Lección n°2: Medida y Dimensión de Hausdorff

Paris, 2025

1. Definiciones y resultados previos

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida exterior si verifica las siguientes propiedades:*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- *Para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$, si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
- *Para toda sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{P}(X)$ se tiene que*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n). \qquad (\sigma - \textit{subaditividad})$$

Definición 1.2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que dos conjuntos A y B son positivamente separados si verifican*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Una medida exterior μ^* definida sobre $\mathcal{P}(X)$ es una medida exterior métrica si, para todo A, B, dos conjuntos positivamente separados, se tiene la identidad

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Definición 1.3 *Sea X un conjunto. Una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es un anillo si verifica las siguientes propiedades:*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$,*
- *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.4 *Sea $\mathcal{A}$ un anillo. Una aplicación $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ es una pre-medida en $\mathcal{A}$ si satisface las siguientes condiciones:*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- *Para toda sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n). \qquad (\sigma - \textit{aditividad})$$

Teorema 1.1 *Toda medida exterior métrica μ^* es una medida de Borel.*

Teorema 1.2 (Teorema de extensión de Caratheodory) *Sea $\mathcal{A}$ un anillo de borelianos de $\mathbb{R}^d$, y sea $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ una pre-medida en $\mathcal{A}$. Entonces μ se puede extender a una medida sobre la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}$, denotada por $\sigma(\mathcal{A})$. Más aún, esta extensión es única, por lo que se continúa denotando como μ.*

Además, también se puede extender a una medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, denotada nuevamente por μ, de modo que para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que no interseca ningún elemento de $\sigma(\mathcal{A})$, $\mu(B) = 0$.

2. Medida de Hausdorff

Como se ha explicado en las lecciones anteriores, todos los conjuntos que son densos en $[0, 1]^d$ tienen una dimensión de caja igual a d. Por lo tanto, se necesita una noción más *fina* para distinguir entre todos estos conjuntos. Esta no es la única motivación para introducir las medidas de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff, como una noción alternativa y más *fina* de dimensión. Las medidas de Hausdorff generalizan a índices fraccionarios las medidas de Lebesgue y proporcionan una gran familia de medidas de Borel, que son herramientas finas y clave para describir las propiedades geométricas de los conjuntos.

Definición 2.1 *Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ y $s, \eta > 0$. Definimos la cantidad*

$$\mathcal{H}^s_\eta(A) = \inf_{R \in \mathcal{R}_\eta(A)} \sum_{B \in R} |B|^s.$$

Observación 2.1 *La Definición 2.1 motiva algunos comentarios al respecto:*

- *El hecho de que se utilicen η recubrimientos de A (es decir, recubrimientos de A por conjuntos de diámetro menor o igual que η) en lugar de η recubrimientos exactos (es decir, recubrimientos de A por conjuntos de diámetro igual a η) lo cambia todo.*
- *En general, tenemos que $\mathcal{H}^s_\eta(A) \in [0, +\infty]$, y como veremos es muy 'probable' que $\mathcal{H}^s_\eta(A) = 0$ o $\mathcal{H}^s_\eta(A) = +\infty$.*
- *Esta cantidad es, a priori, realmente delicada de estimar ya que el conjunto $\mathcal{R}_\eta(A)$ es extremadamente grande, y puede incluir todos los conjuntos de diámetro inferior a η. En particular, no siempre se alcanza el mínimo en $\mathcal{H}^s_\eta(A)$.*
- *Los recubrimientos por bolas euclidianas suelen ser los más eficaces. En algunas situaciones, sin embargo, será más fácil trabajar con cubos en lugar de bolas. Nuevamente, esta elección no es un problema puesto que cada $B \in \mathcal{R}$ contribuye a la suma implicada en la definición de $\mathcal{H}^s_\eta(A)$ sólo a través del valor de su diámetro.*

Lema 2.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. Para cada $s > 0$, la aplicación $\eta \in (0, +\infty) \longmapsto \mathcal{H}^s_\eta(A)$ es decreciente.*

Demostración. Esto se sigue del hecho que $(\mathcal{R}_\eta(A))_{\eta>0}$ es una familia creciente. ■

Definición 2.2 *Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ y $s > 0$. La medida exterior s - dimensional de Hausdorff de A está definida por*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\eta \longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\eta(A).$$

Observemos que el límite anterior siempre existe en $\overline{\mathbb{R}}_+$ (pero puede ser infinito) pues, del Lema 2.1, $\mathcal{H}^s_\eta(A)$ crece si η converge a cero (ver Figura 1).

