Lección n°3: Introducción al Análisis multifractal

Paris, 2025

1. Definiciones y resultados previos

Definición 1.1 *Un vector de enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ se denomina multi-índice. Además, consideramos la siguiente norma*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.$$

Finalmente, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, escribimos

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i}.$$

Definición 1.2 *En dimensión $d \geq 1$, un polinomio $P = P(x)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, de grado $n \in \mathbb{N}_0$ viene dado por*

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d :\, |\alpha| \leq n} a_\alpha x^\alpha, \quad \textit{para algunos } a_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Llamemos $\mathcal{M}(\Omega)$ al espacio de las medidas de probabilidad μ soportadas en Ω.*

Definición 1.4 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $k \geq 1$ un entero. Denotamos como $C^0(\Omega)$ al espacio de funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en Ω. Además, definimos el espacio $C^k(\Omega)$ como*

$$C^k(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \partial^\alpha f \in C^0(\Omega), \ \textit{para todo multi-índice } \alpha \textit{ tal que } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Definición 1.5 (Espacio de Hölder) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $k \geq 0$ un entero, $s > 0$ un número no entero y $\gamma \in (0, 1]$. Definimos las cantidades*

$$||f||_{C^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad y \quad [f]_{\gamma,\Omega} := \sup_{x,y \in \Omega,\, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}, \quad \textit{donde } f \in C^0(\Omega).$$

*Con ello, definimos el espacio de funciones **uniformemente** y **localmente** Hölder continuas en Ω con exponente γ como*

$$C^{k,\gamma}(\Omega) := \left\{ f \in C^k(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha f||_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} [\partial^\alpha f]_{\gamma,\Omega} < +\infty \right\}, \ y$$

$$C^{k,\gamma}_{loc}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{ll} f \in C^k(\Omega) : & \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha f||_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} [\partial^\alpha f]_{\gamma,\Omega'} < +\infty, \\ & \textit{para todo } \Omega' \subset \Omega \textit{ compacto.} \end{array} \right\},$$

respectivamente.

Por otro lado, decimos que f pertenece al espacio $C^s(\Omega)$ si $f \in C^{\lfloor s \rfloor}(\Omega)$ y

$$\partial^\alpha f \in C^{0,s-\lfloor s \rfloor}(\Omega), \quad \text{para todo } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d,\ |(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)| = \lfloor s \rfloor .$$

Definición 1.6 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue para f si*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Teorema 1.1 (Teorema de diferenciación de Lebesgue) *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $\mathcal{L}^d$-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue para f.*

2. Regularidad puntual de funciones y medidas

Definición 2.1 *Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $s > 0$ y $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Decimos que f pertenece al espacio $C^s(x_0)$ si existe una constante $C = C(s, x_0) > 0$, una vecindad (abierta) V_{x_0} de x_0 y un polinomio P de grado a lo más $\lfloor s \rfloor$, tal que*

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^s, \quad \text{para todo } x \in V_{x_0}. \tag{1}$$

Observación 2.1 *La definición anterior motiva a realizar algunas observaciones:*

1. *La función f está necesariamente bien definida en cada punto $x \in V_{x_0}$. Más aún, la desigualdad (1) implica que $P(0) = f(x_0)$.*
2. *El exponente $s > 0$ determina la regularidad puntual de f, por lo que si s es grande, f es más regular.*
3. *Cuando $s \in (0, 1)$, el polinomio P de la definición anterior es una constante, más aún, igual a $f(x_0)$. Por lo tanto, (1) se reduce a*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^s, \quad \text{para todo } x \in V_{x_0}.$$

Lema 2.1 *Para todo $s > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $C^s(x_0)$ es un espacio vectorial.*

Proposición 2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Para todo $s > 0$,*

$$C^s(\Omega) \subsetneq \bigcap_{x_0 \in \Omega} C^s(x_0).$$

Lema 2.2 *El polinomio P de la Definición 2.1 es único si $s \notin \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que existen dos polinomios

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq \lfloor s \rfloor} p_\alpha x^\alpha, \quad Q(x) = \sum_{|\alpha| \leq \lfloor s \rfloor} q_\alpha x^\alpha, \quad \text{donde } p_\alpha, q_\alpha \in \mathbb{R},$$

que satisfacen la desigualdad (1) de la Definición 2.1. Entonces, existe $C = C(s, x_0) > 0$ y una vecindad V_{x_0} de x_0 suficientemente pequeña tal que para todo $x \in V_{x_0}$,

$$|P(x - x_0) - Q(x - x_0)| \leq |f(x) - P(x - x_0)| + |f(x) - Q(x - x_0)| \leq 2C|x - x_0|^s.$$

Puesto que el grado del polinomio $P - Q$ es a lo más $\lfloor s \rfloor < s$, necesariamente tenemos que $P - Q = 0$.

