tag{3}$$

con

$$\vec{g} = -div(\vec{u}\otimes\vec{\omega} - \vec{\omega}\otimes\vec{u}) + \vec{\nabla}\wedge\vec{f}, \tag{4}$$

Así, la idea consiste en estudiar que propiedades posee la fuerza exterior $\vec{g}$. Para ellos tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.1 *Sean $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r) \cap L^2_t\dot{H}^1_x(Q_r)$ y $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(Q_r)$ dos campos vectoriales. Si tenemos que*

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega),$$

entonces la función

$$\vec{g} = -div(\vec{u}\otimes\vec{\omega} - \vec{\omega}\otimes\vec{u}) + \vec{\nabla}\wedge\vec{f},$$

pertenece a $L^2(]t-r,t[,\dot{H}^{-1}(B_{r'}))$, con $0 < r' < r$.

Prueba. Empecemos verificando que tenemos $\vec{\nabla}\wedge\vec{f} \in L^2(]t-r',t[,\dot{H}^{-1}(B_{r'}))$. Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ tal que para $0 < r' < r$

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{en } B_{r'}, \\ 0 & \text{en } \{y \in \mathbb{R}^3 : |y-x| \geq r'\}. \end{cases} \tag{5}$$

Primero notemos que *supp* $(\phi) \subset B_{r'}$. Así, debemos verificar que para todo $1 \leq i,j \leq 3$ se tiene que

$$\phi\partial_{x_i} f_j(t,\cdot) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3).$$

Dado que podemos reescribir $\phi(\partial_{x_i} f_j) = \partial_{x_i}(\phi f_j) - (\partial_{x_i}\phi) f_j$ tenemos

$$\|\phi\partial_{x_i} f_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq \|\partial_{x_i}(\phi f_j)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi) f_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)},$$

luego, usando el dual de la imersión $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ y la desigualdad de Young se sigue que

$$\|\phi\partial_{x_i} f_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\phi\|f_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'}))} \leq C_\phi\|f_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_r)}.$$

Finalmente considerando la norma L^2 en variable temporal, se sigue que $\vec{\nabla}\wedge\vec{f} \in L^2_t\dot{H}^{-1}_x(Q_{r'})$.

Ahora, vamos a provar que

$$div(\vec{u}\otimes\vec{\omega} - \vec{\omega}\otimes\vec{u}) \in L^2_t\dot{H}^{-1}_x(\Omega_{r'}).$$

Es claro que usando la definición de la divergencia de un tensor es suficiente mostrar que $\partial_{x_i}(w_j u_k) \in \dot{H}^{-1}(B_{r'})$) para todo $1 \leq i,j,k \leq 3$. Así, utilizando la misma función localizante ϕ définida en (5). debemos verificar que $\phi\partial_{x_i}(w_j u_k) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Utilizando los mismos argumentos que en el caso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\phi\partial_{x_i}(w_j u_k)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\partial_{x_i}(\phi w_j u_k)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi) w_j u_k(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|\phi w_j u_k(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|(\partial_{x_i}\phi) w_j u_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Hölder con $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\phi\partial_{x_i}(w_j u_k)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\phi w_j u_k(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})} + C\|(\partial_{x_i}\phi) w_j u_k\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_{r'})} \\ &\leq \|\phi w_j u_k(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})} \\ &\quad + C\|(\partial_{x_i}\phi) u_k(t,\cdot)\|_{L^3(B_{r'})} \|w_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})}, \end{aligned}$$

y dado que $\vec{u}(t,\cdot) \in L^\infty(B(x_0,r))$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\phi\partial_{x_i}(w_j u_k)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\phi\|_{L^\infty(B_{r'})} \|w_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})} \|u_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{r'})} \\ &+ C\|\partial_{x_i}\phi\|_{L^3(B_{r'})} \|u_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{r'})} \|w_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})} \\ &\leq C_\phi \|w_j(t,\cdot)\|_{L^2(B_{r'})} \|u_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(B(x_0,r))}. \end{aligned}$$

lo cual, dado que la vorticidad pertenece a $L^2_t L^2_x(\Omega_\varepsilon)$ concluimos que

$$\|div(\vec{u}\otimes\vec{\omega})\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x(\Omega)} \leq C\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)} \|\vec{\omega}\|_{L^2_t L^2_x(\Omega_\varepsilon)} < +\infty.$$