Veamos que en efecto, $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ para todo $s > 0$. Primero, se puede ver fácilmente que $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ (basta tomar un singleton como recubrimiento). Luego, sea $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$. Puesto

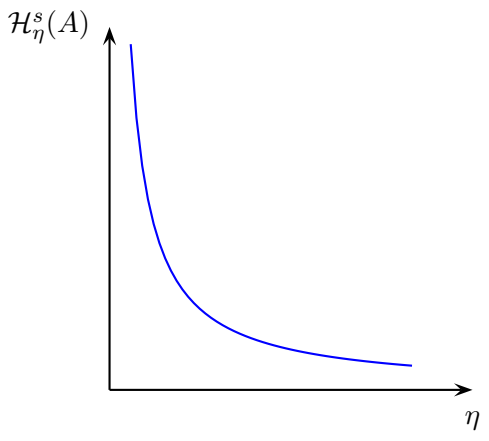

Figura 1: Comportamiento de la aplicación $\eta \longmapsto \mathcal{H}^s_\eta(A)$.

que $\mathcal{R}_\eta(B) \subset \mathcal{R}_\eta(A)$ para cada $\eta > 0$, $\mathcal{H}^s_\eta(A) \leq \mathcal{H}^s_\eta(B)$. Tomando el límite cuando $\eta \longrightarrow 0$, se sigue que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$.

Probemos finalmente la σ-subaditividad.

Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos de $\mathbb{R}^d$ y fijemos $\eta > 0$. De la definición de ínfimo, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $n \geq 1$, existe $R(n,\varepsilon) = (R_{n,p})_{p\geq 1} \in \mathcal{R}_\eta(A_n)$ tal que

$$\mathcal{H}^s_\eta(A_n) \leq \sum_{p\geq 1} |R_{n,p}|^s \leq \mathcal{H}^s_\eta(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1}$$

Por otro lado, para cada $n \geq 1$,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{n,p\geq 1} R_{n,p},$$

es decir, $R := (R_{n,p})_{n,p\geq 1} \in \mathcal{R}_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$, por lo tanto,

$$\mathcal{H}^s_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n,p\geq 1} |R_{n,p}|^s. \tag{2}$$

Por otro lado, combinando (1) y (2),

$$\mathcal{H}^s_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1}\left(\mathcal{H}^s_\eta(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n\geq 1} \mathcal{H}^s_\eta(A_n) + \varepsilon.$$

Puesto que esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{H}^s_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mathcal{H}^s_\eta(A_n).$$

Tomando el límite $\eta \longrightarrow 0$, se sigue el resultado.

Teorema 2.1 *Para cada $s > 0$, $\mathcal{H}^s$ es una medida de Borel.*

Demostración. Sea $s > 0$. Gracias al Teorema 1.1 basta demostrar que $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior métrica. Sean

$A, B \subset \mathbb{R}^d$ tal que $dist(A, B) = \varepsilon > 0$. Así, si $\eta < \varepsilon/3$, cualquier η recubrimiento de $A \cup B$ es exactamente la unión de un η recubrimiento de A y otro de B. Por lo tanto, para cada $R \in \mathcal{R}_\eta(A \cup B)$,

$$\sum_{C \in R} |C|^s = \sum_{C \cap A \neq \emptyset} |C|^s + \sum_{C \cap B \neq \emptyset} |C|^s.$$

