<u>Lección n°2</u>: **Espacios de Morrey parabólicos** Escuela Politécnica Nacional 2023

1. Introducción

En la lección anterior estudiamos a los espacios de Lebesgue tiempo-espacio y a los espacios de Hölder parabólicos con el objetivo de estudiar la regularidad hölderiana de las soluciones de la ecuación de calor no homogénea $\partial_t u = \Delta u + f$, pero para ello es necesario detallar a qué espacio funcional pertenece la fuerza exterior f y evidentemente existen muchísimas posibilidades. El objetivo general de esta serie de lecciones es considerar el caso cuando la fuerza exterior f pertenece a un espacio de Morrey parabólico. Estos espacios son generalizaciones muy útiles de los espacios de Lebesgue e intervienen en muchas aplicaciones, es por esta razón que en estas páginas detallaremos algunas propiedades elementales de estos espacios para en la lección siguiente ponerlos en acción.

2. Espacios de Morrey parabólicos

Ahora introduciremos los espacios de Morrey parabólicos.

Definición 1. *Sean p y q, tales que $1 \leq p \leq q < +\infty$, definimos el espacio de Morrey parabólico, denotado por $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, como el conjunto:*

$$\left\{\vec{v} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc},\ \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} < +\infty\right\},$$

donde, consideramos el funcional $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ definido sobre $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ a valores en $\mathbb{R}$, de la siguiente forma:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

para cada $\vec{v}\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

Observación 2.1. *El espacio $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ comprende a las funciones vectoriales $\vec{v}$ definidas sobre el espacio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{R}^3$, mientras que el espacio de Morrey parabólico $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ comprende a las funciones v definidas sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{R}$.*

Ahora, consideremos el siguiente resultado:

Lema 1. *Para cualesquier p y q, tales que $1 \leq p \leq q < +\infty$, el funcional $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ presentado en la Definición 1 es una norma sobre $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Sean p y q, tales que $1 \leq p \leq q < +\infty$, $\vec{v},\vec{w} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, cualesquiera.

- Es inmediato que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \geq 0$ ya que, para cualquier $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r>0$, como $\vec{v} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$, entonces:

$$\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)|^p dxdt \geq 0.$$

- Mostremos que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = 0$ si y sólo si $\vec{v}=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

  De manera trivial se cumple que, si $\vec{v}=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ entonces $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = 0$.

Por otro lado, si $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = 0$, gracias a la definición de supremo se sigue que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y cada $r > 0$, tenemos que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt = 0,$$

y como $|\vec{v}(t,x)|^p$ define una función no negativa, se sigue que $\vec{v} = 0 \quad$ c.t.p. en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

- Por otro lado, es fácil ver que $\|\lambda\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = |\lambda|\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$. En efecto:

$$\|\lambda\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\lambda\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

- Finalmente, probemos que se satisface la desigualdad triangular, es decir que se cumple que:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} + \|\vec{w}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Puesto que $\vec{v}, \vec{w} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y cada $r > 0$, gracias a la desigualdad de Minkowski, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x) + \vec{w}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{w}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

de donde, por propiedades del supremo se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\\ r>0}} \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x) + \vec{w}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{\substack{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\\ r>0}} \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \sup_{\substack{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\\ r>0}} \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{w}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En consecuencia, de la definición del funcional $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ se tiene que:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} + \|\vec{w}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

■

Observemos los siguientes ejemplos de funciones en $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Ejemplo 1. *Consideremos la siguiente función indicatriz:* $\mathbb{1}_{Q_1(0,0)} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sean p y q, tales que $1 \leq p \leq q < +\infty$. Mostremos que $\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}$ pertenece al espacio de Morrey parabólico $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$; para ello, notemos que $\mathbb{1}_{Q_1(0,0)} \in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$ pues $\mathbb{1}_{Q_1(0,0)} \in L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Ahora, probemos que la norma:

$$\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}},$$

es finita.
Si $p = q$ entonces el resultado es inmediato, en efecto:

$$\begin{aligned} \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) dxdt \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

de donde:

$$\sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}|Q_1|^{\frac{1}{p}} \leq |Q_1|^{\frac{1}{p}},$$

