Lección n°1: Dimensión de caja

Paris, 2025

1. Introducción: El conjunto de Cantor

Empezamos con la construcción del conjunto de Cantor, ya que nos servirá de arquetipo para muchos conceptos que se desarrollarán a continuación. Este puede construirse de diferentes maneras equivalentes.

Construcción geométrica: Comenzamos con el intervalo $[0,1]$, que se denota como $I_\emptyset$. A continuación, procedemos iterativamente de la siguiente forma:

1. Dividimos $I_\emptyset$ en 3 subintervalos de la misma longitud $(1/3)$ y seleccionamos los dos extremos; es decir, eliminamos el del medio. Para ser más precisos, eliminamos $]1/3, 2/3[$, de modo que nos quedamos con dos subintervalos cerrados $[0, 1/3]$ y $[2/3, 1]$. Denotamos los dos intervalos obtenidos por I_0 y I_1, respectivamente. El índice 0 se refiere a que I_0 está situado en el lado izquierdo de $I_\emptyset$, mientras que el índice 1 se refiere a que I_1 está situado en el lado derecho de $I_\emptyset$. Llamamos entonces a $C_1 = \{I_0, I_1\}$ la primera generación del conjunto de Cantor.

2. Para construir la segunda generación del conjunto de Cantor C_2, realizamos el mismo proceso geométrico en cada intervalo de C_1. Más concretamente, dividimos I_0 en 3 subintervalos de la misma longitud (3^{-2}), y eliminamos el del medio. Entonces, se obtienen dos subintervalos cerrados, denotados por I_{00} e I_{01}. Observemos que I_{00} y I_{01} distan entre sí una distancia de 3^{-2}. Para nombrarlos, se utiliza el mismo método que antes: I_{00} es el subintervalo izquierdo de I_0, y I_{01} es el subintervalo derecho de I_0. El mismo proceso se aplica a I_1 para obtener dos subintervalos I_{10} e I_{11}. Llamamos a $C_2 = \{I_{w_1w_2}\}_{(w_1,w_2)\in\{0,1\}^2}$, la segunda generación del conjunto de Cantor.

3. Procedemos por inducción: Supongamos que para algún $n \geq 1$, se ha construido la n-ésima generación del conjunto de Cantor $C_n = \{I_{w_1w_2\ldots w_n}\}_{(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in\{0,1\}^n}$, formada por 2^n intervalos cerrados disjuntos dos a dos, con la misma longitud 3^{-n}, mutuamente distantes por al menos 3^{-n}.

   Ahora, se divide cada uno de ellos en 3 subintervalos del mismo tamaño $3^{-(n+1)}$, y se elimina el subintervalo (abierto) del medio. De este proceso iterativo se deduce inmediatamente que cada $I_{w_1w_2\ldots w_n}$ da lugar a dos subintervalos denominados $I_{w_1w_2\ldots w_n0}$ e $I_{w_1w_2\ldots w_n1}$, que tienen longitud $3^{-(n+1)}$ y distan entre sí $3^{-(n+1)}$.

   Fijando $C_{n+1} = \{I_{w_1w_2\ldots w_nw_{n+1}}\}_{(w_1,w_2,\ldots,w_n,w_{n+1})\in\{0,1\}^{n+1}}$, termina la inducción.

Véase la figura 1 para una ilustración de esta construcción geométrica.