Recíprocamente, si $R_A \in \mathcal{R}_\eta(A)$ y $R_B \in \mathcal{R}_\eta(B)$, entonces $R_A \cup R_B \in \mathcal{R}_\eta(A \cup B)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\eta(A \cup B) &= \text{ínf} \left\{ \sum_{C \in R} |C|^s : R \in \mathcal{R}_\eta(A \cup B) \right\} \\ &= \text{ínf} \left\{ \sum_{C \in R_A} |C|^s : R_A \in \mathcal{R}_\eta(A) \right\} + \text{ínf} \left\{ \sum_{C \in R_B} |C|^s : R_B \in \mathcal{R}_\eta(B) \right\} = \mathcal{H}^s_\eta(A) + \mathcal{H}^s_\eta(B),\end{aligned}$$

haciendo $\eta \longrightarrow 0$, se sigue el resultado. ■

Definición 2.3 *La restricción de $\mathcal{H}^s$ a los borelianos de $\mathbb{R}^d$ se denomina medida de Hausdorff s-dimensional.*

Calcular el valor exacto de $\mathcal{H}^s(A)$ puede resultar muy complicado. Como primer ejemplo, expliquemos cómo calcular directamente $\mathcal{H}^1([0, 1])$.

Ejemplo 1. $\mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$**.** Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ un η recubrimiento de $[0, 1]$, por lo tanto $[0, 1] \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Así, se tiene que

$$1 = |[0, 1]| \leq \sum_{n \geq 1} |A_n|.$$

Puesto que esto es cierto para cualquier η recubrimiento, entonces $\mathcal{H}^1_\eta([0, 1]) \geq 1$, y más aún, $\mathcal{H}^1([0, 1]) \geq 1$.

Para la cota superior, consideramos el siguiente recubrimiento

$$R_j = \left\{ \left[\frac{k}{j}, \frac{k+1}{j} \right] : k \in \{0, \ldots, j-1\} \right\}.$$

Tenemos que

$$\mathcal{H}^1_{1/j}([0, 1]) \leq \sum_{k=0}^{j-1} \left| \left[\frac{k}{j}, \frac{k+1}{j} \right] \right| = 1.$$

Haciendo $j \longrightarrow +\infty$, tenemos que $\mathcal{H}^1([0, 1]) \leq 1$.

Observación 2.2 *De este ejemplo se pueden extraer dos principios generales:*

- *Para obtener una cota superior para $\mathcal{H}^s(A)$, basta con elegir recubrimientos adecuados de A.*
- *Para obtener una cota inferior para $\mathcal{H}^s(A)$, es necesario tener en cuenta todos los posibles recubrimientos de A, lo que puede resultar muy complicado.*

Afortunadamente, existen métodos alternativos para encontrar cotas inferiores para $\mathcal{H}^s(A)$, que se desarrollarán más adelante.

La siguiente proposición justifica la afirmación expuesta en la introducción, de que las medidas de Hausdorff generalizan la medida de Lebesgue a índices no enteros.

Proposición 2.1 *Para cada $n \in \{1, \ldots, d\}$, $\mathcal{H}^n = 2^{-n} C_n \mathcal{L}_n$, donde C_n es el volumen de la esfera unitaria n dimensional, i.e. $C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$.*

Demostración. El ejemplo 1 muestra que es cierto para $n = 1$. El caso $2 \leq n \leq d$ queda como ejercicio. ■

Lema 2.2 *Para cada conjunto contable $A = \{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$, y cada $s > 0$ se tiene que $\mathcal{H}^s(A) = 0$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{H}^s$ es una medida boreliana, basta probar que $\mathcal{H}^s(\{a_n\}) = 0$ para todo $n \geq 1$. Puesto que la bola euclidiana $B(a_n, \eta)$ es un η recubrimiento de $\{a_n\}$ se sigue que

$$\mathcal{H}^s_\eta(\{a_n\}) \leq (2\eta)^s,$$

haciendo $\eta \longrightarrow 0$, se tiene que $\mathcal{H}^s(\{a_n\}) \leq 0$, y se sigue el resultado. ■

Lema 2.3 *Para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) = 0$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \geq 1} [-n, n]^d$ y $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}$ es una medida, es suficiente demostrar que $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}([-n, n]^d) = 0$, para cada $n \geq 1$.