y obtenemos lo requerido.
Por otro lado, supongamos que $p<q$. Sean $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r>0$, por las propiedades de la función indicatriz y por propiedades de los exponentes, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|dxdt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, como $p<q$, considerando $p_0=\frac{q}{p}$ y $q_0=\frac{q}{q-p}$, notemos que estos cumplen que: $p_0,\, q_0>1$, $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$ y además que, $\frac{1}{p\,q_0}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=0$. Entonces, de la desigualdad de Hölder, se cumple que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\left[\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|1|^{q_0}dxdt\right)^{\frac{1}{q_0}}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\left[\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}dxdt\right)^{\frac{1}{q_0}}\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Luego, por las propiedades de la integral y recordando que en la Lección 1 (Introducción a espacios parabólicos) se mostró que el volumen de la bola parabólica, $|Q_r|$, es Cr^5, donde C es una constante positiva; se sigue que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}|Q_r|^{\frac{1}{q_0}}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{C^{\frac{1}{p\,q_0}}\,r^{\frac{5}{p\,q_0}}}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|^{\frac{1}{p}}_{L^{p_0}_{t,x}}.\end{aligned}$$

Operando en el lado derecho de la última desigualdad, se sigue que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \leq C^{\frac{1}{p\,q_0}}\,r^{5\left(\frac{1}{pq_0}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|^{\frac{1}{p}}_{L^{p_0}_{t,x}}. \tag{1}$$

Recordando que $\frac{1}{p\,q_0}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=0$, y llamando C a la constante positiva, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q(0,1)}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|^{\frac{1}{p}}_{L^{p_0}_{t,x}}.$$

Finalmente, como $\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\in L^{p_0}_{t,x}$; es decir, $\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|_{L^{p_0}_{t,x}}<+\infty$, y como la última cota es independiente de $t_0,\ x_0$ y r, se sigue que $\|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}<+\infty$ como queríamos probar.

Ejemplo 2. *Sean p y q reales, tales que $1\leq p\leq q<+\infty$. Consideremos como ejemplo la siguiente función:*

$$\begin{aligned} f_\sigma : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t,x) &\longmapsto f_\sigma(t,x)=\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|x|^{-\sigma},\end{aligned}$$

donde $\sigma<\frac{3}{q}$. Probemos que $f_\sigma\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Mostremos que la norma:

$$\|f_\sigma\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p|x|^{-\sigma p}dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

es una cantidad acotada.
Sean $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, notemos que por propiedades de la función indicatriz y de los exponentes, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p |x|^{-\sigma p} dxdt \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)| \frac{1}{|x|^{\sigma p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Realizando un procedimiento similar al del ejemplo anterior, tomando p_0 y q_0 como antes, gracias a la desigualdad de Hölder, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p |x|^{-\sigma p} dxdt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \left[\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^{p_0} \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \right)^{\frac{1}{p_0}} |Q_r|^{\frac{1}{q_0}} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C r^{5\left(\frac{1}{pq_0}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \right)^{\frac{1}{p\,p_0}}, \end{aligned}$$

de donde, como $p_0 = \frac{q}{p}$ y $q_0 = \frac{q}{q-p}$, se sigue que:

$$\left(\frac{1}{r^{5(1-\frac{p}{q})}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x)|^p |x|^{-\sigma p} dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \right)^{\frac{1}{p\,p_0}}. \tag{2}$$

Ahora, estimemos la integral del lado derecho de la desigualdad anterior. Utilizando la definición de la función indicatriz, podemos reescribir la integral como:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt = \int_{Q_r(t_0,x_0)\cap Q_1(0,0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt.$$

Luego, como $Q_r(t_0,x_0) \cap Q_1(0,0) \subseteq Q_1(0,0)$, por las propiedades de la integral y la definición de la bola parabólica $Q_1(0,0)$, se sigue que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \leq \int_{Q_1(0,0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \leq \int_0^1 \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dx \right) dt,$$

es decir, resolviendo la integral respecto a t,

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dx.$$

Ahora, usando un cambio de variable a coordenadas polares en la integral del lado derecho de la última expresión, tenemos que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \leq \omega_3 \int_0^1 \frac{1}{s^{p\sigma p_0}} s^2 ds,$$

donde ω_3 denota el área de la esfera $S(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, resolviendo la integral del lado derecho, obtenemos que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_{Q_1(0,0)}(t,x) \frac{1}{|x|^{p\sigma p_0}} dxdt \leq \omega_3 \int_0^1 s^{2-p\sigma p_0} ds = \frac{\omega_3}{3 - p\sigma p_0}.$$

Notemos que la última expresión esta bien definida, pues $\sigma < \frac{3}{q}$ y $p_0 = \frac{q}{p}$.
Finalmente, como el lado derecho de la última expresión no depende de t_0, x_0 y r, juntando esta desigualdad con la identidad (2), concluimos que:

$$\|f_\sigma\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \frac{\omega_3}{3 - q\sigma} < +\infty,$$

como se quería probar.

