Lección n°1: Introducción a los espacios parabólicos

Escuela Politécnica Nacional 2023

1. Introducción

En esta serie de lecciones deseamos mostrar la utilidad de los espacios parabólicos para el estudio de la regularidad de ciertas soluciones de ecuaciones basadas en la ecuación del calor no homogénea. Recordemos que esta ecuación se escribe de la forma

$$\partial_t u = \Delta u + f,$$

donde $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la incógnita y $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una fuerza exterior dada. Evidentemente, la regularidad que se puede deducir sobre la variable u va a depender estrechamente de la información que se tiene inicialmente sobre la fuerza exterior f.

Existen muchas formas de estudiar la regularidad, es decir se puede medir la *regularidad* de la función u en diversos espacios funcionales, pero en estas lecciones estamos interesados en la regularidad hölderiana de ambas variables (tiempo y espacio). Este interés está relacionado con el estudio de la regularidad de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes, que son unas de las ecuaciones más importantes de la mecánica de fluidos (pero que no serán tratadas en estas lecciones) y que son esencialmente una ecuación del calor como la anterior, pero con cierto tipo de perturbaciones no lineales que hacen que su estudio sea particularmente difícil. Dado que estas ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones vectoriales sobre $\mathbb{R}^3$, los resultados serán enunciados en este marco vectorial, pero el lector interesado podrá sin ningún problema adaptar esta teoría al caso escalar.

El hecho de estudiar simultáneamente a las dos variables de tiempo y espacio nos llevará muy naturalmente a considerar espacios funcionales que estén adaptados a la estructura de la ecuación de calor: en efecto por un lado tenemos *una* derivada en la variable de tiempo (es decir $\partial_t u$) y por otro tenemos *dos* derivadas en la variable de espacio (es decir Δu). Este comportamiento distinto entre las variables nos conducirá a definir, para empezar, a los espacios parabólicos basados en una *distancia parabólica*. En esta lección presentaremos entonces esta distancia parabólica así como los espacios de Lebesgue en las variables de tiempo y espacio, terminaremos finalmente con los espacios de Hölder parabólicos y con una caracterización útil de estos espacios funcionales.

2. Marco parabólico

Como fue anunciado, lo primero que debemos hacer es presentar una distancia en ambas variables que respete la estructura de la ecuación del calor. En efecto si $u(t, x)$ es solución de la ecuación de calor homogéna

$$\partial_t u = \Delta u,$$

entonces la función $u_\alpha(t, x) = u(\alpha^2 t, \alpha x)$ con $\alpha > 0$ verifica $\partial_t u_\alpha(t, x) = \alpha^2(\partial_t u_\alpha)(t, x)$ y $\Delta u_\alpha(t, x) = \alpha^2(\Delta u_\alpha)(t, x)$, es decir que la función u_α sigue verificando la misma ecuación del calor. Este simple argumento de homogeneidad sobre la ecuación del calor nos llevará a introducir una distancia adaptada a este comportamiento diferente en las variables de tiempo y de espacio. En este sentido tenemos la siguiente definición:

Definición 1. *Definimos la distancia parabólica como la función:*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto d(t, x) = |t|^{\frac{1}{2}} + |x|, \end{aligned} \quad (1)$$

donde la expresión (1) *representa la distancia entre el punto* (t, x) *y el origen* $(0, (0, 0, 0))$.

Observación: La expresión $|x|$ denota la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$, es decir,

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 1. *La función d descrita en la Definición 1, es una distancia sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Sean $(t, x), (\tau, y), (r, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

- Demostremos que $d(t, x) \geq 0$, para ello, por la Definición 1 tenemos $d(t, x) = |t|^{\frac{1}{2}} + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. Luego, como $|t|^{\frac{1}{2}} \geq 0$ y $|x| \geq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^3$, se sigue que $|t|^{\frac{1}{2}} + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, por tanto:
$$d(t, x) \geq 0.$$
como queríamos demostrar.

- Demostraremos ahora que $d(t, x) = 0$ si y solo si $t = 0$ y $x = (0, 0, 0)$. Supongamos que $d(t, x) = 0$ y demostremos que $t = 0$ y $x = (0, 0, 0)$. Usaremos el método de reducción al absurdo, para ello supongamos que $t \neq 0$ o $x \neq (0, 0, 0)$. Por la Definición 1 y como $d(t, x) = 0$, tenemos que $|t|^{\frac{1}{2}} + |x| = 0$, así:
$$|x| = -|t|^{\frac{1}{2}}.$$
Luego, si $t \neq 0$ entonces $-|t|^{\frac{1}{2}} < 0$, lo que junto con la expresión anterior, implica que $|x| < 0$ lo cual es una contradicción. De manera similar al suponer que $x \neq (0, 0, 0)$ y siguiendo un procedimiento análogo al anterior llegaremos a una contradicción, con lo que quedaría demostrado que $t = 0$ y $x = (0, 0, 0)$. La implicación recíproca se sigue de manera trivial al suponer que $t = 0$ y $x = (0, 0, 0)$.

- Mostremos la *simetría*, es decir:
$$d(t - \tau, x - y) = d(\tau - t, y - x). \tag{2}$$
Representemos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Por las propiedades del valor absoluto, tenemos que:
$$|t - \tau|^{\frac{1}{2}} = |\tau - t|^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$
además, de la definición de norma euclídea en $\mathbb{R}^3$ se sigue que:
$$|x - y| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{1}{2}},$$
luego, como $(a - b)^2 = (b - a)^2$ para cada $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que:
$$|x - y| = ((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2)^{\frac{1}{2}},$$
así:
$$|x - y| = |y - x|. \tag{4}$$
De las identidades (3) y (4) se tiene que:
$$|t - \tau|^{\frac{1}{2}} + |x - y| = |\tau - t|^{\frac{1}{2}} + |y - x|,$$
la expresión anterior junto a la Definición 1 implica la identidad (2), que es lo que queríamos demostrar.

- Finalmente demostremos la desigualdad triangular, es decir:
$$d(t - \tau, x - y) \leq d(t - r, x - z) + d(r - \tau, z - y).$$
De la Definición 1, obtenemos $d(t - \tau, x - y) = |t - \tau|^{\frac{1}{2}} + |x - y|$, luego sumando y restando las variables r y z en el lado derecho de la expresión anterior tenemos que:
$$d(t - \tau, x - y) = |t - r + r - \tau|^{\frac{1}{2}} + |x - z + z - y|,$$
de la desigualdad triangular de la norma definida por el valor absoluto y de la norma euclídea se sigue que:
$$d(t - \tau, x - y) \leq \Big(|t - r| + |r - \tau|\Big)^{\frac{1}{2}} + |x - z| + |z - y|. \tag{5}$$
Recordemos que se tiene $|a + b|^{\frac{1}{2}} \leq |a|^{\frac{1}{2}} + |b|^{\frac{1}{2}}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Usando la desigualdad anterior junto con la expresión (5), se sigue que $d(t - \tau, x - y) \leq |t - r|^{\frac{1}{2}} + |x - z| + |r - \tau|^{\frac{1}{2}} + |z - y|$, por tanto:
$$d(t - \tau, x - z) \leq d(t - r, x - z) + d(r - s, z - y),$$
que es la desigualdad triangular.

Finalmente gracias a las propiedades que hemos demostrado, podemos asegurar que:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto \quad d(t, x) = |t|^{\frac{1}{2}} + |x|, \end{aligned}$$

es una distancia. ■

Lema 2 (Homogeneidad)**.** *Sea $\alpha > 0$, la distancia d definida por la fórmula* (1) *es homogénea en el sentido siguiente:*

$$d(\alpha^2 t, \alpha x) = \alpha d(t, x),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^3$.