Definición 1.1 *Para cada $n \geq 1$ consideramos*

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in\{0,1\}^n} I_{w_1w_2\ldots w_n},$$

y definimos al conjunto de Cantor como sigue

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{C}_n.$$

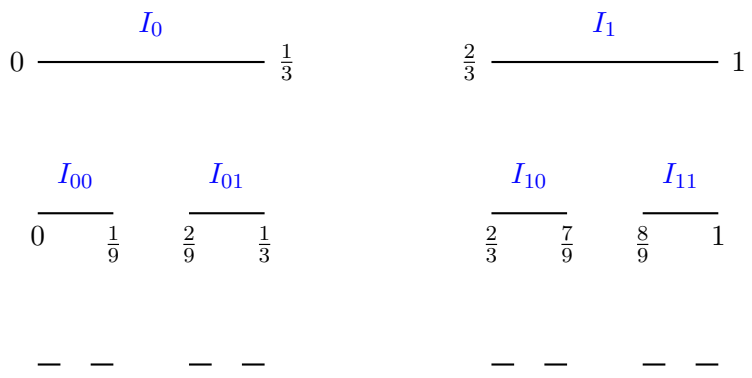

Figura 1: La construcción iterativa del Conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

Lema 1.1 *El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es no vacío, compacto, totalmente disconexo y de medida de Lebesgue nula.*

Demostración. Para cada $n \geq 1$, notamos que $\mathcal{C}_n$ es compacto no vacío, pues es la unión finita de intervalos compactos no vacíos (y disjuntos dos a dos). Mas aún, por construcción, $\{\mathcal{C}_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos, por lo que converge a un compacto no vacío.

Por otro lado, sea $x \in \mathcal{C}$. Para cada $n \geq 1$, llamamos $I_n(x)$ al único intervalo de la generación n en C_n que contiene a x. Como los intervalos de C_n son disjuntos dos a dos, se sigue que la componente conexa que contiene a x esta incluida en $I_n(x)$. Así, su diámetro es menor que 3^{-n}. Puesto que esto es cierto para cada n, la única componente conexa de $\mathcal{C}$ que contiene a x es $\{x\}$. Esto muestra que $\mathcal{C}$ es totalmente disconexo.

Finalmente, notar que para cada $n \geq 1$, $\mathcal{L}(\mathcal{C}_n) = 2^n \cdot 3^{-n} = (2/3)^n$, el cual tiende a cero cuando n tiende al infinito. Puesto que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$ para cada n, se sigue el resultado. ■

Daremos ahora una construcción equivalente para el conjunto de Cantor, que nos servirá para mostrar su no numerabilidad.

Construcción analítica: Sea $b \geq 2$ un número entero, y llamemos Σ_n^b al conjunto de palabras de longitud n con alfabeto $\{0, \dots, b-1\}$, y $\Sigma^b = \{0, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de palabras infinitas. El mapa $\pi_b : \Sigma^b \longrightarrow [0,1]$ definido por

$$\pi_b((v_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} v_n b^{-n},$$

es sobreyectivo. En otras palabras, cada $x \in [0,1]$ puede escribirse como $\sum_{n\geq 1} v_n b^{-n}$, para algún $v = (v_n)_n \in \Sigma^b$. Esta suma se llama *descomposición b-ádica de x*, y los términos v_n se conocen como los dígitos de x.

Observación 1.1 *El mapa π_b no es inyectivo: para toda palabra finita $v = (v_1, \dots, v_n) \in \Sigma_n^b$ donde $v_n \neq b-1$, se tiene que*

$$\pi_b(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, b-1, b-1, \dots) = \pi_b(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + 1, 0, 0, \dots).$$

Por ejemplo, si $b = 10$ entonces $0,899\cdots = 0,9$.

Por lo tanto, algunos números reales pueden tener dos descomposiciones diferentes. Un desarrollo b-ádico de $x \in [0,1]$ es propio cuando $x = \pi_b(v)$ y $v \in \Sigma^b$ es una palabra infinita que termina no solamente con dígitos iguales a $b-1$.