Fijamos $n \geq 1$, y elegimos el siguiente recubrimiento

$$R^n_j = \left\{ \prod_{i=1}^d \left[-n + \frac{2n}{j} k_i, -n + \frac{2n}{j}(k_i + 1) \right] : (k_1, \ldots, k_d) \in \{0, \ldots, j-1\}^d \right\}.$$

Es claro que R^n_j es un $\sqrt{d}/j$ recubrimiento de $[-n, n]^d$. Así, tenemos que

$$\mathcal{H}^{d+\varepsilon}_{\sqrt{d}/j}([-n, n]^d) \leq \sum_{(k_1, \ldots, k_d) \in \{0, \ldots, j-1\}^d} \left(\frac{\sqrt{d}}{j} \right)^{d+\varepsilon} \leq C \frac{1}{j^\varepsilon},$$

por lo que, tomando $j \longrightarrow +\infty$, se sigue el resultado. ■

2.1. Propiedades

A continuación se presentan algunas propiedades generales de la medida de Hausdorff s-dimensional.

Proposición 2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. La medida de Hausdorff s-dimensional verifica lo siguiente:*

1. *$\mathcal{H}^s(A + x) = \mathcal{H}^s(A)$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = |\lambda|^s \mathcal{H}^s(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Ejercicio. ■

Lema 2.4 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. El mapa $s \longmapsto \mathcal{H}^s(A)$ es decreciente.*

Demostración. Sea $0 < s \leq t$. Para cada $R \in \mathcal{R}_\eta(A)$, donde $\eta < 1$, se tiene que

$$\mathcal{H}^t_\eta(A) \leq \sum_{B \in R} |B|^t \leq \sum_{B \in R} |B|^s.$$

Por lo tanto, se obtiene $\mathcal{H}^t_\eta(A) \leq \mathcal{H}^s_\eta(A)$. Tomando límite $\eta \longrightarrow 0$ se sigue el resultado. ■

El mapa $s \longmapsto \mathcal{H}^s(A)$ no solo es decreciente, sino que además tiene un comportamiento muy errático, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ y $0 < s < t < +\infty$. Tenemos las siguientes implicaciones*

- *Si $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, entonces $\mathcal{H}^t(A) = 0$.*
- *Si $\mathcal{H}^t(A) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.*

Demostración. Empezamos asumiendo que $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$. Gracias a la monotonía del mapa $\eta \longmapsto \mathcal{H}^t_\eta(A)$ (Lema 2.1), tenemos que $\mathcal{H}^s_\eta(A) \leq \mathcal{H}^s(A)$ para todo $\eta > 0$. Luego, vemos que para cada $R \in \mathcal{R}_\eta(A)$

$$\mathcal{H}^t_\eta(A) \leq \sum_{B \in R} |B|^t = \sum_{B \in R} |B|^{t-s}|B|^s \leq \eta^{t-s} \sum_{B \in R} |B|^s.$$

Por tanto, para cada $\eta > 0$

$$\mathcal{H}^t_\eta(A) \leq \eta^{t-s}\mathcal{H}^s_\eta(A) \leq \eta^{t-s}\mathcal{H}^s(A),$$

como $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, haciendo $\eta \longrightarrow 0$ se sigue el resultado.

Por otro lado, supongamos que $\mathcal{H}^t(A) > 0$. De la monotonía del mapa $\eta \longmapsto \mathcal{H}^t_\eta(A)$ (Lema 2.1), existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \leq \eta_0$

$$\mathcal{H}^t_\eta(A) \geq \mathcal{H}^t(A)/2 = C > 0.$$

Por tanto, para cada $R \in \mathcal{R}_\eta(A)$, con $\eta \leq \eta_0$

$$\sum_{B \in R} |B|^s = \sum_{B \in R} |B|^{s-t}|B|^t \geq \eta^{s-t} \sum_{B \in R} |B|^t \geq \eta^{s-t}C,$$

de donde, $\mathcal{H}^s_\eta(A) \geq \eta^{s-t}C$, para cada $\eta \leq \eta_0$. Tomando límite $\eta \longrightarrow 0$, se sigue el resultado. ■

La proposición 2.3 evidencia el 'cambio violento' en el valor de la medida de Hausdorff de cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ (ver Figura 2). Esto motiva la introducción de la dimensión de Hausdorff.