Demostración. Sean $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha > 0$. Por la fórmula (1) y la definición de norma euclídea para $\mathbb{R}^3$ tenemos que:

$$d(\alpha^2 t, \alpha x) = |\alpha^2 t|^{\frac{1}{2}} + (\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \alpha^2 x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

luego, de las propiedades de valor absoluto y dado que $\alpha > 0$, se sigue que:

$$d(\alpha^2 t, \alpha x) = \alpha |t|^{\frac{1}{2}} + \alpha (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, sacando factor común y usando la Definición 1 podemos concluir que:

$$d(\alpha^2 t, \alpha x) = \alpha (|t|^{\frac{1}{2}} + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}) = \alpha d(t, x),$$

con lo que queda demostrada la homogeneidad. ■

Observación: Como vemos, esta distancia parabólica *respeta* la homogeneidad de la ecuación del calor que consiste en hacer los cambios de variable $t \longmapsto \alpha^2 t$ y $x \longmapsto \alpha x$. De esta manera, la propiedad de homogeneidad que acabamos de verificar ilustra cómo esta distancia parabólica *iguala* el comportamiento diferente de las dos variables para tener un comportamiento común frente a este tipo de dilataciones particulares.

A continuación introduciremos el concepto de *bola parabólica*, definición que será de importancia en el desarrollo de estas lecciones.

Definición 2 (Bola parabólica)**.** *Para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, definimos la bola parabólica $Q_r(t, x)$ de la siguiente forma:*

$$Q_r(t, x) =]t - r^2, t + r^2[\times B_r(x), \tag{6}$$

donde $B_r(x)$ denota la bola euclideana de radio r centrada en x.

Luego de definir la bola parabólica es importante calcular su volumen, por tal motivo presentamos el siguiente lema.

Lema 3. *Dado $r > 0$ y $(t, x) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que el volumen de la bola parabólica $Q_r(t, x)$, el cual notaremos simplemente como $|Q_r|$, es*

$$|Q_r| = 2 v_3 r^5, \tag{7}$$

donde v_3 denota el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^3$. Por notación escribiremos $C = 2v_3$.

Demostración. Para determinar el volumen de la bola parabólica, tenemos que calcular:

$$|Q_r| = \int_{t-r^2}^{t+r^2} \int_{B_r(x)} dy d\tau. \tag{8}$$

Recordemos que $\displaystyle\int_{B_r(x)} dy = v_3 r^3$, así, del resultado anterior junto con la identidad (8) tenemos que:

$$|Q_r| = \int_{t-r^2}^{t+r^2} r^3 \ v_3 \ d\tau,$$

luego, resolviendo la integral del lado derecho, se sigue

$$|Q_r| = r^3 \ v_3 \ \tau\Big|_{t-r^2}^{t+r^2} = r^3 \ v_3 \ [(t+r^2) - (t-r^2)] = 2v_3 r^5.$$

Finalmente usando la notación $C = 2v_3$, obtenemos $|Q_r| = Cr^5$, como queríamos demostrar. ■

3. Espacios de Lebesgue tiempo y espacio

En primer lugar, es necesario introducir el concepto de función vectorial, que será de utilidad en los siguientes resultados.

Definición 3 (Función vectorial)**.** *Definimos la función vectorial*

$$\begin{array}{rccl} \vec{v}: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t,x) & \longmapsto & \vec{v}(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \\ v_3(t,x) \end{bmatrix}, \end{array}$$

donde, para cada $i \in \{1,2,3\}$ consideramos la función

$$\begin{array}{rccl} v_i: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & v_i(t,x). \end{array}$$

Definamos ahora los espacios de Lebesgue tiempo y espacio.

Definición 4 (Espacios de Lebesgue $L^p_t L^q_x$)**.** *Sea $\vec{v} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial medible, si $1 \leq p, q \leq +\infty$ son dos parámetros reales, diremos que la función $\vec{v}$ pertenece al espacio $L^p([0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ si esta es L^q-integrable en la variable de espacio y si la cantidad resultante es L^p-integrable en la variable de tiempo.*

El espacio $L^p([0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ puede ser un espacio normado con la cantidad:

$$||\vec{v}||_{L^p_t L^q_x} = \left(\int_0^{+\infty} ||\vec{v}(t,\cdot)||^p_{L^q} dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

con las modificaciones necesarias para los casos cuando $p, q = +\infty$, como por ejemplo

$$||\vec{v}||_{L^\infty_t L^q_x} = \sup_{t\in[0,+\infty[} ||\vec{v}(t,\cdot)||_{L^q},$$

o

$$||\vec{v}||_{L^\infty_t L^\infty_x} = \sup_{t\in[0,+\infty[} ||\vec{v}(t,\cdot)||_{L^\infty} = \sup_{t\in[0,+\infty[}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|\right).$$

Indiquemos que las notaciones $L^p_t(L^q_x)$, $L^p_t L^q_x$ y $L^p([0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ se utilizarán de forma alternada para representar el mismo objeto. También, si $I \subset [0,+\infty[$ es un intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado y si $A = I \times \Omega$ representa el cilindro tiempo y espacio, cuando no hay riesgo de confusión simplemente escribiremos $L^p_t L^q_x(A)$ en lugar de $L^p(I, L^q(\Omega))$.

Veamos ahora algunos ejemplos de funciones en el espacio $L^p_t L^q_x$.

Ejemplo 1. *Sea $A = [2\,,3] \times B_4(0) \subset [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$. Consideremos la función indicatriz sobre A, $\mathbb{1}_A$, y mostremos que para todo $1 \leq p, q \leq +\infty$, se tiene que la función $\mathbb{1}_A$ pertenece a $L^p_t L^q_x$. Recordemos que la función $\mathbb{1}_A : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \{0,1\}$, se define de la siguiente manera:*

$$\mathbb{1}_A(t,x) = \begin{cases} 1 & (t,x) \in A \\ 0 & (t,x) \notin A, \end{cases}$$

para todo $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$.

Sabemos que la función $\mathbb{1}_A$ es medible, ya que A es un conjunto medible. Falta probar que $||\mathbb{1}_A||_{L_t^pL_x^q} < +\infty$. De la expresión (9) y las propiedades de la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned} ||\mathbb{1}_A||^p_{L_t^pL_x^q} &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt, \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx + \int_{(B_4(0))^c}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt, \end{aligned} \tag{10}$$

de donde, por definición de la función $\mathbb{1}_A$, tenemos que para todo $t \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_{(B_4(0))^c}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx = 0$. Así, de la identidad (10) se sigue $||\mathbb{1}_A||^p_{L_t^pL_x^q} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt$. Luego, de las propiedades de la integral, notemos que:

$$||\mathbb{1}_A||^p_{L_t^pL_x^q} = \int_0^2\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt + \int_2^3\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt + \int_3^{+\infty}\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt.$$

Nuevamente, de la definición de $\mathbb{1}_A$ concluimos que para todo $t \in [0,2[\cup]3,+\infty[$, se tiene $\displaystyle\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx = 0$. Por lo tanto,

$$||\mathbb{1}_A||^p_{L_t^pL_x^q} = \int_2^3\left(\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt. \tag{11}$$

Ahora, notemos que para todo $t \in [2,3]$, se tiene $\displaystyle\int_{B_4(0)}|\mathbb{1}_A(t,x)|^q dx = \int_{B_4(0)}|1|^q dx = \int_{B_4(0)} dx$. Luego, denotando como v_3 al volúmen de la bola unidad en $\mathbb{R}^3$, entonces $\displaystyle\int_{B_4(0)} dx = v_3\, 4^3 = 64v_3$. Así, reemplazando lo anterior en (11) y resolviendo la integral restante, tenemos que: $||\mathbb{1}_A||^p_{L_t^pL_x^q} = \displaystyle\int_2^3 (64v_3)^{\frac{p}{q}}\, dt = (64v_3)^{\frac{p}{q}}$, lo que muestra que $||\mathbb{1}_A||_{L_t^pL_x^q} < +\infty$, como queríamos.