Lema 2. *Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con $1 \leq p \leq q < +\infty$. Si $|\vec{v}(t,x)| \leq |\vec{u}(t,x)|$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, entonces:*

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$$

.

Demostración. Puesto que se tiene $|\vec{v}(t,x)| \leq |\vec{u}(t,x)|$ en c.t.p. sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, entonces, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y todo $r > 0$, tenemos

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \leq \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{u}(t,x)|^p dxdt,$$

de donde:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{u}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y todo $r > 0$, es decir:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

$\blacksquare$

Lema 3. *Sea $\vec{v} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tenemos que se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Para una constante $C > 0$, tenemos que se cumple la identidad:*

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{C}{|Q_r|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}. \quad (3)$$

2) *Si $p = q$, tenemos que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} = \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}$.*

Demostración.

1) Sea $\vec{v} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}$ mostremos que se cumple la identidad (3). Por definición tenemos que

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

luego, recordando que en la Lección 1 se mostró que el volumen de la bola parabólica, $|Q_r|$, es Cr^5 podemos escribir la expresión anterior como sigue:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{C}{|Q_r|^{\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4)$$

Luego, reescribiendo la parte derecha de la identidad anterior tenemos que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{C^{\frac{1}{p}}}{|Q_r|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, de la definición de norma en $L^p_{t,x}$ y tomando $C = C^{\frac{1}{p}}$ dado que son constantes, se sigue que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{C}{|Q_r|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}.$$

como queríamos demostrar.

2) Supongamos que $p=q$ y mostremos que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} = \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}$. Por la definición de la norma sobre el espacio de Morrey parabólico tenemos que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}},$$

luego, puesto que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt,$$

para todo $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y todo $r>0$, se sigue que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}. \tag{5}$$

Por otro lado, notemos que para cualquier $n\geq 1$ natural,

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} \geq \left(\int_{Q_n(0,0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathbb{1}_{Q_n(0,0)}\vec{v}\|_{L^p_{t,x}}. \tag{6}$$

Definamos para cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ la cantidad $\vec{v_n} = \mathbb{1}_{Q_n(0,0)}|\vec{v}|^p$. Vemos que $(\vec{v_n})_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones no negativas integrables en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ gracias a que $\vec{v}\in \left(L^p_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\right)_{loc}$. Además, notemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \vec{v_n}(t,x) = |\vec{v}(t,x)|^p,$$

para casi todo $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. En efecto, para cualquier $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, existe $N\in\mathbb{N}$ (que depende de (t,x)) suficientemente grande tal que $(t,x)\in Q_n(0,0)$ para todo $n\geq N$; así, de la definición de $\vec{v_n}$ se sigue lo requerido.

Por tanto, gracias al Teorema de Convergencia Monótona, se sigue:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{Q_n(0,0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt,$$

de donde:

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathbb{1}_{Q_n(0,0)}\vec{v}\|_{L^p_{t,x}} = \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}},$$

que junto con (6), nos permite obtener:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} \geq \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}},$$

lo que a su vez junto con la desigualdad (5) demuestra que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,p}_{t,x}} = \|\vec{v}\|_{L^p_{t,x}},$$

como queríamos.