Lema 1.2 *Sea $n \geq 1$. Para cada $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \{0,1\}^n$,*

$$\pi_3\left(\{v = (v_i)_{i\geq 1} \in \Sigma^3 : v_i = 2w_i, \quad \textit{para todo } i = 1, \ldots, n\}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i}, \sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i} + 3^{-n}\right],$$
$$= I_{w_1 w_2 \ldots w_n}.$$

Demostración. Sea $v = (v_i)_{i\geq 1} \in \Sigma^3$ tal que $v_i = 2w_i$, con $i = 1, \ldots, n$ y $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \{0,1\}^n$. Escribimos $\pi_3(v) = \sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i} + \sum_{i\geq n+1} v_i 3^{-i}$. Notamos que el segundo término puede ser acotado de la siguiente forma

$$0 \leq \sum_{i\geq n+1} v_i 3^{-i} \leq \sum_{i\geq n+1} 2 \cdot 3^{-i} = 3^{-n}.$$

Así, claramente tenemos que

$$\pi_3\left(\{v = (v_i)_{i\geq 1} \in \Sigma^3 : v_i = 2w_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n\}\right) = \sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i} + \left[0, 3^{-n}\right].$$

Mas aún, notamos que por construcción, $\sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i}$ es el límite inferior del intervalo cerrado $I_{w_1 w_2 \ldots w_n}$ que corresponde a la $n-$ ésima generación del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

En consecuencia, $\left[\sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i}, \sum_{i=1}^{n} 2w_i 3^{-i} + 3^{-n}\right]$ corresponde a tal intervalo. ■

Observación 1.2 *Notar que, para cada $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \{0,1\}^n$, los dígitos v_i del lema anterior son ya sea 0 o 2. Por tanto, los intervalos de la generación n del conjunto de Cantor son exactamente aquellos intervalos triádicos con elementos cuyos primeros n dígitos son ya sea 0 o 2 en su descomposición triádica.*

Lema 1.3 *Existe una función sobreyectiva $\Psi : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$. En particular, $\mathcal{C}$ es no numerable.*

Demostración. Definimos el siguiente mapa $\Psi : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$ como sigue

$$\Psi(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{v_n}{2}\right) 2^{-n}, \quad x \in \mathcal{C},$$

donde $v = (v_n)_n \in \Sigma^3$ es tal que el desarrollo triádico $\sum_{n\geq 1} v_n 3^{-n}$ de x es propio.

Claramente Ψ esta bien definido. Más aún, de la Observación 1.2, para cada $n \geq 1$, $v_n/2 \in \{0,1\}$.

Así, el mapa Ψ transforma una descomposición triádica en una diádica. Ademas, cuando x 'recorre' $\mathcal{C}$, $\Psi(x)$ 'recorre' todo $[0,1]$. ■

El mapa Ψ del lema anterior se conoce como *Devil's staircase* (ver Figura 2).

2. Recubrimiento de conjuntos

El conjunto de Cantor usual $\mathcal{C}$ introducido en la sección anterior puede resultar 'inquietante' desde el punto de vista estándar: aunque tiene medida de Lebesgue 0, es (casi) homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Muchos otros objetos matemáticos requieren nociones bien adaptadas de dimensiones para medir su tamaño. En particular, uno quisiera saber qué tan grandes pueden ser los distintos conjuntos tipo Cantor, conjuntos fractales, etc. Esto justifica la introducción de la dimensión de caja y la dimensión de Hausdorff (Lección 2).

Para comprender las propiedades geométricas de un conjunto, un método consiste en describir cómo este conjunto puede ser cubierto eficazmente por otros conjuntos más pequeños. Todas las definiciones de dimensión de conjuntos dependen del tipo de recubrimiento que se utilice.

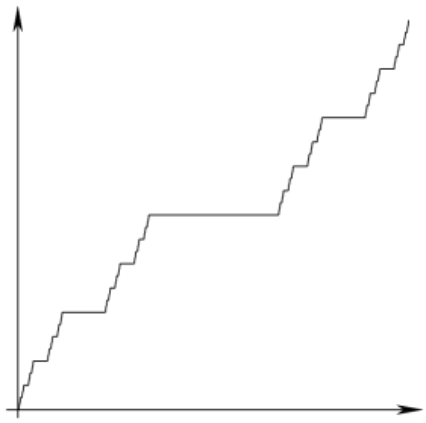

Figura 2: The Devil's staircase

Definición 2.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$, y $\varepsilon > 0$. Un recubrimiento de A es una familia de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ que satisface $A \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$.*

Un $\varepsilon-$ recubrimiento (resp. $\varepsilon-$ recubrimiento exacto) de A es un recubrimiento de A por una familia $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos cuyos diámetros son todos menores o iguales (resp. iguales) que ε.