Ejemplo 2. *Consideremos la función:*

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) = \dfrac{1}{(1+t)^2}\dfrac{1}{(1+|x|)^3}. \end{array}$$

Mostremos que $f \in L_t^pL_x^q$ *para todo* $1 < q < +\infty$ *y para todo* $1 \le p < +\infty$.

Vamos a probar que $\|f\|_{L_t^pL_x^q} < +\infty$. De la expresión (9), reemplazando la definición de la función f tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_t^pL_x^q} &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{(1+t)^2}\frac{1}{(1+|x|)^3}\right|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{(1+t)^2}\frac{1}{(1+|x|)^3}\right)^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt, \end{aligned}$$

pues f es no negativa. Luego, utilizando las propiedades de la integral y distribuyendo los exponentes, se sigue que

$$\|f\|_{L_t^pL_x^q} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t)^{2q}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(1+|x|)^{3q}}dx\right)^{\frac{p}{q}} dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)^{2p}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(1+|x|)^{3q}}dx\right)^{\frac{p}{q}} dt. \tag{12}$$

Vamos a resolver la integral respecto a la variable espacial en la expresión anterior mediante un cambio a coordenadas polares; entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x|)^{3q}}dx \leq v_3 \int_0^{+\infty} \rho^2 \frac{1}{(1+\rho)^{3q}}d\rho \leq v_3 \int_0^1 \rho^2 \frac{1}{(1+\rho)^{3q}}d\rho + \int_1^{+\infty} \rho^{2-3q}d\rho.$$

Notemos que la primera integral de la expresión anterior es finita independientemente del valor de q. Nos hace falta analizar la segunda integral, como $q > 1$, tenemos que $2-3q < -1$ y por lo tanto la segunda integral también es finita. Así, existe $C > 0$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x|)^{3q}}dx \leq C$. Regresando a la expresión (12), por la última desigualdad tenemos $\|f\|_{L^p_t L^q_x} \leq C \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{2p}}dt$. Luego, como $p \geq 1$, se tiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{2p}}dt = \frac{1}{2p-1}$, por lo tanto, hemos demostrado que $\|f\|_{L^p_t L^q_x} < +\infty$ como queríamos.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los espacios $L^p_t L^q_x$.

Lema 4. *Si $p = q$, entonces tenemos la identificación de espacios $L^p([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^3)) \simeq L^p([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Sea $\vec{v} \in L^p([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^3))$. Para probar el resultado, basta mostrar la igualdad de normas de los espacios $L^p([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^3))$ y $L^p([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$. De la expresión (9) tenemos que

$$||\vec{v}||^p_{L^p_t L^p_x} = \int_0^{+\infty} ||\vec{v}(t,\cdot)||^p_{L^p} dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dx\, dt. \tag{13}$$

Luego, por el Teorema de Fubini, se sigue que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dx\, dt = \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dt dx,$$

de donde, por definición de la norma en $L^p([0,+\infty)\times\mathbb{R}^3)$, sabemos que

$$||\vec{v}||^p_{L^p([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)} = \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dt dx.$$

Por lo tanto, de lo anterior y la expresión (13) se sigue que $||\vec{v}||^p_{L^p_t L^p_x} = ||\vec{v}||^p_{L^p([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)}$; o lo que es lo mismo, $||\vec{v}||_{L^p_t L^p_x} = ||\vec{v}||_{L^p([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)}$. ■

Observación 3.1. *Notemos que, en la demostración del Lema 4, es posible cambiar el dominio de integración temporal $[0,+\infty[$ a $\mathbb{R}$, y se obtiene la siguiente identificación de espacios*

$$L^p(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^3)) \simeq L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Ahora observemos la siguiente definición, dadas $\vec{v}, \vec{u} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funciones vectoriales, recordemos que $(\vec{v}\cdot\vec{u})(t,x)$ es la función dada por

$$(\vec{v}\cdot\vec{u})(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \\ v_3(t,x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \\ u_3(t,x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (v_i u_i)(t,x),$$

donde $v_i u_i$ es el producto puntual entre funciones.

Teniendo en cuenta la observación anterior, presentamos los siguientes lemas.

Lema 5. *Se verifican los siguientes enunciados:*

1) Si $1 \leq p,\, q \leq +\infty$, *los espacios* $L^p([0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ *son espacios de Banach.*

2) Si $1 < p,\, q < +\infty$, *los espacios* $L^p([0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ *son espacios reflexivos y*

$$(L^p_t L^q_x)' = L^{p'}_t L^{q'}_x, \quad \textit{donde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

3) Por dualidad, para $1 \leq p,\, q < +\infty$, *tenemos que*

$$||\vec{v}||_{L^p_t L^q_x} = \sup_{||\vec{u}||_{L^{p'}_t L^{q'}_x} \leq 1} \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{v}(t,x) \cdot \vec{u}(t,x) dx dt \right|.$$

La demostración de este resultado es totalmente clásica y puede consultarse en los libros [1] y [2].

Adicionalmente tenemos el siguiente resultado:

Lema 6 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean* $1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq +\infty$ *índices reales, para dos funciones vectoriales* $\vec{v}, \vec{u} : [0,+\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tales que* $\vec{v} \in L^{p_0}([0,+\infty[, L^{q_0}(\mathbb{R}^3))$ *y* $\vec{u} \in L^{p_1}([0,+\infty[, L^{q_1}(\mathbb{R}^3))$, *tenemos la desigualdad de Hölder en tiempo y espacio:*

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||_{L^p_t L^q_x} \leq ||\vec{v}||_{L^{p_0}_t L^{q_0}_x} ||\vec{u}||_{L^{p_1}_t L^{q_1}_x},$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}$.

Demostración. Observemos que, por la expresión (9) podemos escribir:

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||^p_{L^p_t L^q_x} = \int_0^{+\infty} ||\vec{v}(t,\cdot) \cdot \vec{u}(t,\cdot)||^p_{L^q} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x) \cdot \vec{u}(t,x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt.$$

Luego, por propiedades de la norma euclidea se sigue que:

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||^p_{L^p_t L^q_x} \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^q |\vec{u}(t,x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt.$$

Por hipótesis, $\frac{q_0}{q}$ y $\frac{q_1}{q}$ son exponentes conjugados; así, gracias a la desigualdad de Hölder para la variable en espacio tenemos que:

$$\begin{aligned} ||\vec{v} \cdot \vec{u}||^p_{L^p_t L^q_x} &\leq \int_0^{+\infty} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^{q_0} dx \right)^{\frac{q}{q_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}(t,x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{q}{q_1}} \right)^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(||\vec{v}(t,\cdot)||^q_{L^{q_0}} ||\vec{u}(t,\cdot)||^q_{L^{q_1}} \right)^{\frac{p}{q}} dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||^p_{L^p_t L^q_x} \leq \int_0^{+\infty} ||\vec{v}(t,\cdot)||^p_{L^{q_0}} ||\vec{u}(t,\cdot)||^p_{L^{q_1}} dt.$$

Puesto que $\frac{p_0}{p}$ y $\frac{p_1}{p}$ son exponentes conjugados; nuevamente por la desigualdad de Hölder en la variable temporal tenemos que:

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||^p_{L^p_t L^q_x} \leq \left(\int_0^{+\infty} ||\vec{v}(t,\cdot)||^{p_0}_{L^{q_0}} dt \right)^{\frac{p}{p_0}} \left(\int_0^{+\infty} ||\vec{u}(t,\cdot)||^{p_1}_{L^{q_1}} dt \right)^{\frac{p}{p_1}},$$

de donde, por la Definición 4 se sigue que:

$$||\vec{v} \cdot \vec{u}||_{L^p_t L^q_x} \leq ||\vec{v}||_{L^{p_0}_t L^{q_0}_x} ||\vec{u}||_{L^{p_1}_t L^{q_1}_x},$$

y es lo que queríamos demostrar. ∎

Observación 3.2. *Notemos que, en la demostración del Lema 6, es posible cambiar el dominio de integración temporal* $[0,+\infty[$ *a* $\mathbb{R}$*, y se sigue que la desigualdad de Hölder es válida para funciones* $\vec{v},\vec{u}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *tales que* $\vec{v}\in L^{p_0}(\mathbb{R},L^{q_0}(\mathbb{R}^3))$ *y* $\vec{u}\in L^{p_1}(\mathbb{R},L^{q_1}(\mathbb{R}^3))$*.*

Finalmente, se cumple lo siguiente:

Lema 7 (Desigualdad de Minkowski continua)**.** *Sean* $\vec{v}:[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *una función medible y* $1\leq p<\infty$ *un índice real. Tenemos la siguiente desigualdad:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\int_0^{+\infty}\vec{v}(t,x)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{v}(t,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dt.$$

Podemos ver la demostración del Lema anterior en las páginas 240-241 del libro [1].

Notemos que este resultado se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\left|\left|\int_0^{+\infty}\vec{v}(t,\cdot)dt\right|\right|_{L^p}\leq\int_0^{+\infty}||\vec{v}(t,\cdot)||_{L^p}dt,\quad 1\leq p<+\infty.$$

4. Espacios de Hölder parabólicos

A continuación definamos el espacio de Hölder parabólico.

Definición 5. *Sea* $0<\alpha<1$*. Definimos el espacio de Hölder parabólico de orden* α*, denotado por* $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$*, como el espacio de todas las funciones vectoriales* $\vec{v}$*, tales que*

$$\|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}=\sup_{(t,x)\neq(s,y)}\frac{|\vec{v}(t,x)-\vec{v}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^\alpha}<+\infty. \tag{14}$$

Esta definición es totalmente clásica si se hace la abstracción que la distancia considerada es una distancia parabólica.
A continuación veamos algunos ejemplos de funciones en $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Ejemplo 3. *Sean* $\alpha\in]0,1]$ *y* $c\in\mathbb{R}^3$*; definimos la función constante* $\vec{f}$ *como*

$$\begin{array}{rcl}\vec{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\ (t,x)&\longmapsto&\vec{f}(t,x)=c.\end{array}$$

Probemos que $\vec{f}$ *es un elemento de* $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$*.*

El resultado es inmediato pues para todo (t,x) , $(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ tales que $(t-s,x-y)\neq(0,0)$, se sigue que:

$$\frac{|\vec{f}(t,x)-\vec{f}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^\alpha}=\frac{|c-c|}{d(t-s,x-y)^\alpha}=0.$$

Ejemplo 4. *Sea* $\alpha\in]0,1]$*. Definamos la función*

$$\begin{array}{rccl}\vec{h}: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (t,x) & \longmapsto & \vec{h}(t,x)=|t|^{\frac{\alpha}{2}}.\end{array}$$

Mostremos que $\vec{h}\in\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$*.*

Sean $(t,x),(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ tales que $(t,x)\neq(s,y)$, cualesquiera. Tenemos entonces $|\vec{h}(t,x)-\vec{h}(s,y)|=||t|^{\frac{\alpha}{2}}-|s|^{\frac{\alpha}{2}}|$ además, considerando que $||t|^{\frac{\alpha}{2}}-|s|^{\frac{\alpha}{2}}|\leq|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}$ podemos escribir $|\vec{h}(t,x)-\vec{h}(s,y)|\leq|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}$. Por otro lado, sabemos que:

$$d(t-s,x-y)^\alpha=\Big(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|\Big)^\alpha,$$

entonces, tenemos que:

$$\frac{|\vec{h}(t,x)-\vec{h}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq \frac{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|\right)^{\alpha}} \leq \frac{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} = 1,$$

así, como $(t,x),(s,y)$ son arbitrarios, de la definición de supremo se sigue que:

$$\sup_{(t,x)\neq(s,y)} \frac{|\vec{h}(t,x)-\vec{h}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq 1 < +\infty,$$

lo que demuestra que $\vec{h} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ como queríamos.

Ejemplo 5. *Sea $\alpha \in]0,1]$. Definamos la siguiente función*

$$\begin{aligned} \vec{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto \vec{g}(t,x) = |x|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Mostremos que $\vec{g} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Sean (t,x), $(s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ tales que $(t-s,x-y)\neq(0,0)$; de la definición de la función $\vec{g}$, tenemos que:

$$|\vec{g}(t,x)-\vec{g}(s,y)| = \big||x|^{\alpha}-|y|^{\alpha}\big|. \tag{15}$$

Luego, sabemos que $\big||x|^{\alpha}-|y|^{\alpha}\big| \leq |x-y|^{\alpha}$, así, de lo anterior y la identidad (15), concluimos:

$$|\vec{g}(t,x)-\vec{g}(s,y)| \leq |x-y|^{\alpha}. \tag{16}$$

Por otro lado, de la definición de distancia parabólica, sabemos que:

$$d(t-s,x-y)^{\alpha} = \left(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|\right)^{\alpha}.$$

Entonces, se sigue que:

$$\frac{|\vec{g}(t,x)-\vec{g}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq \frac{|\vec{g}(t,x)-\vec{g}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq \frac{|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^{\alpha}} = 1.$$

Finalmente, como (t,x) y (s,y) son arbitrarios, de lo anterior y la definición del supremo se sigue que:

$$\sup_{(t,x)\neq(s,y)} \frac{|\vec{g}(t,x)-\vec{g}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq 1,$$

es decir, hemos demostrado que $\|g\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} < +\infty$.

A continuación, vamos a enunciar un resultado que proporciona una definición equivalente del espacio de Hölder $\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Este resultado será fundamental en las lecciones siguientes y constituye el teorema principal de esta lección.

Por notación, definamos para $\vec{v} \in \left(L^1_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$ la siguiente cantidad promedio:

$$M_r(\vec{v})(t,x) := \frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)} \vec{v}(s,y)dyds, \tag{17}$$

para todo $r>0$ y $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, en donde Q_r es la bola parabólica definida en (6).

Ahora, podemos presentar el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea $1 \leq p < +\infty$, $\vec{v} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$ y $0<\alpha<1$. Tenemos que $\vec{v} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ si y sólo si:*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{1}{r^{\alpha}}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^p dyds\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{18}$$

Si bien este enunciado es relativamente sencillo, su verificación completa (basada en el libro [4]) tomará un poco de tiempo y será detallada en varias etapas.

Demostración.

1) En primer lugar, mostremos que si $\vec{v} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, entonces la cantidad:

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{1}{r^{\alpha}} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)|^p dyds \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{19}$$

es finita.