■

Observación 2.2. *Cuando $p>q$, el exponente $5\left(1-\frac{p}{q}\right)$ es estrictamente negativo, entonces tenemos que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ es finito si y sólo si $\vec{v}=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.*

En efecto, vemos que si $\vec{v}=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, se cumple trivialmente que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ es una cantidad finita. Recíprocamente, supongamos que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ es una cantidad finita. Por reducción al absurdo, supongamos que $\vec{v}\neq 0$ en un conjunto $B\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de medida no nula. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B=Q_\rho(t_1,x_1)$, donde $(t_1,x_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $\rho>0$; así:

$$0 < \int_{Q_\rho(t_1,x_1)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt < +\infty. \tag{7}$$

Podemos reescribir la expresión de la Definición 1 de la siguiente forma:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

de donde:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \geq \sup_{r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_1,x_1)}|\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

la cual, gracias a (7), es una cantidad no acotada puesto que $5(1-\frac{p}{q})$ es estrictamente negativa; esto contradice que $\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}$ es finita. Así, $\vec{v}$ debe ser cero c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

Podemos citar la siguiente propiedad de inclusión de los espacios de Lebesgue sobre los espacios de Morrey.

Proposición 2.1. *Sean $1 \leq p_0 \leq q_0 < +\infty$ y $p, q \geq p_0$ tales que $\frac{5}{q_0} = \frac{2}{p} + \frac{3}{q}$, entonces tenemos que:*

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x}$$

para todo $\vec{v} \in L^p_t L^q_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.
En particular, tenemos la inyección continua $L^{q_0}_{t,x} \hookrightarrow \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}$.

Demostración. Tomemos $p^*, q^* \geq 1$ tales que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p_0} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p_0}. \tag{8}$$

Multiplicando la primera expresión por 2, la segunda por 3 y sumando ambas, se tiene que:

$$\frac{2}{p^*} + \left(\frac{2}{p} + \frac{3}{q}\right) + \frac{3}{q^*} = \frac{5}{p_0},$$

luego usando la hipótesis $\frac{5}{q_0} = \frac{2}{p} + \frac{3}{q}$ tenemos que:

$$\frac{2}{p^*} + \frac{3}{q^*} = \frac{5}{p_0} - \left(\frac{2}{p} + \frac{3}{q}\right) = \frac{5}{p_0} - \frac{5}{q_0} = 5\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}\right),$$

es decir:

$$\frac{2}{p^*} + \frac{3}{q^*} = 5\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}\right). \tag{9}$$

Recordemos que por la Observación 2.1. de la Lección 1, $L^{p_0}(\mathbb{R}, L^{p_0}(\mathbb{R}^3)) \simeq L^{p_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.
Sean $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r > 0$, entonces se puede aplicar la desigualdad de Hölder a la función $\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}$ con los exponentes de las igualdades (8); y obtenemos que:

$$\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left\|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}\right\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left\|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\right\|_{L^{p^*}_t L^{q^*}_x}\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x}.$$

En la última expresión, tenemos que:

$$\left\|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\right\|_{L^{p^*}_t L^{q^*}_x} = C\, r^{\left(\frac{2}{p^*}+\frac{3}{q^*}\right)},$$

con C una constante positiva; así, obtenemos que:

$$\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left\|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}\right\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \frac{C}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}} r^{\left(\frac{2}{p^*}+\frac{3}{q^*}\right)}\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x} \leq C r^{\left(\frac{2}{p^*}+\frac{3}{q^*}\right)-5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x},$$

después usando la identidad obtenida en (9) tenemos que:

$$\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left\|\mathbb{1}_{Q_r(t_0,x_0)}\vec{v}\right\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x}.$$

Finalmente, como en la expresión anterior $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y $r > 0$ son arbitrarios, por la identidad (3) del Lema 3 y la definición de supremo, concluimos que:

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{L^p_t L^q_x},$$

como queríamos demostrar. ■

A continuación, presentaremos las desigualdades de tipo Hölder para los espacios de Morrey.

Lema 4.

1) Sean $\vec{v} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tenemos que

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}},$$

para todo $1 \leq p \leq q < +\infty$

2) Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y $2 \leq p \leq q < +\infty$, entonces se sigue que

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

3) De forma más general, consideremos $1 \leq p_0 \leq q_0 < +\infty$, $1 \leq p_1 \leq q_1 < +\infty$, y $1 \leq p_2 \leq q_2 < +\infty$. Además, supongamos que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_0} \qquad y \qquad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_0},$$

entonces se sigue que:

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_2,q_2}_{t,x}},$$

para todas las funciones $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,

Demostración.

