Lección n°4: Rápida introducción a las distribuciones temperadas

EPN, agosto 2019

Índice

1. Introducción

El objetivo de esta lección es hacer un corta introducción al espacio de las distribuciones temperadas que notaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Este espacio es muy útil en el análisis armónico pues, entre algunas razones, este es el espacio funcional más grande en donde podemos definir la transformación de Fourier. Veremos además que el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ será la base para introducir los espacios de Sobolev que estudiaremos en la siguiente lección.

2. El espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Para definir el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, recordemos rápidamente que la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (introducida en la Lección n°2) es un espacio vectorial topólogico localmente convexo dotado la familia de semi-normas $\rho_{a,b}$, donde, para $a, b \in \mathbb{N}^n$ multi-indices y para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la cantidad $\rho_{a,b}(\varphi)$ está definida por la expresión

$$\rho_{a,b}(\varphi) = \|x^a \partial^b \varphi\|_{L^\infty}.$$

Definición 1 *(El espacio de las distribuciones temperadas) Definimos el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como el espacio dual topológico de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

$\Rightarrow$ En la practica resulta muy útil la siguiente caracterización de las distribuciones temperadas:

Un funcional lineal sobre la clase de Schwartz $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, es una distribución temperada si y solo si existe una constante $C > 0$ y existen $k, m \in \mathbb{N}$ tales que para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\left|\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}\right| \le C \sum_{[a]\le k,\, [b]\le m} \rho_{a,b}(\varphi), \tag{1}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$ denota en corchete de dualidad entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplos:

i) Toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p \le +\infty$. En este caso el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$ se escribe como

$$\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

ii) Toda función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface $|f(x)| \leq c(1+|x|)^s$ donde $c>0$ es una constante y $s\in\mathbb{R}$. De igual manera que el ejemplo anterior, el corchete de dualidad se escribe

$$\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

iii) Un ejemplo de distribución temperada que no es una función (pero si una medida) está dada por la masa de Dirac en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, notada por δ_{x_0}, y que se define como

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \varphi(x_0), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particular, si $x_0 = 0$ se tiene $\langle \delta_0, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \varphi(0)$.

iv) De manera más general, toda medida boreliana finita μ es una distribución temperada. El corchete de dualidad se escribe como

$$\langle \mu, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

v) La medida de Lebesgue dx, que es una medida boreliana *no finita*, también es una distribución temperada. En este caso el corchete de dualidad se escribe como

$$\langle dx, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

vi) Finalmente, un ejemplo de distribución temperada sobre la recta real $\mathbb{R}$, que no es ni una función ni una medida, está dado por el valor principal de la función de la función $\frac{1}{x}$, notado por $v.p.\frac{1}{x}$, y que está definida como:

$$\left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Es importante ahora dar un ejemplo de un objeto que no es una distribución temperada. Consideremos la función

$$h(x) = e^{|x|^2}. \tag{2}$$

Podemos ver sin ningún problema que para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene $h \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pero esta función *no es una distribución temperada*: si suponemos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces por (1) sabemos que existen $C>0$ y $k,m\in\mathbb{N}$ tales que para todo $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\left|\langle h, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}\right| \leq C \sum_{[a]\leq k, [b]\leq m} \rho_{a,b}(\varphi) < +\infty.$$

Ahora, si consideramos en particular la función $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, entonces obtenemos inmediatamente una contradicción pues se tiene

$$\langle h, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2}e^{-|x|^2}dx = +\infty.$$

Observación 1 *El ejemplo i) nos muestra que se tiene la inclusión $L^p(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq +\infty$. Sin embargo, el ejemplo dado por la función $h(x)$ en la fórmula (2) nos muestra que los espacios de funciones localmente integrables $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no están incluidos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

En la Lección n°3 se introdujo el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y es natural preguntarse cuál es la relación entre este espacio y el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se tiene así la inclución *estricta*

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \qquad (3)}$$

- $\Rightarrow$ Esta inclusión se sigue del hecho que se tiene $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y entonces al tomar la dualidad *cambiamos* el orden de esta inclusión teniendo de esta manera $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ (recordar que por definicion se tiene $(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$).
- $\Rightarrow$ Para observar que esta inclusión es estricta resulta útil el ejemplo dado en la fórmula (2). En efecto que se tiene $h \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$, pues $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pero $h \notin \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$.