Así, por estas estimaciones, obtenemos que el vector $\vec{g}$ definido en (4) pertenece al espacio $L^2_t \dot{H}^{-1}_x(\Omega_{r'})$. ■

Observación 3.1 *Es claro que existe una redución del domonio de estudio con respecto a la variable espacial dado que la información obtenida para la función $\vec{g}$ está dada sobre el conjunto $[t-r^2,t] \times B_{r'} \subset Q_r$.*

4. Ganancia de regularidad para la vorticidad

Podemos observar que la ecuación relacionada a la vorticidad, se aproxima a la de la ecuación del calor en el cuadro de la Proposición 2.1. Sin embargo, dado que la información que se necesita sobre la fuerza exterior es global y la información que tenemos es local, para poder aplicar dicha proposición, además debemos pasar por un proceso de localización. Para ello, consideramos la función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ tal que para c $0 < \rho < r$ tenemos

$$\varphi \equiv 1 \quad sobre \quad]t - \frac{\rho^2}{4}, t + \frac{\rho^2}{4}[\times B_\rho \quad y \quad supp(\varphi) \subset]t-\rho^2, t+\rho^2[\times B_\rho$$

Luego, si consideramos

$$\vec{W} = \varphi\vec{\omega},$$

podemos ver inmediatamente que por construcción se tiene que

$$\vec{W}(0,x) = 0.$$

Como vimos anteiormente se puede deducir facilmente a partir de las hipótesis de $\vec{u}$ que

$$\vec{W} \in L^2_t L^2_x([0, t+\rho^2[\times\mathbb{R}^3) \qquad \text{y} \qquad \vec{W} \in L^2_t \dot{H}^{-1}_x([0,\rho^2[\times\mathbb{R}^3) \tag{6}$$

y es justamente está información la que podemos mejorar utilizando las estimaciones del calor. Para ello, vamos a estudiar la écuacion que dicha función verifica. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t\vec{W} &= \partial_t(\varphi\vec{\omega}) = (\partial_t\varphi)\,\vec{\omega} + \varphi\,\partial_t\vec{\omega} = \partial_t\varphi\,\vec{\omega} + \varphi(\Delta\vec{\omega} + \vec{g}) \\ &= \varphi\,\Delta\vec{\omega} + \varphi\,\vec{g} + (\partial_t\varphi)\,\vec{\omega}. \end{aligned}$$

donde el término $\vec{g}$ esta dado en (4).

Componente por componente, se tiene que para todo $i = 1, 2, 3$,

$$\partial_t W_i = \varphi\, \Delta\omega_i + \varphi\, g_i + (\partial_t \varphi)\, \omega_i.$$

Luego, utilizando la identidad $\Delta(fg) = (\Delta f)g - (\Delta g)f + 2div((\vec{\nabla} g)f)$ podemos reescribir la ecuación de la manera siguiente

$$\partial_t W_i = \Big(\Delta(\varphi\omega_i) + (\Delta\varphi)\omega_i - 2div((\vec{\nabla}\varphi)\omega_i)\Big) + \varphi\, g_i + (\partial_t\varphi)\, \omega_i,$$

y dado que $\vec{W} = \varphi\vec{\omega}$, podemos escribir

$$\begin{cases} \partial_t W_i = \Delta W_i + F_i, \\ W(0, x) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

donde

$$F_i = (\partial_t\varphi + \Delta\varphi)\omega_i - 2div((\vec{\nabla}\varphi)\omega_i) + \varphi\, g_i, \tag{8}$$

para $1 \leq i \leq 3$.