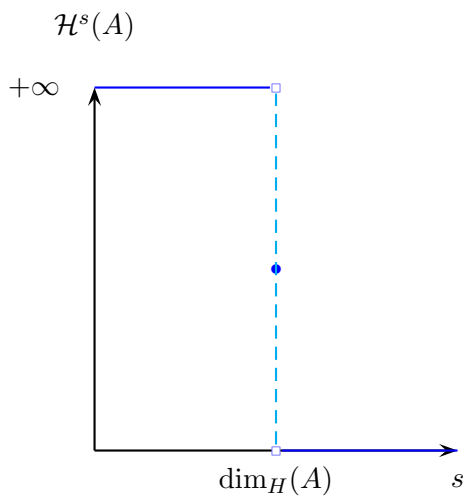

Figura 2: Comportamiento de la aplicación $s \longmapsto \mathcal{H}^s(A)$.

3. Dimensión de Hausdorff

Definición 3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. La dimensión de Hausdorff de A está definida como sigue*

$$\dim_H(A) = \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Observación 3.1 *Hagamos algunas observaciones sobre la dimensión de Hausdorff usando los resultados previos.*

- *Gracias al Lema 2.3, tenemos que $\dim_H(A) \leq d$, para todo $A \subset \mathbb{R}^d$.*
- *Por la Proposición 2.3, la dimensión de Hausdorff de A se define equivalentemente como*

$$\dim_H(A) = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\}.$$

- *En general, $\mathcal{H}^{\dim_H(A)}(A)$ puede ser finito (quizá cero) o infinito.*

Presentemos ahora algunas buenas propiedades de la dimensión de Hausdorff.

Proposición 3.1 *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *(Monotonía) Si $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$, entonces $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.*
2. *(Estabilidad contable) Para cada sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos de $\mathbb{R}^d$, se tiene que*

$$\dim_H\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sup_{n\geq 1} \dim_H(A_n).$$

Demostración. Probemos el primer punto. Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$, $s > \dim_H(B)$ y $\varepsilon > 0$. Por definición, $\mathcal{H}^s(B) = 0$, y por la monotonía del mapa $\eta \longmapsto \mathcal{H}^s_\eta$, se sigue que $\mathcal{H}^s_\eta(B) = 0$ para cada $\eta > 0$. Así, existe un recubrimiento $R \in \mathcal{R}_\eta(B)$ tal que

$$\sum_{C\in R} |C|^s \leq \varepsilon.$$

Puesto que $\mathcal{R}_\eta(B) \subset \mathcal{R}_\eta(A)$, R es un η recubrimiento de A, y por tanto

$$\mathcal{H}^s_\eta(A) \leq \sum_{C\in R} |C|^s \leq \varepsilon.$$

La desigualdad anterior se cumple para todo $\eta > 0$ y todo $\varepsilon > 0$. Así, $\mathcal{H}^s(A) = 0$, y por lo tanto, $\dim_H(A) \leq s$. Como $s > \dim_H(B)$ es cualquiera, se sigue que

$$\dim_H(A) \leq \dim_H(B).$$

Probemos ahora el segundo punto de la proposición. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos, y sea $\varepsilon > 0$. El primer punto nos da que $\dim_H(A_n) \leq \dim_H\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$ para cada $n \geq 1$, entonces

$$\sup_{n\geq 1} \dim_H(A_n) \leq \dim_H\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right).$$

Por otro lado, sea $s > \sup_{n\geq 1} \dim_H(A_n)$. Usando el mismo razonamiento que antes, basta probar que

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = 0.$$

Dado que $s > \dim_H(A_n)$, por la Proposición 2.3 se tiene que $\mathcal{H}^s(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, y más aún, $\mathcal{H}^s_\eta(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$ y todo $\eta > 0$.

Fijando $\eta > 0$, para cada $n \geq 1$, se puede encontrar un recubrimiento $R_n \in \mathcal{R}_\eta(A_n)$ tal que $\sum_{B\in R_n} |B|^s \leq 2^{-n}\varepsilon$. Por construcción, $R = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{B\in R_n} B$ es un η recubrimiento de $\bigcup_{n\geq 1} A_n$, es decir, $R \in \mathcal{R}_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$. Entonces se tiene

$$\mathcal{H}^s_\eta\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{B\in R_n} |B|^s \leq \varepsilon \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ son cualesquiera, se sigue el resultado. ■

La propiedad de estabilidad contable es especialmente esperable en una noción de dimensión.