1) Sean $1 \leq p \leq q < +\infty$, $\vec{v} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, por la Definición 1 para la norma en un espacio de Morrey parabólico tenemos que:

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x) \cdot \vec{u}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}},$$

luego, como $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y por propiedades del producto punto, obtenemos:

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq ||\vec{u}||_{L^\infty_{t,x}} \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}},$$

finalmente usando las definiciones para las normas en los espacios $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}$ y $L^\infty_{t,x}$ se sigue que

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}}.$$

2) Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y $p \geq 2$, mostremos que:

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Para ello, usaremos la Definición 1, así tenemos que:

$$\|\vec{v} \cdot \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2}\frac{q}{2}}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{2p}{2q}\right)}} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{v}(t,x) \cdot \vec{u}(t,x)|^{\frac{p}{2}} dxdt \right)^{\frac{2}{p}},$$

luego, reescribiendo la parte derecha de la anterior identidad obtenemos:

$$\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} = \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\left(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}(1-\frac{p}{q})}}\right)^{\frac{2}{p}}\vec{v}(t,x)\cdot\left(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}(1-\frac{p}{q})}}\right)^{\frac{2}{p}}\vec{u}(t,x)\right|^{\frac{p}{2}}dxdt\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para $\frac{2}{p}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}$ se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\right)^{\frac{1}{p}}\vec{v}(t,x)\right|^{p}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\times \\ & \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\right)^{\frac{1}{p}}\vec{u}(t,x)\right|^{p}dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\right)^{\frac{1}{p}}\vec{v}(t,x)\right|^{p}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\times \\ & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\right)^{\frac{1}{p}}\vec{u}(t,x)\right|^{p}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Si reescribimos la parte derecha de la última desigualdad y nuevamente usamos la Definición 1 tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\times \\ & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{u}(t,x)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}},\end{aligned}$$

lo cual es lo que queríamos demostrar.

3) Sean $1\leq p_0\leq q_0<+\infty$, $1\leq p_1\leq q_1<+\infty$, $1\leq p_2\leq q_2<+\infty$ y $\vec{v},\vec{u}\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Además, supongamos que:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_0} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_0},$$

vamos a demostrar que:

$$\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_2,q_2}_{t,x}}.$$

De forma similar que en el literal anterior, usando la Definición 1 y reescribiendo la parte derecha, tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} &= \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_0}-\frac{5}{q_0}\right)}}\vec{v}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)\right|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}},\end{aligned}$$

luego, como $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_0}$ y $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_0}$ se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} &= \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_1}+\frac{5}{p_2}-\frac{5}{q_1}-\frac{5}{q_2}\right)}}\vec{v}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)\right|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_1}-\frac{5}{q_1}\right)}}\vec{v}(t,x)\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_2}-\frac{5}{q_2}\right)}}\vec{u}(t,x)\right|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}$$

Ahora usando la desigualdad de Hölder para $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_0}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_1}-\frac{5}{q_1}\right)}}\vec{v}(t,x)\right|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}}\times \\
& \left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_2}-\frac{5}{q_2}\right)}}\vec{u}(t,x)\right|^{p_2}dxdt\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
\leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_1}-\frac{5}{q_1}\right)}}\vec{v}(t,x)\right|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}}\times \\
& \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\left|\frac{1}{r^{\left(\frac{5}{p_2}-\frac{5}{q_2}\right)}}\vec{u}(t,x)\right|^{p_2}dxdt\right)^{\frac{1}{p_2}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, reescribiendo la parte derecha de la última desigualdad y usando la Definición 1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq & \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}}\times \\
& \sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\vec{u}(t,x)|^{p_2}dxdt\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_2,q_2}_{t,x}}
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

■

Lema 5. *Sean $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ un conjunto acotado, $1\leq p_0\leq q_0<+\infty$ y $1\leq p_1\leq q_1<+\infty$. Si $p_0\leq p_1$, y $q_0\leq q_1$, entonces tenemos que:*

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}, \tag{10}$$

para todo $\vec{v}\in\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

Demostración. Sean $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ un conjunto acotado, $1\leq p_0\leq q_0<+\infty$, $1\leq p_1\leq q_1<+\infty$ y $\vec{v}\in\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Supongamos que $p_0\leq p_1$, $q_0\leq q_1$ y mostremos que:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\leq C\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

Primero, puesto que $|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}|\leq|\vec{v}|$ c.t.p. en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, la segunda desigualdad de la expresión (10) se tiene gracias al Lema 2. Por otra parte, la demostración de la primera desigualdad de la expresión (10), vamos a dividirla en casos con respecto a nuestra suposición de $p_0\leq p_1$, y $q_0\leq q_1$.