■

Lema 2.3 *Para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la familia de espacios $\{C^s(x_0)\}_{s>0}$ es decreciente.*

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < s_1 < s_2$ y $f \in C^{s_2}(x_0)$. Por definición, existe un polinomio P de grado a lo más $\lfloor s_2 \rfloor$, una constante $C > 0$ y una vecindad V_{x_0} de x_0 tal que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^{s_2}, \quad \text{para todo } x \in V_{x_0}.$$

Llamemos $\widetilde{P}$ al polinomio con los mismos coeficientes que P correspondientes a las potencias cuya norma es menor o igual a $\lfloor s_1 \rfloor$. Así, para todo $x \in V_{x_0}$ suficientemente cerca de x (de manera que satisfaga al menos $|x - x_0| < 1$),

$$\begin{aligned} |f(x) - \widetilde{P}(x - x_0)| &= \left| f(x) - P(x - x_0) + \sum_{|\alpha| = \lfloor s_1 \rfloor + 1}^{\lfloor s_2 \rfloor} a_\alpha (x - x_0)^\alpha \right| \\ &\leq C|x - x_0|^{s_2} + \sum_{|\alpha| = \lfloor s_1 \rfloor + 1}^{\lfloor s_2 \rfloor} |a_\alpha||x - x_0|^{|\alpha|}, \end{aligned}$$

de donde,

$$|f(x) - \widetilde{P}(x - x_0)| \leq \left(C + \sum_{|\alpha| = \lfloor s_1 \rfloor + 1}^{\lfloor s_2 \rfloor} |a_\alpha| \right) |x - x_0|^{s_1},$$

es decir, $f \in C^{s_1}(x_0)$. ■

El Lema 2.3 conduce naturalmente a la noción de exponente puntual de Hölder.

Definición 2.2 *Sea $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$. El exponente puntual de Hölder de f en x_0, que cuantifica su regularidad puntual, se define como*

$$h_f(x_0) = \text{máx}\left\{\sup\{s > 0 : f \in C^s(x_0)\}, 0\right\}.$$

Además, se dice que f tiene una singularidad de orden $h_f(x_0)$ en x_0.

Observación 2.2 *Si f tiene una singularidad de orden $\alpha \in (0, +\infty)$ en x_0, entonces*

$$f \in \bigcap_{s<\alpha} C^s(x_0) \setminus \bigcup_{s>\alpha} C^s(x_0).$$

Ejemplo 1. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Consideramos la función f_α (ver Figura 1) definida por

$$f_\alpha(x) = |x - x_0|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Puesto que $f_\alpha(x_0) = 0$, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)| = |x - x_0|^\alpha.$$

Así, $f_\alpha \in C^\alpha(x_0)$, y más aún, $h_{f_\alpha}(x_0) \geq \alpha$.

Por otro lado, asumamos que existe $\beta > \alpha$ tal que $f_\alpha \in C^\beta(x_0)$. Entonces, existe una constante $C = C(\beta, x_0) >$

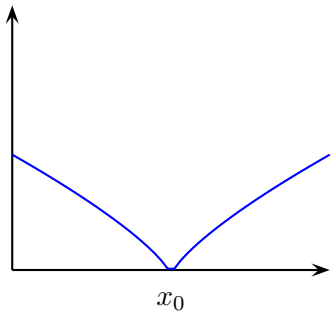

Figura 1: La función f_α en una vecindad de x_0.

0 y una vecindad V_{x_0} de x_0 de modo que se verifica la desigualdad (1) para todo $x \in V_{x_0}$. En otras palabras,

$$|x - x_0|^{\alpha-\beta} \leq C, \quad \text{para todo } x \in V_{x_0},$$

lo cual es una contradicción, pues la función $x \longmapsto |x - x_0|^{\alpha-\beta}$ no está acotada en ninguna vecindad de x_0. Así, $f_\alpha \notin \bigcup_{\beta>\alpha} C^\beta(x_0)$, y más aún, $h_{f_\alpha}(x_0) \leq \alpha$. En conclusión, $h_{f_\alpha}(x_0) = \alpha$.