Lema 3.1 *La dimensión de Hausdorff de todo conjunto contable es cero.*

Demostración. En efecto, del Lema 2.2 se obtiene que la dimensión de Hausdorff de todo singleton es cero. Luego, basta considerar la propiedad de estabilidad contable de la dimensión de Hausdorff para concluir. ■

Enunciemos ahora un resultado que relaciona la dimensión de Hausdorff y la dimensión de caja.

Proposición 3.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado. Entonces,*

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_B(A).$$

Demostración. Sea $s > \underline{\dim}_B(A)$. Por la definición de $\liminf$, para cada $n \geq 1$, existe $0 < \varepsilon_n < 1/n$ tal que

$$\frac{\log N_{\varepsilon_n}(A)}{-\log \varepsilon_n} \leq s,$$

de donde, $N_{\varepsilon_n}(A) \leq \varepsilon^{-s}$. Esto quiere decir que, para cada $n \geq 1$, existe un ε_n-recubrimiento exacto $R_n = (C_i)_i \in \widetilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon_n}(A)$ que verifica que $\#R_n \leq \varepsilon_n^{-s}$. Por tanto, para cada $n \geq 1$,

$$\mathcal{H}^s_{\varepsilon_n}(A) \leq \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon_n}(A)} |C_i|^s = \varepsilon_n^s \cdot N_{\varepsilon_n}(A) \leq 1.$$

Haciendo $n \longrightarrow +\infty$, se sigue que $\mathcal{H}^s(A) \leq 1 < +\infty$, y se sigue el resultado. ■

Lema 3.2 *La dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es* $\log 2/\log 3$.

Antes de pasar a la demostración del lema anterior, necesitaremos algunas 'técnicas' clásicas en el análisis multifractal para abordar el problema con mayor facilidad.

3.1. Construcción de medidas en conjuntos de Cantor

Empecemos este apartado con una definición fundamental.

Definición 3.2 *Sea μ una medida en $\mathbb{R}^d$. El soporte de μ, denotado por $supp(\mu)$, es el cerrado más pequeño F tal que $\mu\left(F^C\right) = 0$.*

Además, decimos que μ es una distribución de masa en A si $supp(\mu) \subset A$ y $0 < \mu(A) < +\infty$.

Observación 3.2 *El soporte de una medida se define equivalentemente como*

$$supp(\mu) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \mu(B(x,r)) > 0, \text{ para todo } r > 0\}}.$$

Por otro lado, volvamos al problema de encontrar cotas inferiores para la medida de Hausdorff s-dimensional de $A \subset \mathbb{R}^d$. Primero, es evidente que existe una enorme cantidad de recubrimientos a considerar. Además, dado un ε-recubrimiento de A, denotado por $R = (R_i)_i$, notemos que algunos R_i pueden ser muy pequeños, mientras que otros tienen diámetros relativamente grandes, lo que impide realizar estimaciones generales para $\sum_i |R_i|^s$.

Una forma de superar estas dificultades es demostrar que ningún R_i puede cubrir demasiado de A en comparación con su tamaño, el cual viene medido por $|R_i|^s$. Entonces, si R cubre todo A, la suma $\sum_i |R_i|^s$ no puede ser demasiado pequeña.

Una forma estándar de hacerlo es 'concentrar' una distribución de masa μ en A y comparar $\mu(R_i)$ con $|R_i|^s$ para cada conjunto R_i. Esto nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 3.1 (Principio de distribución de masa) *Sea μ una distribución de masa en $A \subset \mathbb{R}^d$ y supongamos que existen constantes $s > 0$ y $C > 0$ tal que*

$$\mu(B) \leq C|B|^s, \quad \text{para todo } B \subset \mathbb{R}^d.$$

Entonces $\mathcal{H}^s(A) \geq \mu(A)/C$, y en particular, $\dim_H(A) \geq s$.