En efecto, sean $r > 0$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y $(s,y) \in Q_r(t,x)$, por la expresión (17) tenemos que:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| = \left| \vec{v}(s,y) - \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} \vec{v}(\tau,z) d\tau dz \right|.$$

Además, por definición del volúmen de la bola parabólica, notada como $|Q_r|$, podemos escribir $\vec{v}$ de la siguiente forma:

$$\vec{v}(s,y) = \int_{Q_r(t,x)} \frac{1}{|Q_r|} \vec{v}(s,y) d\tau dz.$$

Luego, juntando las dos expresiones anteriores obtenemos que:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| = \frac{1}{|Q_r|} \left| \int_{Q_r(t,x)} (\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\tau,z))\, d\tau dz \right|.$$

Ahora, por propiedades del valor absoluto tenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{|Q_r|} \left| \int_{Q_r(t,x)} \vec{v}(s,y) - \vec{v}(\tau,z) d\tau dz \right| \leq \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\tau,z)|\, d\tau dz;$$

juntando las dos últimas desigualdades y multiplicando el lado derecho por $\dfrac{d(s-\tau,y-z)^{\alpha}}{d(s-\tau,y-z)^{\alpha}}$, obtenemos:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| \leq \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\tau,z)| \frac{d(s-\tau,y-z)^{\alpha}}{d(s-\tau,y-z)^{\alpha}} d\tau dz.$$

De la desigualdad anterior y como $\vec{v} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, podemos realizar la siguiente acotación:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| \leq \sup_{(\tau,z)\neq(s,y)} \frac{|\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\tau,z)|}{d(s-\tau,y-z)^{\alpha}} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} d(s-\tau,y-z)^{\alpha} d\tau dz.$$

Por la expresión (14), podemos escribir la desigualdad anterior de la siguiente forma:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| \leq \|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} d(s-\tau,y-z)^{\alpha} d\tau dz.$$

Luego, como $(s,y), (\tau,z) \in Q_r(t,x)$, se sigue que:

$$d(s-\tau,y-z)^{\alpha} \leq (d(s-t,y-x) + d(t-\tau,x-z))^{\alpha} \leq (2r)^{\alpha},$$

y entonces:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| \leq \|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} (2r)^{\alpha} d\tau dz,$$

en consecuencia:

$$|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)| \leq \|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} \frac{(2r)^{\alpha}}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} d\tau dz = \|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} (2r)^{\alpha}.$$

Utilizando la desigualdad anterior y reconstruyendo la expresión (19), obtenemos que:

$$\frac{1}{r^{\alpha}} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)|^p dyds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{r^{\alpha}} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(t,x)} (\|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}} (2r)^{\alpha})^p dyds \right)^{\frac{1}{p}},$$

resolviendo la integral del lado derecho de la ultima desigualdad obtenemos que:

$$\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^p dyds\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^\alpha\|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}\left(\frac{1}{r^\alpha}r^\alpha\right)\left(\frac{1}{|Q_r|}|Q_r|\right) \leq 2^\alpha\|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}.$$

Finalmente, como (t,x) y r son arbitrarios, hemos obtenido que:

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^p dyds\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^\alpha\|\vec{v}\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha},$$

así, hemos demostrado que la expresión (18) es finita si $\vec{v}\in\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, como queríamos.

2) Ahora, supongamos que $\vec{v}$ cumple la condición (18) y demostremos que $\vec{v}\in\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Este literal lo dividiremos por etapas y presentaremos lemas adicionales, debido a que la demostración es extensa.

Etapa 1. En esta etapa nos proveeremos de las herramientas necesarias para la demostración, es decir, definiremos funciones y notación. Además demostraremos pequeños resultados para las funciones definidas en esta etapa.

Sea $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ con soporte en la bola parabólica $Q_1(0,0)$ y además verifique que:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi(t,x)dxdt = 1. \tag{20}$$

También, sea $\varepsilon>0$; definamos la función:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\varepsilon: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \varphi_\varepsilon(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^5}\varphi\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2},\dfrac{x}{\varepsilon}\right). \end{array}$$

Lema 8. *La función φ_ε, como acabamos de definir, tendrá soporte contenido en la bola parabólica $Q_\varepsilon(0,0)$. Además, tenemos que para cada $\varepsilon>0$, se cumple que:*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon(t,x)dxdt = 1. \tag{21}$$

En efecto, puesto que:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon(t,x)dxdt = \frac{1}{\varepsilon^5}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{x}{\varepsilon}\right)dxdt,$$

basta utilizar el cambio de variable $\tau=\frac{t}{\varepsilon^2}$ y $z=\frac{x}{\varepsilon}$ y así, por la identidad (20) se sigue que:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon(t,x)dxdt = \frac{1}{\varepsilon^5}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi(\tau,z)|\varepsilon^5|dzd\tau = 1.$$

Lema 9. *Para cualesquiera $(t,x),\,(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y para todo R,ε y ε' positivos, se cumple que:*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_{\varepsilon'}(s-\sigma,y-z)\right)M_R(\vec{v})(t,x)dzd\sigma = 0, \tag{22}$$

Efectivamente, sean $(t,x),\,(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y sean R,ε y ε' positivos, cualesquiera, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_{\varepsilon'}(s-\sigma,y-z)\right)M_R(\vec{v})(t,x)dzd\sigma = M_R(\vec{v})(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon dzd\sigma-\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_{\varepsilon'}dzd\sigma\right),$$

luego de la identidad (21) se sigue que:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_{\varepsilon'}(s-\sigma,y-z)\right)M_R(\vec{v})(t,x)dzd\sigma = 0,$$

para cualesquiera $(t,x)\,,\,(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y todo R,ε y ε' positivos, como queríamos.

Etapa 2. Sean $(t,x)\,,\,(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ distintos y $\varepsilon>0$. En esta etapa demostraremos las siguientes identidades:

Lema 10.

$$\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)=\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)(\vec{v}(\sigma,z)-M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x))dzd\sigma. \tag{23}$$

Lema 11.

$$\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}\star\vec{v}(t,x)=\int_{Q_\varepsilon(t,x)}\Big(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)\Big)\left(\vec{v}(\sigma,z)-M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)\right)dzd\sigma. \tag{24}$$

Donde $\star$ representa la convolución en tiempo y espacio; es decir,

$$\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)\vec{v}(\sigma,z)dzd\sigma.$$

Probemos primero la identidad (23).
Sean $(t,x)\,,\,(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y cada $\varepsilon>0$, como $\vec{v}\in\left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$ y $\varphi_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, $\varphi_\varepsilon\star\vec{v}$ está bien definida en todo $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y además, por definición de convolución en variable de espacio y de tiempo, tenemos que:

$$\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)\vec{v}(\sigma,z)dzd\sigma.$$

De la definición de producto en convolución y la identidad (22) de la etapa anterior, para cada $R>0$ podemos escribir que:

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)=&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)\vec{v}(\sigma,z)dzd\sigma-\\&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)M_R(\vec{v})(t,x)dzd\sigma.\end{aligned}$$

Tomando $R=\varepsilon+d(t-s,x-y)$ y considerando $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3=(Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x))^c\cup Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)$, descomponiendo el dominio de integración tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)=&\left(\int_{(Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x))^c}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)\vec{v}(\sigma,z)dzd\sigma+\right.\\&\left.\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)\vec{v}(\sigma,z)dzd\sigma\right)-\\&\left(\int_{(Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x))^c}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)dzd\sigma+\right.\\&\left.\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}\left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)\right)M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)dzd\sigma\right).\end{aligned}\tag{25}$$