Antes de pasar a la siguiente sección, recordemos tres operaciones básicas en el espacio de las distribuciones temperadas que nos serán de utilidad. Sea $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$:

- **Derivación:** para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^n$ se define $\partial^a u$ mediante el corchete de dualidad como:

$$\langle \partial^a u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = (-1)^{[a]} \langle u, \partial^a \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

- **Convolución con una función en la clase de Schwartz:** sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y denotemos por $\widetilde{\psi}$ su reflexión respecto al origen, es decir, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x)$. Definimos la convolución $\psi * u$ como

$$\langle \psi * u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \left\langle u, \widetilde{\psi} * \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Con respecto a la convolución entre una distribución temperada y una función en la clase se Schwartz se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sean $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sea la distribución $\psi * u$ definida aquí arriba. Entonces $\psi * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, si la distribución u es a soporte compacto entonces $\psi * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

- **Multiplicación con una función en la clase de Schwartz:** sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos el producto ψu como

$$\langle \psi u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \psi \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Una vez que hemos introducido rápidamente el espacio de las distribuciones temperadas podemos definir la transformación de Fourier sobre este espacio.

3. La transformación de Fourier en $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$

Como indicamos en la introducción, una de las razones por las cuales el espacio de las distribuciones temperadas es de gran utilidad reposa en el hecho que este espacio nos provee un marco de trabajo bastante general en donde podemos definir la transformación de Fourier la cual resulta ser una herramienta muy útil en el análisis armónico y en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Para empezar debemos definir la transformación de Fourier en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pero, recordando que se tiene la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces es natural definir la transformación de Fourier (y su transformación inversa) de la misma forma que fue definida en el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$ en la Lección n°2. Tenemos así la siguiente definición:

Definición 2 *(Transformacion de Fourier en la clase de Schwartz) Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

*1) **Transformación de Fourier:** la tranformación de Fourier de la función φ, denotada por $\widehat{\varphi}$, se define como*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\, ix\cdot\xi} \varphi(x) dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

*2) **Transformación de Fourier inversa:** la tranformación de Fourier inversa de la función φ, denotada por $(\varphi)^\vee$, se define como*

$$(\varphi)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi\, ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

⇒ Es evidente notar que por la relación $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformación de Fourier en la clase de Schwartz verifica todas las propiedades expuestas en la Lección n°2.

⇒ La definición de transformación de Fourier y de transformación de Fourier inversa, introducidas en el marco de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, pueden ser extendidas al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mediante el corchete de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$.

Definición 3 *(Transformacion de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas) Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

*1) **Transformación de Fourier:** la tranformación de Fourier de la distribución temperada u, denotada por $\widehat{u}$, se define como*

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

donde la expresión $\widehat{\varphi}$ está dada en la Definición 2.

*2) **Transformación de Fourier inversa:** la tranformación de Fourier inversa de la distribución temperada u, denotada por $(u)^\vee$, se define como*

$$\left\langle (u)^\vee, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \left\langle u, (\varphi)^\vee \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{7}$$

donde la expresión $(\varphi)^\vee$ está dada en la Definición 2.

Observación 2 *Dada la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces, para toda función $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que las definiciones de la transformación de Fourier de esta función vista como elemento de la clase de Schwartz y como distrunción temperada coinciden.*

En efecto, para mayor claridad en la exposición, notemos por un momento $\mathcal{F}(\psi)$ la transformación de Fourier de ψ vista como elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver la Definición 3) y notemos por $\widehat{\psi}$ la transformación de Fourier de ψ vista como elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ver la Definición 2). Entonces mostraremos la identidad $\mathcal{F}(\psi) = \widehat{\psi}$. Por la formula (6) se tiene para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \mathcal{F}(\psi), \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle \psi, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Recordemos ahora que por la Definición 2 se tiene $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \eta \cdot x} \varphi(\eta) d\eta$, y entonces en la identidad precedente escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i \eta \cdot x} \varphi(\eta) d\eta \right) dx,$$

donde, por el teorema de Fubini y por la Definición 2 se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \eta \cdot x} \varphi(\eta) d\eta \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i \eta \cdot x} \psi(x) dx \right) \varphi(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\eta) \varphi(\eta) d\eta = \langle \widehat{\psi}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

Vemos entonces que, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la identidad $\langle \mathcal{F}(\psi), \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle \widehat{\psi}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ y entonces $\mathcal{F}(\psi) = \widehat{\psi}$.