Demostración. Sea $R \in \mathcal{R}_\eta(A)$. Entonces,

$$\mu\left(A\right) \leq \mu\left(\bigcup_{B \in R} B\right) \leq \sum_{B \in R} \mu\left(B\right) \leq C \sum_{B \in R} |B|^s.$$

Puesto que esto es válido para cualquier $R \in \mathcal{R}_\eta(A)$ y cada $\eta > 0$, obtenemos que $\mathcal{H}^s(A) \geq \mu(A)/C > 0$. De la Observación 3.1, se sigue que $\dim_H(A) \geq s$. ■

Ejemplo 2. Consideremos la medida de Lebesgue $\mathcal{L}$ en $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Claramente es una distribución de masa (de probabilidad), y además se tiene que

$$\mathcal{L}(B) \leq 1 \cdot |B|^1, \quad \text{para cada } B \subset \mathbb{R}.$$

El Teorema 3.1 nos da que $\mathcal{H}^1([0,1]) \geq 1$ y, por tanto, $\dim_H([0,1]) \geq 1$. De la Observación 3.1, concluimos que $\dim_H([0,1]) = 1$.

Un principio general que se deduce del Teorema 3.1 es que la dimensión de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ está relacionada con la regularidad de las medidas de probabilidad soportadas por A. Para respaldar la última afirmación, presentamos una especie de teorema recíproco al Teorema 3.1, sin demostración.

Lema 3.3 (Lema de Frostman) *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un boreliano, y sea $s > 0$. Las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{H}^s(A) > 0$.

2. *Existe una medida boreliana positiva μ, que satisface $\mu(A) = 1$, de modo que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y todo $r > 0$,*

$$\mu(B(x,r)) \leq r^s.$$

Presentamos una versión mejorada del Teorema (3.1).

Proposición 3.3 *Sea μ una distribución de masa en $A \subset \mathbb{R}^d$ y supongamos que existen constantes $s > 0$ y $C > 0$ tal que*

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^s, \quad \textit{para } \mu - \textit{casi todo } x \in \mathbb{R}^d, \textit{ y } r > 0 \textit{ suficientemente pequeño.}$$

Entonces, $\mathcal{H}^s(A) \geq \mu(A)/C$, y en particular, $\dim_H(A) \geq s$.

El Teorema 1.2 nos ayudará a construir medidas en *conjuntos de Cantor generalizados*, los cuales vienen definidos de la siguiente manera:

Definición 3.3 *Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una familia de borelianos de $\mathbb{R}^d$ tal que:*

- *E_1 es un cubo cerrado y acotado.*
- *$E_{n+1} \subset E_n$, para cada $n \geq 1$.*
- *Para cada $n \geq 1$, $E_n = \{I_{n,k}\}_{k=1,\ldots,m_n}$, es una colección de $m_n \geq 1$ cubos cerrados y disjuntos dos a dos.*
- $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \max_{k=1,\ldots,m_n} |I_{n,k}| = 0$.

El conjunto $K = \bigcap_{n\geq 1} E_n$ es un compacto no vacío llamado conjunto de Cantor generalizado, y cada E_n es su n-ésima generación.

Observación 3.3 *Es evidente que el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ (construido en la Lección 1) pertenece a la clase de conjuntos de Cantor generalizados.*

La siguiente proposición se deduce directamente del Teorema de extensión de Carathéodory y se utilizará de manera frecuente.

Proposición 3.4 *Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos que satisfacen las condiciones de la Definición 3.3, y llamemos K al conjunto de Cantor asociado. Supongamos que una función de conjuntos está definida en cada cubo $I_{n,k}$, para cada $k \in \{1,\ldots,m_n\}$ y cada $n \geq 1$, y satisface las siguientes propiedades:*

- *$\mu(E_1) = 1$.*
- *$\mu(I_{n,k}) \geq 0$, para cada $k \in \{1,\ldots,m_n\}$ y cada $n \geq 1$.*
- *Para cada $k \in \{1,\ldots,m_n\}$ y cada $n \geq 1$,*

$$\mu(I_{n,k}) = \sum_{I_{n+1,k'} \subset I_{n,k}} \mu(I_{n+1,k'}).$$

Entonces, μ puede ser extendida a una medida de Borel de probabilidad en $\mathbb{R}^d$. Además, si $\mu(I_{n,k}) > 0$ para cada $k \in \{1,\ldots,m_n\}$ y cada $n \geq 1$, el soporte de μ es igual a K.

Ahora estamos listos para demostrar el Lema 3.2.