Notemos que, la función traslación de φ_ε, la cual llamaremos Ψ_ε definida como $(\sigma,z)\longmapsto\Psi_\varepsilon(\sigma,z)=\varphi_\varepsilon\left((t,x)-(\sigma,z)\right)$ verifica que:

$$sop\left(\Psi_\varepsilon\right)\subseteq\{(t,x)\}-Q_\varepsilon(0,0)=Q_\varepsilon(t,x),$$

gracias a las propiedades del soporte. De manera similar, si definimos ψ_ε como $(\sigma,z)\longmapsto\psi_\varepsilon(\sigma,z)=\varphi_\varepsilon\left((s,y)-(\sigma,z)\right)$ tenemos que:

$$sop\left(\psi_\varepsilon\right)\subseteq\{(s,y)\}-Q_\varepsilon(0,0)=Q_\varepsilon(s,y).$$

Nuevamente, por propiedades del soporte, se sigue que:

$$sop\ (\Psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \subseteq Q_\varepsilon(t,x) \bigcup Q_\varepsilon(s,y) \subseteq Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x),$$

del análisis del soporte de $\Psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon$ y como $\Psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon = 0$ fuera de su soporte, podemos escribir la expresión (25) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y) = & \int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)} (\Psi_\varepsilon(\sigma,z) - \psi_\varepsilon(\sigma,z))\, \vec{v}(\sigma,z) dz d\sigma - \\
& \int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)} (\Psi_\varepsilon(\sigma,z) - \psi_\varepsilon(\sigma,z))\, M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x) dz d\sigma, \\
= & \int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)} (\Psi_\varepsilon(\sigma,z) - \psi_\varepsilon(\sigma,z))\, (\vec{v}(\sigma,z) - \\
& M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)) dz d\sigma, \\
= & \int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)} (\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z))\, (\vec{v}(\sigma,z) - \\
& M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)) dz d\sigma.
\end{aligned}$$

Y así hemos obtenido (23) como queríamos.

Ahora, haremos un análisis parecido al anterior para obtener la identidad (24). De la identidad (22) para ε, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ y $R = \varepsilon$ tenemos que:

$$\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)\right) (\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x))\, dz d\sigma,$$

luego, como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 = Q_\varepsilon(t,x) \cup (Q_\varepsilon(t,x))^c$, descomponiendo el dominio de integración se sigue que:

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x) = & \int_{Q_\varepsilon(t,x)} \left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)\right) (\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x))\, dz d\sigma + \\
& \int_{(Q_\varepsilon(t,x))^c} \left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)\right) (\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x))\, dz d\sigma.
\end{aligned}$$

Por como definimos Ψ_ε y por propiedades del soporte bajo traslaciones, tenemos que:

$$sop(\Psi_\varepsilon) \subseteq Q_\varepsilon(t,x) \qquad \text{y} \qquad sop\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \subseteq Q_{\frac{\varepsilon}{2}}(t,x),$$

además sabemos que $Q_{\frac{\varepsilon}{2}}(t,x) \subseteq Q_\varepsilon(t,x)$; entonces, $sop\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \subseteq Q_\varepsilon(t,x)$.

Finalmente del análisis anterior, como Ψ_ε y $\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}$ son igual a cero fuera de su soporte tenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x) &= \int_{Q_\varepsilon(t,x)} \left(\Psi_\varepsilon(\sigma,z) - \Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}(\sigma,z)\right) (\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x))\, dz d\sigma \\
&= \int_{Q_\varepsilon(t,x)} \left(\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)\right) (\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x))\, dz d\sigma,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra la identidad (24).

Etapa 3. Aquí, vamos a denotar con C a cualquier constante positiva cuando su valor sea irrelevante en la demostración. Dado $(\sigma,z) \in Q_\varepsilon(t,x)$, estimaremos cotas para los términos:

$$\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) \qquad \text{y} \qquad \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z),$$

de las identidades (23) y (24).

Esto lo haremos hasta conseguir una expresión de la forma:

Lema 12.

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x)| \leq C \left(\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \int_{Q_\varepsilon(t,x)} |\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)|^p dz d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{26}$$

Primero, procedamos a acotar los términos de la parte derecha de la identidad (24). Por como definimos φ_ε tenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)| = \left|\frac{1}{\varepsilon^5}\varphi\left(\frac{t-\sigma}{\varepsilon^2},\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\right| \qquad \text{y} \qquad |\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)| = \left|\frac{2^5}{\varepsilon^5}\varphi\left(\frac{t-\sigma}{\varepsilon^2},\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\right|,$$

luego, como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ se sigue que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{1}{\varepsilon^5}\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \qquad \text{y} \qquad |\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{2^5}{\varepsilon^5}\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}},$$

ahora, del Lema 3 obtenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{2v_3}{|Q_\varepsilon|}\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \qquad \text{y} \qquad |\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{2^6 v_3}{|Q_\varepsilon|}\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}},$$

tomemos $C = 2^6 v_3\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}}$ para obtener:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{C}{|Q_\varepsilon|} \qquad \text{y} \qquad |\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)| \leq \frac{C}{|Q_\varepsilon|}. \tag{27}$$

De la identidad (24) y propiedades del valor absoluto, se sigue que:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x)| \leq \int_{Q_\varepsilon(t,x)} \Big(|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)| + |\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(t-\sigma,x-z)|\Big)\, |\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)|\, dzd\sigma,$$

aplicaremos las desigualdades obtenidas en (27) a nuestra desigualdad anterior y sin problema llamaremos C a $2C$ por ser una constante, entonces tenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x)| \leq \int_{Q_\varepsilon(t,x)} \left(\frac{C}{|Q_\varepsilon|}\right) |\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)|\, dzd\sigma,$$

luego, aplicando la desigualdad de Hölder a la expresión anterior:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x)| \leq \frac{C}{|Q_\varepsilon|}|Q_\varepsilon|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_\varepsilon(t,x)} |\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)|^p dzd\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Reescribiendo el lado derecho de la expresión anterior obtenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \star \vec{v}(t,x)| \leq C \left(\frac{1}{|Q_\varepsilon|}\int_{Q_\varepsilon(t,x)} |\vec{v}(\sigma,z) - M_\varepsilon(\vec{v})(t,x)|^p dzd\sigma\right)^{\frac{1}{p}},$$

la cual es la expresión (26) que estábamos buscando.

De forma similar estimaremos cotas para los términos de la identidad (23), es decir, hallaremos una expresión de la forma:

Lema 13.

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y)| \leq C d(t-s,x-y)\varepsilon^{\alpha-1}, \tag{28}$$

con $\varepsilon > d(t-s,x-y)$.

Ahora acotaremos los términos del lado derecho de la identidad (23). Por la desigualdad triangular se sigue que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)| \leq |\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)| + |\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)|. \tag{29}$$

Para el primer término de la derecha de la desigualdad anterior, podemos escribir que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)| = |\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z) - \varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}},$$

luego por propiedades del valor absoluto, se sigue que:

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)| \leq & \left(|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)|+|\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|\right)^{\frac{1}{2}}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)- \\ & \varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}}, \\ \leq & (2\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty_{t,x}})^{\frac{1}{2}}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ahora, por como definimos φ_ε tenemos que:

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)| &\leq \left(\frac{2}{\varepsilon^5}\|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}}\right)^{\frac{1}{2}}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Mientras tanto, gracias al Teorema de Incrementos Finitos con respecto a la variable temporal, obtenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|\partial_t\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty_{t,x}}|t-s|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, de la definición de φ_ε, tomando la derivada respecto a su variable temporal y acotando por la norma infinito de $\partial_t\varphi$ en nuestra desigualdad anterior tenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^7}\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty_{t,x}}|t-s|\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{7}{2}}}|t-s|^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Usando las estimaciones (30), (31) y la definición de distancia parabólica en el primer término del lado derecho de la desigualdad (29), tenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}}|t-s|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\varepsilon^6}d(t-s,x-y).$$