⇒ Usando el corchete de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$, podemos extender la mayoría de propiedades de la transformación de Fourier sobre la clase se Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En la siguiente proposición enunciamos algunas de estas propiedades que son usadas frecuentemente:

Proposición 1 *Sea $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$, sea $\widehat{u}$ su transformación de Fourier dada en la formula (6) y sea $(u)^{\vee}$ su transformación de Fourier inversa dada en la formula (7). Entonces se tiene las siguientes propiedades que serán enunciadas para la transformación de Fourier $\widehat{u}$ pero que también se verifican para la transformación inversa $(u)^{\vee}$.*

1) ***Isomorfismo en $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$:*** *se tiene $\widehat{u} \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ y $(u)^{\vee} \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$.*

2) ***Inversión:*** *$(\widehat{u})^{\vee} = \widehat{(u)^{\vee}} = u$.*

3) ***Convolución:*** *sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene $\widehat{\psi * u} = \widehat{\psi}\widehat{u}$.*

4) ***Derivación:*** *sea $a \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, entonces se tiene $\widehat{\partial^a u} = (2\pi i \xi)^a \widehat{u}$ y $\partial^a \widehat{u} = (\widehat{(-2\pi i x)^a u})$.*

$\Rightarrow$ Todas estas identidades deben entenderse en el sentido de las distribuciones temperadas, es decir, dadas $u, v \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $u = v$ si y solo si:

$$\boxed{\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle v, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (8)}$$

$\Rightarrow$ En el punto 3) podemos observar que la transformación de Fourier *cambia* el producto de convolución con la multiplicación, mientras que en el punto 4) observamos que la transformación de Fourier *cambia* la derivación por la multiplicación por un polinomio del mismo orden de la derivación.

$\Rightarrow$ Estas propiedades de la transformación de Fourier son muy utiles ya sea cuando usamos esta transformación para el estudio de las soluciones ciertas ecuaciones en derivadas parciales o cuando usamos esta transformación para definir los espacios de Sobolev como lo veremos en la siguiente lección.

Ejemplos: veamos ahora algunos ejemplos interesantes de la transformación de Fourier de algunas distribuciones temperadas. Indiquemos además que todas estas identidades deben entenderse en el sentido de las distribuciones dada en la fórmula (8).

i) Polinomios. Sea el polinomio de orden $k \in \mathbb{N}$: $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} x^{\alpha}$, donde α es un multi-indice y $x \in \mathbb{R}^n$. Se tiene para $c_\alpha \in \mathbb{C}$ constantes:

$$\widehat{P} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

ii) Masa de Dirac: se tiene

$$\widehat{\delta_0} = 1.$$

iii) Medida de Lebesgue: se tiene

$$\widehat{dx} = \delta_0.$$

iv) Valor principal de $\frac{1}{x}$: se tiene

$$\widehat{v.p.\frac{1}{x}} = -i\pi sign(\xi),$$

donde $sign(\xi)$ denota la función singo, es decir,

$$sign(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \xi > 0, \\ 0, & \text{si} \quad \xi = 0, \\ -1, & \text{si} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

4. Algunos resultados de las distribuciones temperadas y su transformacion de Fourier

4.1. Transformación de Fourier de las distribuciones homogéneas

En la practica es a menudo muy útil calcular la transformación de Fourier de distribuciones del tipo $|x|^z$ donde z es (de manera general) un parámetro real. Ilustremos esto con un ejemplo. Consideremos una función $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y el objetivo es hallar una solución f de la ecuación de Poisson no homogénea en todo el espacio $\mathbb{R}^n$:

$$-\Delta f(x) = \psi(x). \tag{9}$$

A priori no tenemos ninguna pista sobre cómo hallar la solución f, pero dado que estamos trabajando en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ una idea (que resulta ser fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales) consiste en utilizar la transformación de Fourier para obtener valiosa información sobre la estructura que deberá la solución f.