El conjunto de $\varepsilon-$ recubrimientos (resp. $\varepsilon-$ recubrimientos exactos) de A se denota por $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ (resp. $\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(A)$).

En lo que sigue, dado que esencialmente sólo importan los diámetros de los conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ implicados en los recubrimientos, utilizaremos principalmente bolas euclidianas para cubrir un conjunto A.

Observación 2.1 *La familia $(\mathcal{R}_\eta(A))_{\eta>0}$ es evidentemente creciente. Sin embargo, no se cumple tal propiedad para los espacios $\widetilde{\mathcal{R}}_\eta(A)$.*

Definición 2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto acotado no vacío. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos las cantidades*

$$N_\varepsilon(A) = \min_{\mathcal{R}\in\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(A)} \#\mathcal{R}, \quad y \quad \widetilde{N}_\varepsilon(A) = \min\{\#\mathcal{R} : \mathcal{R} \in \widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(A) \text{ y } \mathcal{R} \text{ es una familia contable de cubos de lado } \varepsilon\}.$$

Las cantidades $N_\varepsilon(A)$ y $\widetilde{N}_\varepsilon(A)$ están bien definidas. En efecto, para cada $M > 0$

$$(2M/\varepsilon)^d \leq \widetilde{N}_\varepsilon([-M, M]^d) \leq (2M/\varepsilon + 1)^d.$$

Puesto que A está contenido en algún cubo, la cantidad $\widetilde{N}_\varepsilon(A)$ está bien definida y es finita. Luego, notar que cada cubo de lado ε está cubierto por un número fijo de bolas euclidianas de diámetro ε , y viceversa. Por tanto, se observa fácilmente que existen dos constantes $C_1(d), C_2(d) > 0$, que dependen únicamente de la dimensión, tales que

$$C_1(d) \leq \frac{N_\varepsilon(A)}{\widetilde{N}_\varepsilon(A)} \leq C_2(d). \tag{1}$$

Esto prueba que la cantidad $N_\varepsilon(A)$ también está bien definida y es finita.

Los valores óptimos de $C_1(d)$ y $C_2(d)$ son preguntas interesantes, pero no son relevantes para nuestros propósitos.

Si fijamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \longmapsto N_\varepsilon(A)$ es obviamente una aplicación no creciente. La 'rapidez' a la que crece $N_\varepsilon(A)$ cuando ε converge a cero proporciona información clave sobre la geometría de A. Esta 'rapidez' se describe mediante la dimensión de la caja.

3. Dimensiones de caja

La noción de dimensión de caja fue usada por primera vez por Benoit Mandelbrot en *How long is the coast of Britain? statistical self-similarity and fractional dimension*, donde explicaba por qué la longitud de la costa de Bretaña era infinita. Dedujo que la dimensión de caja es una forma eficaz e importante de cuantificar el tamaño de objetos irregulares, como una costa marina, la distribución de las estrellas en el universo o el crecimiento de las plantas, entre otros muchos fenómenos naturales. El libro *The fractal geometry of nature*, donde popularizó las nociones de fractales, labró la reputación de Mandelbrot.

Continuamos esta sección definiendo las *dimensiones superior e inferior de caja.*

Definición 3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado, no vacío. Las dimensiones superior e inferior de caja de A están definidas como sigue*

$$\underline{\dim}_B(A) = \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}, \quad \overline{\dim}_B(A) = \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}.$$

Cuando estas dos cantidades coinciden, su valor común, denotado por $\dim_B(A)$, se denomina dimensión de caja de A.