Para el segundo término del lado derecho de la expresión (29), gracias al Teorema de Incrementos Finitos con respecto a la variable espacial podemos escribir:

$$|\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)| \leq \|\vec{\nabla}_x\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty_{t,x}}|x-y|,$$

de donde, por la definición de φ_ε nos da que:

$$|\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)| \leq \frac{1}{\varepsilon^6}\|\vec{\nabla}_x\varphi\|_{L^\infty_{t,x}}|x-y| \leq \frac{C}{\varepsilon^6}|x-y|,$$

y gracias a la definición de distancia parabólica:

$$|\varphi_\varepsilon(s-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)| \leq \frac{C}{\varepsilon^6}d(t-s,x-y).$$

Al usar las desigualdades anteriores para acotar la expresión (29), obtenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon(t-\sigma,x-z)-\varphi_\varepsilon(s-\sigma,y-z)| \leq \frac{C}{\varepsilon^6}d(t-s,x-y) \leq \frac{C}{|Q_\varepsilon|}\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}.$$

Ahora, usando propiedades del valor absoluto y la desigualdad anterior en la identidad (23) tenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)| \leq \int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}\frac{C}{|Q_\varepsilon|}\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}|\vec{v}(\sigma,z)-M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)|dzd\sigma,$$

aplicando la desigualdad de Hölder a la expresión anterior se sigue que:

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(t,x)-\varphi_\varepsilon\star\vec{v}(s,y)| \leq & \frac{C}{|Q_\varepsilon|}\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}|Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}|\vec{v}(\sigma,z)- \right. \\ & \left. M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)|^p dzd\sigma\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

reescribiendo el lado derecho de la anterior desigualdad obtenemos que:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y)| \leq \frac{C}{|Q_\varepsilon|}\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}|Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}|\left(\frac{1}{|Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}|}\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}|\vec{v}(\sigma,z) - M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)|^p dz d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notemos que si $\varepsilon > d(t-s,x-y)$, entonces $|Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}| \leq |Q_{2\varepsilon}|$ y además del cálculo del volumen de la bola parabólica tenemos que $|Q_{2\varepsilon}| = 2^5|Q_\varepsilon|$, tomando en cuenta esta observación, podemos escribir la expresión anterior como sigue:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y)| \leq 2^5 C\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{|Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}|}\int_{Q_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(t,x)}|\vec{v}(\sigma,z) - M_{\varepsilon+d(t-s,x-y)}(\vec{v})(t,x)|^p dz d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$$

Finalmente, por hipótesis sabemos que $\vec{v}$ satisface la condición (18), así podemos acotar la expresión anterior de la siguiente forma:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y)| \leq C\frac{d(t-s,x-y)}{\varepsilon}(\varepsilon + d(t-s,x-y))^\alpha \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y) - M_r(\vec{v})(t,x)|^p dy ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

de donde, como supusimos que $\varepsilon > d(t-s,x-y)$, se sigue que:

$$|\varphi_\varepsilon \star \vec{v}(t,x) - \varphi_\varepsilon \star \vec{v}(s,y)| \leq C d(t-s,x-y)\varepsilon^{\alpha-1},$$

y con esto hemos obtenido la expresión (28) como queríamos.

Etapa 4. Con ayuda de las desigualdades halladas en las Etapa 3, mostraremos la convergencia uniforme de la serie:

$$S(t,x,s,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(s,y)), \tag{32}$$

en cualquier subconjunto acotado B de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$; y concluiremos que S es continua en todo $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$.

Sea $B \subsetneq (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$ acotado, podemos tomar $R > 0$ tal que, para todo $((t,x),(s,y)) \in B$, se cumpla que $d(t-s,x-y) < R$.

Sea $((t,x),(s,y)) \in B$ cualquiera. Consideremos $N \in \mathbb{Z}$ tal que $2^N > R$. Luego, por la desigualdad triangular tenemos que:

$$|(\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(s,y))| \leq |\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)| + |\varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(s,y)|.$$

Como para todo $j \geq N$, $2^j > R > d(t-s,x-y)$; considerando $\varepsilon = 2^j$ en la desigualdad (28), se sigue que para todo $j \geq N$:

$$|\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)| \leq C d(t-s,x-y)2^{j(\alpha-1)},$$

y de forma similar obtenemos que:

$$|\varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(s,y)| \leq C d(t-s,x-y)2^{(j+1)(\alpha-1)},$$

de donde, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq & Cd(t-s,x-y)2^{j(\alpha-1)} + \\
& Cd(t-s,x-y)2^{(j+1)(\alpha-1)},
\end{aligned}
$$

en consecuencia:

$$
|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq Cd(t-s,x-y)2^{j(\alpha-1)}, \tag{33}
$$

como $d(t-s,x-y) < R$, obtenemos que:

$$
|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq CR\, 2^{j(\alpha-1)}. \tag{34}
$$

Nuevamente, por la desigualdad triangular tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq & \left|\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x)\right| + \\
& \left|\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)\right|.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para los términos $j < N$, y considerando $\varepsilon = 2^{j+1}$ en la desigualdad (26) tenemos que:

$$
|\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x)| \leq C\ 2^{(j+1)\alpha} = (2^\alpha C)2^{j\alpha},
$$

denotando con C a $2^\alpha C$ se sigue que:

$$
|\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x)| \leq C2^{j\alpha}.
$$

De manera similar, notemos que la desigualdad (26) también se cumple para (s,y); así:

$$
|\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)| \leq C2^{j\alpha},
$$

por tanto:

$$
|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq C\ 2^{j\alpha}. \tag{35}
$$

Notemos que la serie $S(t,x,s,y)$ definida en (32) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
S(t,x,s,y) = & \sum_{j\geq N} \left(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)\right) - \left(\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y)\right), \\
& + \sum_{j<N} \left(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)\right) - \left(\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y)\right).
\end{aligned}
$$

Entonces, de las desigualdades (34) y (35) y las propiedades del valor absoluto, tenemos que:

$$
|S(t,x,s,y)| \leq \sum_{j\geq N} CR\, 2^{j(\alpha-1)} + \sum_{j<N} C2^{j\alpha}.
$$

Para $\alpha > 0$ y $\alpha - 1 < 0$, las series

$$
\sum_{j\geq N} 2^{j(\alpha-1)} \quad \text{y} \quad \sum_{j<N} 2^{j\alpha},
$$

son convergentes, y como $((t,x),\,(s,y)) \in B$ es cualquiera, la serie S definida en (32) es uniformemente convergente en B. Más aún, como B es arbitrario, S es convergente en $L^\infty(B)$ para todo $B \subset (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$ acotado, así en $L^\infty_{loc}((\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2)$.

Además, notar que por las propiedades de la convolución, para todo $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon \star \vec{v}$ es continua en todo $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, entonces, las sumas parciales de la serie definida en (32) son continuas en $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$. Luego, dado que S converge uniformemente en compactos, se sigue que $S \in \mathcal{C}^0(B)$ para todo $B \subset (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$ compacto. Lo que implica que $S \in C^0((\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2)$.

Etapa 5. Recordemos que un punto $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ se dice *punto de Lebesgue* para la función $\vec{v}$ si:

$$
\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|Q_r(t,x)|} \int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(\sigma,z) - \vec{v}(t,x)|\, dzd\sigma = 0.
$$

El lector interesado en este concepto puede consultar el libro [3].

Con esta noción, supondremos que (t,x) y (s,y) son puntos de Lebesgue para $\vec{v}$ y mostraremos que la serie:

$$S(t,x,s,y) = \vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y),$$

en todos los puntos de Lebesgue (t,x) y (s,y). Y así podremos concluir que como S es continua entonces podemos identificar la serie (32) con $\vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y)$ en $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^2$.