Es muy importante resaltar el hecho que los cálculos que haremos a continuación *no son rigurosos* pero, como ya se mencionó, nos proporcionan valiosa información sobre la solución de este problema que luego se deberá estudiar con toda rigurosidad.

Tomando entonces la transformación de Fourier en cada lado de la expresión (9) obtenemos (formalmente)

$$\widehat{-\Delta f}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi). \tag{10}$$

Luego, aplicando las propiedades de la transformación de Fourier con respecto a la derivación, un cálculo directo muestra que se tiene

$$\widehat{-\Delta f}(\xi) = c|\xi|^2 \widehat{f}(\xi),$$

donde $c > 0$ es una constante, y entonces, reemplazando esta identidad en el lado izquierdo de la expresión (10) obtenemos

$$c|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi).$$

A partir de esta identidad vemos que la transformación de Fourier de la solución que estamos buscando debe entonces escribirse como

$$\widehat{f}(\xi) = c|\xi|^{-2} \widehat{\psi}(\xi),$$

para $\xi \neq 0$, y ahora, tomando (siempre formalmente) la transformación de Fourier inversa y usando sus propiedades se tiene entonces que la solución deberá escribirse en variable espacial como

$$f(x) = \left((|\cdot|^{-2})^{\vee} * \psi \right)(x). \tag{11}$$

El lado derecho de esta identidad nos permite hacer las siguientes observaciones:

⇒ Vemos en este ejemplo que las distribuciones del tipo $|x|^z$ (con $z \in \mathbb{R}$) pueden aparecer de manera natural en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales y por tanto es necesario hacer un estudio más riguroso de este tipo de distribuciones.

⇒ Es también necesario poder calcular la transformación de Fourier y su transformación inversa para este tipo de distribuciones.

Estas observaciones motivan a realizar es siguiente estudio. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición 4 (Distribución homogénea) *Sea $z \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ la dimensión de $\mathbb{R}^n$.*

1) Si $z > -n$, definimos la distribución homogénea $\Phi_z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como:

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = c_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x)\, dx, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2) Si $z \leq -n$, sea $N \in \mathbb{N}$ el más pequeño número natural tal que $z > -N - n - 1$. En este caso definimos la distribución homogénea Φ_z como:

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = c_{z,n} \int_{|x|\leq N} |x|^z \left(\varphi(x) - \sum_{|a|\leq N} \frac{\partial^a \varphi(0)}{a!} x^a \right) dx + \sum_{|a|\leq N} b_{a,n,z} \langle \partial^a \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} + \int_{|x|\geq N} |x|^z \varphi(x) dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; y donde $c_{z,n}, b_{a,n,z} \in \mathbb{R}$ son constantes.

$\Rightarrow$ En el punto 1) de esta definición podemos observar que si $z > -n$ entonces la distribución Φ_z coincide con la función localmente integrable $|\cdot|^z$.

$\Rightarrow$ Este no es el caso cuando $z \leq -n$ y en el punto 2) de esta definición podemos observar que para estos valores del parámetro z la distribución Φ_z coincide con la función $|\cdot|^z$ **fuera del origen**.

Este hecho se debe a que para los valores del parámetro $z \leq -n$ la función $|\cdot|^z$ no es localmente integrable (de manera más precisa no es integrable en el origen) y por lo tanto, como observamos en el punto 2) de esta definición, se debe tener más precaución con la definicion de la distribución Φ_z cerca del origen. Veamos un ejemplo y consideremos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq 1$. Si definimos la distribución Φ_z simplemente como la función $|\cdot|^z$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Phi_z, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} &= c_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x) dx = c_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z \varphi(x) dx + c_{z,n} \int_{|x|>1} |x|^z \varphi(x) dx \\ &= c_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z dx + c_{z,n} \int_{|x|>1} |x|^z \varphi(x) dx,\end{aligned}$$

pero, como $z \leq -n$ entonces, pasando a coordenadas radiales, se observa que se tiene

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^z dx = +\infty.$$

Veamos ahora el siguiente resultado:

Teorema 2 (Transformación de Fourier de las distribuciones homogéneas) *Sea $z \in \mathbb{R}$ y sea $\Phi_z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la distribución homogénea dada en la Definición 4. Se tiene la siguiente identidad en el sentido de las distribuciones:*

$$\widehat{\Phi_z} = \Phi_{-(n+z)}. \tag{12}$$

$\Rightarrow$ Este resultado nos dice simplemente que la transformacion de Fourier de la distribución homogénea de orden z: Φ_z, es la distribución homogénea de orden $-(n+z)$: $\Phi_{-(n+z)}$.