Caso 1. Supongamos que $p_0=p_1$ y $q_0=q_1$, trivialmente tenemos que:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}=\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

de la expresión anterior obtenemos la desigualdad (10) que estábamos buscando.

Caso 2. Ahora, supondremos que $p_0=p_1$ y $q_0<q_1$.
Sean $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r>0$, como $p_0=p_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt &= \frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)}}\frac{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)}}{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt, \\
&= r^{5p_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}\right)}\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt,
\end{aligned}$$

donde $5\,p_1(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1})>0$, pues $1\leq q_0<q_1$.
Ahora, como $r\leq diam(\Omega)$ podemos acotar de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\leq C\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt,$$

con $C=diam(\Omega)^{5p_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}\right)}$, por lo que a su vez obtenemos:

$$\begin{aligned}\sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,r>0}&\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ &\leq C\sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,r>0}\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}},\end{aligned}$$

luego, usando la definición de norma para espacios de Morrey se sigue que:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

que era lo que queríamos mostrar.

Caso 3. Supongamos ahora que $p_0<p_1$ y $q_0=q_1$.
Sean $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r>0$, como $q_0=q_1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}&=\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_1}\right)}}\cdot\frac{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ &=r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}\cdot\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}},\end{aligned}$$

luego, como $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}<0$, se sigue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}&=\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}}\;\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ &=\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\frac{1}{r^{5p_0\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}}\cdot\frac{1}{r^{5p_0\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}\tag{11}$$

como Ω es acotado, utilizando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p^*}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ &\leq\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\frac{1}{r^5}dxdt\right)^{\frac{1}{p^*}}\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq\frac{C}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}},\end{aligned}\tag{12}$$

de donde:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

Caso 4. Finalmente supongamos que $p_0<p_1$ y $q_0<q_1$, entonces existe $\sigma\in\,]0,\infty[$ tal que $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{\sigma}$.
Luego para todo $(t,x)\in Q_\gamma(t_0,x_0)$ y $r<\gamma$ obtenemos que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}=r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}\cdot r^{5\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}\right)}\frac{1}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Dado que $\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}>0$, utilizamos el procedimiento descrito en el caso 2, obteniendo:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\leq r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}\frac{C}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Luego, como $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}<0$ obtenemos la misma expresión (11) del caso 3. Por tanto se tiene que:

$$\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p_0}{q_0}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_0}dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\leq\frac{C}{r^{5\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}}\left(\int_{Q_r(t_0,x_0)}|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}(t,x)|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

de donde:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

■

Observación 2.3. *Dados Ω es un conjunto de acotado y $\vec{v}\in(L^p_{t,x})_{loc}$, si queremos demostrar que $\mathbb{1}_\Omega\vec{v}$ pertenece a $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, con $1\leq p\leq q<+\infty$, basta con demostrar que existe $\rho>0$ tal que, para cualquier $0<r<\rho$ y para todo $(t_0,x_0)\in\Omega$, tenemos:*

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt\leq Cr^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}.\tag{13}$$

En efecto, supongamos que se verifica la expresión (13). Vamos a mostrar que:

$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}=\sup_{(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0}\left(\frac{1}{r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}}\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty.$$

Primero, notemos que como Ω es acotado, tenemos que $\bar{\Omega}$ es compacto. También, vemos que

$$\bar{\Omega}\subseteq\bigcup_{(s,y)\in\Omega,\,0<r<\rho}Q_r(s,y),$$

así, existe un recubrimiento finito; es decir, $\bar{\Omega}\subseteq\bigcup_{j=1}^m Q_{r_j}(s_j,y_j)$, con $m\in\mathbb{N}$ y $(s_j,y_j)\in\Omega$, $0<r_j<\rho$ para todo $1\leq j\leq m$. Entonces, dado que $\Omega\subseteq\bar{\Omega}$, tenemos que

$$\Omega\subseteq\bigcup_{j=1}^m Q_{r_j}(s_j,y_j).\tag{14}$$

Para demostrar lo requerido consideremos los siguientes casos:

- Supongamos que $(t_0,x_0)\in\Omega$ y $r\geq\rho$. Notemos que, por propiedades de la función indicatriz,

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt=\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt=\int_{Q_r(t_0,x_0)\cap\Omega}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt,$$

  luego, de la identidad anterior y como $\Omega\cap Q_r(t_0,x_0)\subseteq\Omega$, de la expresión (14), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt&\leq\int_{\bigcup_{j=1}^m Q_{r_j}(s_j,y_j)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt\\&\leq\sum_{j=1}^m\int_{Q_{r_j}(s_j,y_j)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt.\end{aligned}$$

  En la desigualdad anterior, considerando que para todo $1\leq j\leq m$, $(s_j,y_j)\in\Omega$ y $0<r_j<\rho\leq r$, de la estimación (13), obtenemos que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)}\mathbb{1}_\Omega|\vec{v}|^p dx\,dt\leq\sum_{j=1}^m C{r_j}^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}\leq\sum_{j=1}^m Cr^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}\leq mCr^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}.\tag{15}$$

- Supongamos que $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \setminus \Omega$ y $0 < r < \rho$.
  Aquí nuevamente pueden darse dos situaciones: o bien $\Omega \cap Q_r(t_0, x_0) = \emptyset$ (con lo cual se sigue lo requerido directamente, pues la integral es 0) o $\Omega \cap Q_r(t_0, x_0) \neq \emptyset$.

  Cuando $\Omega \cap Q_r(t_0, x_0) \neq \emptyset$, existe $(t_1, x_1) \in \Omega \cap Q_r(t_0, x_0)$, con lo cual concluimos que $Q_r(t_0, x_0) \subseteq Q_{2r}(t_1, x_1)$. Haciendo uso de esta inclusión, de las propiedades de la integral tenemos que

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq \int_{Q_{2r}(t_1,x_1)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt.$$

  Si $0 < 2r < \rho$, dado que $(t_1, x_1) \in \Omega$, en la desigualdad anterior podemos usar la estimación (13) y obtenemos que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq 2^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)} C r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}.$$

  Por otro lado, si $2r \geq \rho$, podemos realizar un análisis análogo al realizado en primer caso y concluir que:

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq m 2^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)} C r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}.$$

  En resumen, hemos obtenido una constante $\widetilde{C}$ tal que para todo $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \setminus \Omega$ y $0 < r < \rho$,

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq \widetilde{C} r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}. \tag{16}$$

- Similarmente a lo realizado en el segundo caso, podemos concluir que existe $\widehat{C}$, una constante positiva, tal que para todo $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \setminus \Omega$ y $r \geq \rho$,

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq \widehat{C} r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}. \tag{17}$$

Finalmente, considerando $C_0 = \text{máx}\{C, mC, \widetilde{C}, \widehat{C}\}$, de la desigualdad (13) junto con lo obtenido en las expresiones (15), (16) y (17), tenemos que para todo $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ y $r > 0$,

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dx\, dt \leq C_0 r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)},$$

de donde, directamente podemos concluir que $\|\mathbb{1}_\Omega \vec{v}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} < +\infty$, como queríamos.

Observación 2.4. *Mejor aún, bastará con estudiar los rayos discretos del tipo $r = \kappa^n \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $\rho > 0$ y $0 < \kappa < 1$ fijos. Más concretamente, basta con demostrar que existen $\rho > 0$ y $0 < \kappa < 1$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(t_0, x_0) \in \Omega$, tenemos*

$$\int_{Q_{\kappa^n \rho}(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dt dx \leq C(\kappa^n \rho)^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}. \tag{18}$$

En efecto, observamos que podemos obtener la condición (13) a partir de (18): para todo $0 < r < \rho$, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa^{n+1}\rho < r \leq \kappa^n \rho$, y por tanto, obtenemos

$$\int_{Q_r(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dt dx \leq \int_{Q_{\kappa^n \rho}(t_0,x_0)} \mathbb{1}_\Omega |\vec{v}|^p dt dx \leq C\left(\kappa^n \rho \cdot \frac{\kappa}{\kappa}\right)^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)} \leq C r^{5\left(1-\frac{p}{q}\right)}.$$