El siguiente lema simplifica el cálculo de la dimensión de caja en muchos casos.

Lema 3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado, no vacío, $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión estrictamente decreciente de números reales positivos que converge a cero, y supongamos que existe una constante $C > 1$ tal que $1 < \varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} \leq C$ para todo $n \geq 1$. Entonces, las dimensiones superior e inferior de caja de A pueden ser calculadas como sigue*

$$\underline{\dim}_B(A) = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log N_{\varepsilon_n}(A)}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{\dim}_B(A) = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log N_{\varepsilon_n}(A)}{-\log \varepsilon_n}.$$

En otras palabras, para calcular la dimensión de caja de A basta con estimar $N_\varepsilon(A)$ en una sucesión $(\varepsilon_n)_n$ que tiende a cero 'regularmente', es decir, donde no hay una gran distancia entre cualesquiera dos términos consecutivos.

Veamos algunos primeros ejemplos.

Ejemplo 1. La dimensión de caja de cualquier singleton es cero. Se sigue del hecho de que $N_\varepsilon(\{x\}) = 1$ para todo $\varepsilon > 0$, y todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Ejemplo 2. La dimensión de caja de cualquier intervalo acotado (no degenerado) I es 1. En efecto, notamos que para todo $\varepsilon < |I|$

$$\frac{|I|}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon(I) \leq \left\lfloor \frac{|I|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \leq 2 \cdot \frac{|I|}{\varepsilon},$$

por tanto

$$\dim_B(A) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(I)}{-\log \varepsilon} = 1$$

Ejemplo 3. La dimensión de caja de cualquier conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es d. En efecto, Ω está contenido en algún cubo de lado $R > 0$. Además, de la relación (1) vemos que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente

pequeño

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\Omega) \leq C_2(d)\widetilde{N}_\varepsilon(A) \leq & C_2(d)\left(\left\lfloor \frac{R}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right)^d \\ \leq & 2^d C_2(d)(R/\varepsilon)^d. \end{aligned}$$

Por otro lado, como Ω es abierto, existe un cubo de lado $r > 0$ contenido en él. Usando el mismo razonamiento que antes, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$N_\varepsilon(\Omega) \geq C_1(d)(r/\varepsilon)^d.$$

Esto demuestra que $\dim_B(\Omega) = d$.

Ejemplo 4. La dimensión de caja del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es $\log 2/\log 3$. En efecto, la sucesión definida por $\varepsilon_n = 3^{-n}$ satisface las condiciones del Lema 3.1. La generación n-ésima del conjunto de Cantor proporciona un ε_n-recubrimiento exacto de $\mathcal{C}$. Además, se debe notar que no puede existir un tal ε_n-recubrimiento exacto de $\mathcal{C}$ con menos de 2^n intervalos, ya que los intervalos de esta generación están separados por al menos 3^{-n}. Así, $N_{\varepsilon_n}(\mathcal{C}) = 2^n$ y, por tanto

$$\dim_B(\mathcal{C}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\log N_{\varepsilon_n}(\mathcal{C})}{-\log \varepsilon_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\log 2^n}{-\log 3^{-n}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Notar que hemos calculado directamente el límite de $\log N_{\varepsilon_n}(\mathcal{C})/-\log \varepsilon_n$, ya que el cálculo muestra que este límite existe. En general, sólo liminf y limsup están bien definidos, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. Consideremos una sucesión de naturales $(k_n)_{n\geq 1}$ que converge rápidamente al infinito (por ejemplo, se puede tomar $k_n = 2^{k_{n-1}}$ para cada $n \geq 2$ y $k_1 = 2^{10}$). Empezamos con el intervalo $[0, 1]$. Vamos a construir las generaciones de un conjunto tipo Cantor con una ligera modificación a la construcción habitual. Las primeras $k \in [1, k_1]$ generaciones se obtienen dividiendo en tres partes iguales los intervalos de la generación anterior y tomando los intervalos extremos. Luego, para las $k \in (k_1, k_2]$ siguientes generaciones, dividimos en cinco partes iguales los intervalos de la generación anterior y tomamos los intervalos intermedios. Repetimos este proceso de forma que, para cada $n \geq 1$, si $k \in (k_{2n}, k_{2n+1}]$, entonces la generación k fue obtenida al dividir en 3 partes iguales los intervalos de la generación anterior, y se tomaron los intervalos extremos. Por el contrario, si $k \in (k_{2n-1}, k_{2n}]$, entonces la generación k fue obtenida al dividir en 5 partes iguales los intervalos de la generación anterior y se tomaron los intervalos intermedios. Finalmente, se toma la intersección de la unión de los intervalos que conforman cada generación y se obtiene un conjunto tipo Cantor denotado por $\mathcal{K}$.