Ahora que hemos demostrado la convergencia de la serie, según la expresión (32), para (t,x) y (s,y) fijos podemos expresar $S(t,x,s,y)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S(t,x,s,y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}}\star\vec{v}(s,y)) \\ &= \lim_{j\to+\infty} \sum_{-j\leq k\leq j} (\varphi_{2^k}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^k}\star\vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{k+1}}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{k+1}}\star\vec{v}(s,y)), \end{aligned}$$

dado que $S(t,x,s,y)$ tiene forma de una serie telescópica, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} S(t,x,s,y) &= \lim_{j\to-\infty} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) - \lim_{j\to+\infty} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)), \\ &= \lim_{j\to-\infty} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x)) - \lim_{j\to-\infty} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) - \lim_{j\to+\infty} (\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)). \end{aligned} \tag{36}$$

Supongamos que (t,x) y (s,y) son puntos de Lebesgue de $\vec{v}$. Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon dxdt = 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \vec{v}(t,x)| &\leq \left|\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_{2^j}(t-\sigma,x-z)\vec{v}(t,x)dzd\sigma\right|, \\ &\leq \left|\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\varphi_{2^j}(t-\sigma,x-z)\left(\vec{v}(\sigma,z)-\vec{v}(t,x)\right)dzd\sigma\right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left|\varphi_{2^j}(t-\sigma,x-z)\left(\vec{v}(\sigma,z)-\vec{v}(t,x)\right)\right|dzd\sigma. \end{aligned}$$

Ahora, acotando según las desigualdades que presentamos en (27), se sigue que:

$$|\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \vec{v}(t,x)| \leq \frac{C}{|Q_{2^j}|}\int_{Q_{2^j}(t,x)}|\vec{v}(\sigma,z)-\vec{v}(t,x)|\,dzd\sigma,$$

luego, como (t,x) es un punto de Lebesgue de $\vec{v}$, aplicando la definición de punto de Lebesgue, obtenemos que:

$$|\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x) - \vec{v}(t,x)| \leq \frac{C}{|Q_{2^j}|}\int_{Q_{2^j}(t,x)}|\vec{v}(\sigma,z)-\vec{v}(t,x)|\,dzd\sigma \xrightarrow[j\to-\infty]{} 0. \tag{37}$$

Por lo tanto, por el teorema del sándwich, se sigue que:

$$\lim_{j\to-\infty}(\varphi_{2^j}\star\vec{v}(t,x)) = \vec{v}(t,x).$$

De manera similar, puesto que (s,y) también es un punto de Lebesgue de $\vec{v}$, obtenemos que:

$$\lim_{j\to-\infty}(\varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)) = \vec{v}(s,y).$$

Además, según la desigualdad (28), como $0<\alpha<1$, se sigue que:

$$\lim_{j\to+\infty}|\varphi_{2^j}*\vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j}\star\vec{v}(s,y)| \leq Cd(t-s,x-y)\lim_{j\to+\infty}2^{j(\alpha-1)} = 0,$$

y así se tiene finalmente, según la expresión (36), para todos los puntos de Lebesgue (t,x) y (s,y) de $\vec{v}$ tenemos que:

$$S(t,x,s,y) = \vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y).$$

Por lo tanto, como $\vec{v} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)\right)_{loc}$, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, esta relación es válida en casi todas partes en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)^2$. Así, como S es continua, entonces, identificamos la serie (32) con $\vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y)$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)^2$.

Etapa 6. La identidad demostrada en la Etapa 5 nos permitirá concluir la demostración, es decir, vamos a mostrar que $\vec{v} \in \dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ al estudiar los términos que componen la serie. Finalizaremos la demostración hallando una expresión de la forma:

$$\frac{|\vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^\alpha} \leq C.$$

Ahora demostraremos que $\vec{v}$ pertenece a $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ estudiando los términos de la serie.

Fijemos (t,x) y (s,y) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, y tomemos $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2^n \leq d(t-s,x-y)$ y $2^{n+1} > d(t-s,x-y)$. Utilizando la desigualdad (34), tenemos para todo $j > n$ la siguiente acotación:

$$|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq Cd(t-s,x-y)\ 2^{j(\alpha-1)},$$

por propiedades de potencia tenemos que:

$$|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq Cd(t-s,x-y)(2^{n+1})^{\alpha-1}\ 2^{(j-n-1)(\alpha-1)},$$

luego, como $2^{n+1} > d(t-s,x-y)$ y $\alpha - 1 < 0$ se sigue que:

$$\begin{aligned}|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| &\leq Cd(t-s,x-y)d(t-s,x-y)^{\alpha-1} \\ &\quad 2^{(j-n-1)(\alpha-1)} \\ &\leq Cd(t-s,x-y)^\alpha\ 2^{(j-n-1)(\alpha-1)} \qquad (38)\end{aligned}$$

Para los términos $j \leq n$, tomamos la desigualdad (35) y obtenemos que:

$$|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq C\ 2^{j\alpha},$$

luego, por propiedades de potencia se sigue que:

$$|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq C\ 2^{n\alpha}\ 2^{(j-n)\alpha},$$

como $2^n \leq d(t-s,x-y)$ y $\alpha > 0$ obtenemos que:

$$|(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| \leq Cd(t-s,x-y)^\alpha\ 2^{(j-n)\alpha}. \qquad (39)$$

Por otro lado, por la forma en la que definimos $S(t,x,s,y)$ en la expresión (32), tenemos que:

$$\begin{aligned}S(t,x,s,y) = &\sum_{j\leq n} (\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y)) + \\ &\sum_{j>n} (\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y)),\end{aligned}$$

de donde por las propiedades del valor absoluto, se sigue que:

$$\begin{aligned}|S(t,x,s,y)| \leq &\sum_{j\leq n} |(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))| + \\ &\sum_{j>n} |(\varphi_{2^j} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^j} \star \vec{v}(s,y)) - (\varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(t,x) - \varphi_{2^{j+1}} \star \vec{v}(s,y))|.\end{aligned}$$

A partir de esta última estimación, junto con las desigualdades (38), (39) y la identidad obtenida en la etapa 5 ,conseguimos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}|\vec{v}(t,x) - \vec{v}(s,y)| = |S(t,x,s,y)| &\leq Cd(t-s,x-y)^\alpha \left(\sum_{j\leq n} 2^{(j-n)\alpha} + \sum_{j>n} 2^{(j-n-1)(\alpha-1)}\right), \\ &\leq Cd(t-s,x-y)^\alpha \left(\sum_{j\leq 0} 2^{j\alpha} + \sum_{j\geq 0} 2^{j(\alpha-1)}\right)\end{aligned}$$

calculando las series anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}|\vec{v}(t,x)-\vec{v}(s,y)| &\leq Cd(t-s,x-y)^{\alpha}\left(\frac{1}{1-2^{-\alpha}}+\frac{1}{1-2^{\alpha-1}}\right)\\ &\leq Cd(t-s,x-y)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Por tanto hemos obtenido que:

$$\frac{|\vec{v}(t,x)-\vec{v}(s,y)|}{d(t-s,x-y)^{\alpha}} \leq C,$$

así podemos concluir que $\vec{v} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ como queríamos demostrar.

■

Referencias

[1] D. Chamorro, *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, Colección de Matemáticas Universitarias, Vol 1. Editorial Amarun, 2017.

[2] D. Chamorro, *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, Colección de Matemáticas Universitarias, Vol 2. Editorial Amarun, 2017.

[3] D. Chamorro, *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, Colección de Matemáticas Universitarias, Vol 3. Editorial Amarun, 2021.

[4] P. G. Lemarié-Rieusset, *The Navier-Stokes problem in the 21st century*, CRC press, 2018.