Volvamos ahora al ejemplo de la ecuación (9). En la fórmula (11) vimos que la solución se escribe (al menos formalmente) como $f(x) = \left((|\cdot|^{-2})^\vee * \psi \right)(x)$; y ahora tenemos todas la herramientas para calcular la expresión $(|\cdot|^{-2})^\vee$. Para simplificar este ejemplo supondremos (solo en este parte del documento) que $n \geq 3$ pues como lo explicaremos más adelante el caso $n = 2$ es un poco más delicado a tratar.

Se quiere calcular la expresión $(|\cdot|^{-2})^\vee$ y para ello observemos en primer lugar que tomando la transformación de Fourier inversa en la identidad (12) se tiene (en el sentido de las distribuciones)

$$\Phi_z = (\Phi_{-(n+z)})^\vee.$$

Luego, en esta identidad buscamos un valor del parámetro tal que $-2 = -(n+z)$ de donde se tiene la relación

$$z = 2 - n,$$

de donde se tiene

$$\Phi_{2-n} = (|\cdot|^{-2})^{\vee}.$$

Notemos además que se verifica $2-n > -n$ y entonces, por el punto 1) de la Definición 4, la distribución Φ_{2-n} coincide con la función localmente integrable $|\cdot|^{2-n}$; obteniendo de esta forma para $n \geq 3$

$$|\cdot|^{2-n} = c(|\cdot|^{-2})^{\vee}.$$

En este caso obtenemos entonces una fórmula explícita para la solución f de la ecuación (9) que está dada por

$$f(x) = \left((|\cdot|^{-2})^{\vee} * \psi\right)(x) = c\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}\psi(x-y)dy.$$

Notemos en este punto que el caso $n = 2$ es un poco más delicado. Si $n = 2$ entonces en la identidad anterior vemos que se debe tener $z = 0$ y por lo tanto se debería tener $\Phi_0 = (|\cdot|^{-2})^{\vee}$, sin embargo esta identidad es falsa. En efecto, si suponemos esta identidad verdadera entonces al tomar la transformacion de Fourier a ambos lados se tiene $\widehat{\Phi_0} = |\cdot|^{-2}$, de donde, por el Teorema 2 se tiene $\Phi_{-2} = |\cdot|^{-2}$. Pero, por el punto 2) de la Definición 4 (tomando $N = 0$) se tiene $\Phi_{-2} = b\delta_0$ donde $b \in \mathbb{R}$ es una constante. En resumen, estas herramientas no funcionan adecuadamente en el caso $n = 2$ y en este caso, usando herramientas del cálculo vectorial (de manera más precisa las fórmulas de Green) se tiene que la solución f de la ecuación (9) se escribe como

$$f(x) = c\int_{\mathbb{R}^2} \log(|y|)\psi(x-y)dy.$$

Para finalizar esta sección notemos que en ambos casos ($n \geq 3$ y $n = 2$) la solución f de la ecuación (9) es el producto de convolución de una distribución con el dato ψ que supusimos pertenece a la clase se Schwartz. Así, por el Teorema 1 se tiene $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

4.2. Distribuciones a soporte en un punto

En esta sección estudiaremos una interesante caracterizacion de las distribuciones temperadas a soporte en un solo punto del espacio $\mathbb{R}^n$. De manera más precisa se tiene el siguiente resultado general:

Teorema 3 *Sea $u \in \mathbb{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si el soporte de u es el conjunto unitario $\{x_0\}$ entonces existe un entero $k > 0$ tal que*

$$u = \sum_{|a|\leq k} c_a \partial^a \delta_{x_0}, \tag{13}$$

donde δ_{x_0} es la masa de Dirac en el punto x_0 y $c_a \in \mathbb{C}$ son contantes.

- ⇒ Vemos entonces que todas las distribuciones a soporte en un conjunto $\{x_0\}$son combinaciones lineales finitas de las derivadas de la masa de Dirac en el punto x_0.