Calculemos ahora la dimensión superior e inferior de caja. Notemos primero que si $k \in (1, k_1]$, necesitamos exactamente 2^k bolas de diámetro $a_k = 3^{-k}$. Así, tenemos que

$$\delta_k = \frac{\log N_{a_k}(\mathcal{K})}{-\log a_k} = \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Ahora, si $k \in (k_1, k_2]$ necesitamos exactamente 2^k bolas de diámetro $a_k = 3^{-k_1} \cdot 5^{-(k-k_1)}$. Entonces

$$\delta_k = \frac{k \log 2}{k_1 \log 3 + (k - k_1)\log 5} = \frac{\log 2}{\frac{k_1}{k}(\log 3 - \log 5) + \log 5}.$$

Luego, si $k \in (k_2, k_3]$, necesitamos exactamente 2^k bolas de diámetro $a_k = 3^{-k_1} \cdot 5^{-(k_2-k_1)} \cdot 3^{-(k-k_2)}$. Así, tenemos

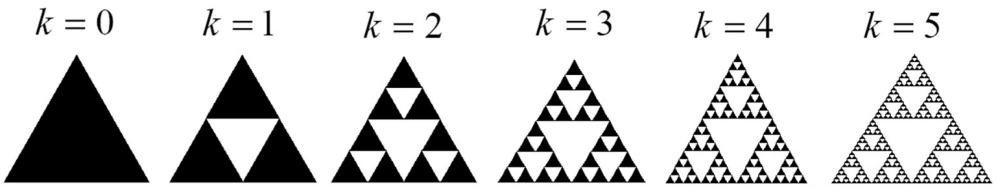

Figura 3: Construcción iterativa del triangulo de Sierpinski

que

$$\delta_k = \frac{\log 2}{\frac{k_1}{k}(\log 3 - \log 5) + \frac{k_2}{k}(\log 5 - \log 3) + \log 3}.$$

Una vez más, si $k \in (k_3, k_4]$, necesitamos exactamente 2^k bolas de diámetro $a_k = 3^{-k_1} \cdot 5^{-(k_2-k_1)} \cdot 3^{-(k_3-k_2)} \cdot 5^{-(k-k_3)}$. Así, tenemos que

$$\delta_k = \frac{\log 2}{\frac{k_1}{k}(\log 3 - \log 5) + \frac{k_2}{k}(\log 5 - \log 3) + \frac{k_3}{k}(\log 3 - \log 5) + \log 5}.$$

De manera general, vemos que para $n \geq 1$

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\log 2}{\frac{1}{k}(k_1(\log 3 - \log 5) + k_2(\log 5 - \log 3) + \cdots + k_{2n-1}(\log 3 - \log 5) + k_{2n}(\log 5 - \log 3)) + \log 3} & k \in (k_{2n}, k_{2n+1}], \\ \frac{\log 2}{\frac{1}{k}(k_1(\log 3 - \log 5) + k_2(\log 5 - \log 3) + \cdots + k_{2n-2}(\log 5 - \log 3) + k_{2n-1}(\log 3 - \log 5)) + \log 5} & k \in (k_{2n-1}, k_{2n}]. \end{cases}$$