Demostración. Del ejemplo 4 de la Lección 1 y la Proposición 3.2, se sigue que $\dim_H(\mathcal{C}) \leq \log 2/\log 3$.

Por otro lado, consideremos una función de conjuntos μ definida en cada intervalo $I_{w_1,\ldots,w_n}$ de la n-ésima generación del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ como sigue

$$\mu(I_{w_1,\ldots,w_n}) = 2^{-n}, \quad \text{para cada } n \geq 0, \tag{3}$$

con la convención de que cuando $n = 0$, consideramos el intervalo $I_\emptyset = [0,1]$. Evidentemente, μ satisface las dos primeras condiciones de la Proposición 3.4. Ahora, sean $n \geq 1$ y $I_{w_1,\ldots,w_n}$ un intervalo de la n-ésima generación del conjunto de Cantor. Entonces, de la condición (3),

$$\begin{aligned}\sum_{I_{w_1,\ldots,w_n,w_{n+1}} \subset I_{w_1,\ldots,w_n}} \mu(I_{w_1,\ldots,w_n,w_{n+1}) &= \mu(I_{w_1,\ldots,w_n,0}) + \mu(I_{w_1,\ldots,w_n,1}) \\ &= 2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n},\end{aligned}$$

es decir, $\sum_{I_{w_1,\ldots,w_n,w_{n+1}} \subset I_{w_1,\ldots,w_n}} \mu(I_{w_1,\ldots,w_n,w_{n+1}}) = \mu(I_{w_1,\ldots,w_n})$, para cada $n \geq 0$. Por tanto, por la Proposición 3.4, μ puede extenderse a una medida de Borel de probabilidad soportada en $\mathcal{C}$.

Pongamos $s = \log 2/\log 3$ y notemos que

$$2^{-n} = 3^{-ns} = |I_{w_1,\ldots,w_n}|^s, \tag{4}$$

para cada cada intervalo $I_{w_1,\ldots,w_n}$ y cada $n \geq 1$.

Ahora, vamos a demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $r > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mu(B(x,r)) \leq C|B(x,r)|^s. \tag{5}$$

Caso 1: $x \notin \mathcal{C}$. Puesto que μ está soportada en el compacto $\mathcal{C}$, para toda bola $B(x,r)$ con $r > 0$ suficientemente pequeño, $\mu(B(x,r)) = 0$, por lo que la condición (5) se cumple trivialmente.

Caso 2: $x \in \mathcal{C}$. Sea $0 < 2r \leq 3^{-1}$. Por tanto, existe un único entero $n := n(r) \geq 1$ tal que

$$3^{-(n+1)} < 2r \leq 3^{-n}. \tag{6}$$

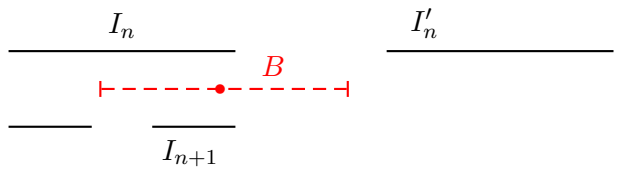

Figura 3: La bola $B = B(x,r)$ intersecta los intervalos de la generación n y $n+1$.

Por construcción, $B(x,r)$ intersecta a lo mucho un intervalo I_n de la n-ésima generación del conjunto de Cantor y al menos un intervalo I_{n+1} de la siguiente. (ver la Figura 3). Así, de la identidad (4) y la desigualdad (6),

$$\mu(B(x,r)) \leq \mu(I_n) = 2^{-n} = 3^{-ns} \leq 3^s \cdot |B(x,r)|^s.$$

De manera similar, tenemos que $\mu(B(x,r)) \geq |B(x,r)|^s/2$, por lo que

$$\frac{1}{2}|B(x,r)|^s \leq \mu(B(x,r)) \leq 3^s|B(x,r)|^s. \tag{7}$$

En particular, se verifica la condición (5). Finalmente, del Principio de distribución de masa,

$$\dim_H(\mathcal{C}) \geq s = \log 2/\log 3.$$

■

Definición 3.4 *Denotaremos como $\mu_{1/3}$ a la medida construida en la demostración del Lema 3.2 y la llamaremos medida uniforme en $\mathcal{C}$.*