Entonces, la idea consiste en aplicar la Proposición 2.1 a la ecuación (7), lo cual nos permite obtener información sobre la regularidad de la función $\vec{W}$. Así, debemos mostrar que cada término F_i dado en (8), se tiene que $F_i \in L^2([0, t[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$. En efecto, tenemos los siguientes puntos

- Los términos $(\Delta\varphi)\omega_i$ y $(\partial_t\varphi)\, \omega_i$ se tratan de manera similar, por lo cual es suficiente estudiar la expresión $(\Delta\varphi)\omega_i$. Así, usando la inmersión $L^{\frac{6}{5}} \subset \dot{H}^{-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\Delta\varphi)\omega_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq C\|(\Delta\varphi)\omega_i(t,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|\Delta\varphi(t,\cdot)\|_{L^3(B_\rho)}\|\omega_i(t,\cdot)\|_{L^2(B_\rho)}, \end{aligned}$$

  de manera que tomando la norma L^2 en la variable temporal en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \|(\Delta\varphi)\omega_i\|_{L^2([0,b[,\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))} &\leq C\|\Delta\varphi\|_{L^\infty(]0,b[,L^3(B_\rho))}\|\omega_i\|_{L^2(]\alpha,b[,L^2(B_\rho))} \\ &\leq C_\varphi\|\omega_i\|_{L^2_t L^2_x(Q_r)}. \end{aligned}$$

  y dado que $\vec{\omega} \in L^2_t L^2_x(Q_r)$, concluimos que

$$(\Delta\varphi)\omega_i,\ (\partial_t\varphi)\omega_i \in L^2([0, t[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)).$$

- Para el término $div((\vec{\nabla}\varphi)\omega_i)$, se tiene que

$$\|div((\vec{\nabla}\varphi)\omega_i)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq \|(\vec{\nabla}\varphi)\omega_i(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\vec{\nabla}\varphi(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_\rho)}\|\omega_i(t,\cdot)\|_{L^2(B_\rho)},$$

  así con las propiedades de la función φ y el hecho que tenemos $\omega \in L^2_t L^2_x(Q_\rho)$, si aplicamos la norma L^2 en la variable temporal, podemos concluir que

$$div((\vec{\nabla}\varphi)\omega_i) \in L^2([0, t[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)).$$

- Para el termino$\varphi\ g_i$, nosotros sabemos que $g_i \in L^2([0, b], \dot{H}^{-1}_x(B_{r'})$. Así, usando el soporte de las de la función φ podemos deducir sin problema que

$$\varphi\, g_i \in L^2([0, t[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)).$$

Entonces, hemos verificado que cada componente de las funciones F_i dades en la expresión (8) perteneces al espacio $L^2([0, b[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$, lo que nos permite obtener las siguientes estimaciones

$$\|W_i\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\|F_i\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} < +\infty \quad \text{et} \quad \|W_i\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq \|F_i\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} < +\infty.$$

Así, dado que $W_i = \varphi\omega_i \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$, usando las propiedades de las funciones φ, podemos concluir la siguiente ganancia de regularidad para la vorticidad

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, L^2(B_\rho) \cap L^2(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, \dot{H}^1(B_\rho).$$

Podemos ver, en efecto que hemos obtenido una ganancia de derivada en la variable espacial.

Así, en la proxima lección veremos como podemos inyectar esta información para obtener una ganancia de regularidad para la velocidad $\vec{u}$.

Referencias

[1] D. Chamorro. *Introduction aux équations de Navier-Stokes.* hal:03487812v2

[2] P.G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* Chapman & Hall/CRC. (2016).

[3] J. Robinson. *An introduction to the classical theory of the Navier– Stokes equations.* Lecture notes, IMECC-Unicamp. (2010).