Si consideramos las subsucesiones $(u_n)_{n\geq 1}$ y $(v_n)_{n\geq 1}$ definidas por $u_n = \delta_{k_{2n+1}}$ y $v_n = \delta_{k_{2n}}$, respectivamente, de la rápida convergencia de la sucesión $(k_n)_n$, vemos que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \frac{\log 2}{\log 3} \quad \text{y} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \frac{\log 2}{\log 5}.$$

Más aún, tenemos que

$$\underline{\dim}_B(\mathcal{K}) < \overline{\dim}_B(\mathcal{K}).$$

3.1. Propiedades de la dimensión de caja

Proposición 3.1 *Sean $E, F \subset \mathbb{R}^d$. Se puede demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Monotonía. Si $E \subset F$, entonces $\underline{\dim}_B(E) \leq \underline{\dim}_B(F)$, y también $\overline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(F)$.*
- *Estabilidad finita. La dimensión superior de caja es estable por uniones finitas, es decir, $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \text{máx}\{\overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F)\}$. Sin embargo, esta propiedad no se cumple en general para la dimensión inferior de caja.*

3.2. Limitaciones de la dimensión de caja

La noción de dimensión de caja puede extenderse fácilmente a cualquier espacio métrico completo. Sin embargo, aunque es fácilmente comprensible y bastante accesible desde un punto de vista numérico, tiene algunos inconvenientes:

- La dimensión de caja de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ no acotado es $+\infty$. Sin duda, este problema podría resolverse utilizando la formulación alternativa

$$\underline{\dim}_B^*(A) = \lim_{M \longrightarrow +\infty} \underline{\dim}_B(A \cap [-M, M]^d),$$

  pero esto no es totalmente satisfactorio.

- Si A y B son conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que A es denso en B, entonces $\dim_B(A) = \dim_B(B)$ (esto también es válido para las dimensiones de caja inferior y superior). En particular, $\dim_B(A) = \dim_B(\overline{A})$, es decir, la dimensión de caja no distingue un conjunto de su clausura. Así, tenemos por ejemplo que $\dim_B(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$. Por otro lado, sabemos que $\dim_B(\{p/q\}) = 0$ para todo racional p/q. Entonces, concluimos que $\dim_B(\mathbb{Q} \cap [0,1]) > \sup_{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \dim_B(\{p/q\})$.

  Sin embargo, no es esperable para una noción de dimensión que una unión contable de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$ tenga dimensión estrictamente mayor que el supremo de la dimensión de cada término. Desgraciadamente, éste es el caso de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, y en general $\dim_B \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)$ puede ser mayor que $\sup_{n \geq 1} \dim_B(A_n)$. Estos argumentos justifican, entre otras razones, la introducción de la dimensión de Hausdorff en la Lección 2, que evitará que se produzca esta situación.

3.3. Ejercicios

Ejercicio 1. Sea $\alpha > 0$. Calcular la dimensión del conjunto $E_\alpha = \{0\} \cup \{n^{-\alpha}\}_{n \geq 1}$.

Ejercicio 2. Consideremos la siguiente construcción geométrica iterativa: empezamos con un triángulo equilátero que se divide en cuatro triángulos equiláteros isométricos. Quitamos el central y nos quedamos con los otros tres. A continuación, realizamos la misma operación en cada uno de los tres triángulos restantes. Iterando la construcción se obtiene una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos, que convergen a un conjunto denominado *triángulo de Sierpinski* $\mathcal{T}$ (véase la figura 3). Calcule la dimensión de caja de $\mathcal{T}$.

Ejercicio 3. Sea $\widetilde{\mathcal{C}}$ el conjunto de números reales en $[0,1]$ que sólo tienen 1, 3 y 7 en su expansión decimal. Calcular la dimensión de caja de $\widetilde{\mathcal{C}}$.