- ⇒ Este teorema tiene un corolario *muy interesante* que nos permite caracterizar a un tipo particular de distribuciones, conocidas como distribuciones armónicas, y que definimos a continuación.

Definición 5 *Sea $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$. La distribución u se dice armónica si verifica $\Delta u = 0$.*

Usando el Teorema 3 las distribuciones armónicas se caracterizan como sigue:

Corolario 1 *Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una distribución armónica. Entonces u es un polinomio.*

5. Problemas de definición de la transformación de Fourier en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Volviendo a la inclusión dada en la fórmula (3) es natural preguntarse si es posible extender la definición de la transformación de Fourier al espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. En este contexto, el siguiente ejemplo muestra que esto **no es posible** y por lo tanto se tiene:

> **Observación 3** *El espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio funcional **más grande** en donde la transformación de Fourier está bien definida.*

En efecto, tomando en cuenta la Definición 6 vemos que sería natural definir la transformación de Fourier en el espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ usando la dualidad con el espacio de las funciones de test $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, teniendo de esta manera para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{C}_c^\infty} = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{C}_c^\infty}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{14}$$

pero, veremos a continuación que el lado derecho de esta identidad **no siempre** está bien definido. Para observar claramente este hecho volvamos al ejemplo de la función dada en la fórmula (2), en donde para simplificar las cosas trabajaremos en los reales $\mathbb{R}$; y donde vimos que se tiene $e^{|\cdot|^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $e^{|\cdot|^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si usamos la fórmula (14) para calcular la transformación de Fourier de esta función se tiene, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \widehat{e^{|\cdot|^2}}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{C}_c^\infty} = \left\langle e^{|\cdot|^2}, \widehat{\varphi}\right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{C}_c^\infty} = \int_{\mathbb{R}} e^{|x|^2}\widehat{\varphi}(x)dx,$$

y ahora daremos una función de test φ particular para la cual se verifica

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|x|^2}\widehat{\varphi}(x)dx = +\infty. \tag{15}$$

Sea $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ una función par tal que su transformación de Fourier verifica $\widehat{\theta} \geq 0$. Luego, definimos la función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ como

$$\varphi(x) = \theta(x)e^{-|x|^2}.$$

Se tiene entonces

$$\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\theta} * \widehat{e^{-|\cdot|^2}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\theta}(y)e^{-|x-y|^2}dy,$$

en donde recordemos que en la última expresion a la derecha hemos usado el hecho que la transformación de Fourier de la función gaussiana es la misma función gaussiana.

Con esta identidad, por el hecho que $\widehat{\theta} \geq 0$ y usando el Teorema de Fubini escribimos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{|x|^2}\widehat{\varphi}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx + \int_{\mathbb{R}}\int_{y\geq x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx \\
&= \int_{x<0}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx + \int_{x\geq 0}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx \\
&\quad + \int_{x<0}\int_{y\geq x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx + \int_{x\geq 0}\int_{y\geq x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx, \\
&\geq \int_{x\geq 0}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx,
\end{aligned}$$

donde vamos a mostrar que se tiene

$$\int_{x\geq 0}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx = +\infty.$$

En efecto, siempre por el hecho que $\widehat{\theta} \geq 0$ y además, como se tiene $y < x$ entones podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{x\geq 0}\int_{y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx &\geq \int_{x\geq 1}\int_{0\leq y<x} e^{|x|^2-|x-y|^2}\widehat{\theta}(y)dydx \\
&= \int_{x\geq 1}\int_{0\leq y<x} e^{2xy-y^2}\widehat{\theta}(y)dydx \\
&\geq \int_{x\geq 1}\int_{0\leq y<x} e^{y^2}\widehat{\theta}(y)dydx \\
&= \int_{x\geq 1}\left(\int_{0\leq y<x} e^{y^2}\widehat{\theta}(y)dy\right)dx \\
&\geq \int_{x\geq 1}\left(\int_{0\leq y<1} e^{y^2}\widehat{\theta}(y)dy\right)dx \\
&= \left(\int_{x\geq 1} dx\right)\left(\int_{0\leq y<1} e^{y^2}\widehat{\theta}(y)dy\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene (15).