Notemos que f_α es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$. Gracias a la Proposición 2.1,

$$h_{f_\alpha}(x) = +\infty, \quad \text{para todo } x \neq x_0.$$

Definición 2.3 *La singularidad en x_0 del ejemplo 1 se conoce como tipo cusp.*

Ejemplo 2. Sean $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Consideramos la función $f_{\alpha,\beta}$ (ver Figura 2) definida por

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x-x_0|^\beta}\right) & \text{si } x \neq x_0, \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Nuevamente, $f_{\alpha,\beta} \in C^\alpha(x_0)$, ya que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_{\alpha,\beta}(x) - f_{\alpha,\beta}(x_0)| = |x - x_0|^\alpha \left|\sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right)\right| \leq |x - x_0|^\alpha.$$

Por lo tanto, $h_{f_{\alpha,\beta}}(x_0) \geq \alpha$. Por otro lado, asumamos que existe $\gamma > \alpha$ tal que $f_{\alpha,\beta} \in C^\gamma(x_0)$. Entonces, existe una constante $C = C(\gamma, x_0) > 0$ y una vecindad V_{x_0} de x_0 de modo que se verifica la desigualdad (1) para todo $x \in V_{x_0}$. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en V_{x_0} tal que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{1}{|x_n - x_0|^\beta}\right) = 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

En consecuencia, para todo $n \geq 1$,

$$|x_n - x_0|^{\alpha-\gamma} \leq C,$$

de dónde se obtiene una contradicción, pues $\alpha - \gamma < 0$. Por tanto, $h_{f_{\alpha,\beta}}(x_0) \leq \alpha$. En conclusión, $h_{f_{\alpha,\beta}}(x_0) = \alpha$.

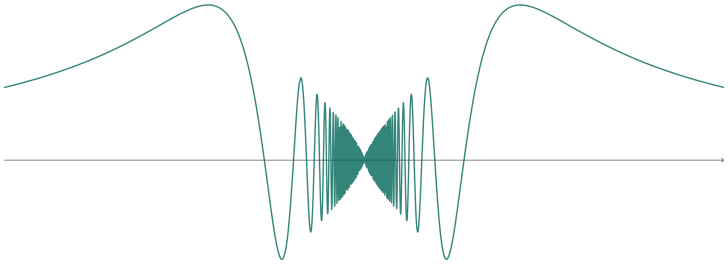

Figura 2: La función $f_{\alpha,\beta}$ en una vecindad de x_0.

Notemos que $f_{\alpha,\beta}$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$. Gracias a la Proposición 2.1,

$$h_{f_{\alpha,\beta}}(x) = +\infty, \quad \text{para todo } x \neq x_0.$$

Definición 2.4 *La singularidad del ejemplo 2, caracterizada por oscilaciones 'infinitamente rápidas' alrededor de x_0, se conoce como tipo chirp.*

Ejemplo 3. Sea $0 < H < 1$. La *función de Weierstrass* viene dada por

$$W_H(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-nH} \sin(2^n x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se puede probar que $h_{W_H}(x) = H$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Definimos la *función no diferenciable de Riemann* como sigue

$$R_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

R_2 es continua en $\mathbb{R}$ pues es el límite uniforme de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Sin embargo, G. Hardy y Littlewood probaron en 1910 que R_2 no es diferenciable, excepto (quizás) en los racionales. Luego, en 1960, J. Gerver probó que R_2 es diferenciable en los racionales de la forma

$$\frac{2p+1}{2q+1}, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Más tarde, en 1999, Jaffard [1] mostró que

$$h_{R_2}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta_x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

donde δ_x es el radio de aproximación de x por los racionales.

---

[1] Stéphane Jaffard, matemático francés.

3. Dimensión local de medidas

Consideremos una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^d$, y $x_0 \in supp(\mu)$. Surge de manera natural el deseo de estudiar el comportamiento local de μ alrededor de x_0. Más precisamente, queremos conocer cómo disminuye la cantidad $\mu(B(x_0, r))$ cuando $r > 0$ tiende a cero. En general, veremos que tal comportamiento suele venir dado por

$$\mu(B(x_0, r)) \sim r^s, \quad \text{para algún } s > 0.$$

La definición rigurosa que cuantifica dicho comportamiento es la siguiente.

Definición 3.1 *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^d$, y $x_0 \in supp(\mu)$. La dimensión local inferior (resp. superior) de μ en x_0, denotada por $\underline{d_\mu}(x_0)$ (resp. $\overline{d_\mu}(x_0)$), está definida por*

$$\underline{d_\mu}(x_0) = \liminf_{r \longrightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x_0, r))}{\log r}, \quad \left(\textit{resp.} \quad \overline{d_\mu}(x_0) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x_0, r))}{\log r} \right).$$

Cuando $\underline{d_\mu}(x_0)$ y $\overline{d_\mu}(x_0)$ coinciden, el valor común se denomina dimensión local de μ, y se denota simplemente como $d_\mu(x_0)$.

Observación 3.1 *De la definición de* $\liminf$ *se extraen dos propiedades:*

- *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $r' = r'(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que para todo $0 < r < r'$,*

$$\frac{\log \mu(B(x_0, r))}{\log r} \geq \underline{d_\mu}(x_0) - \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(B(x_0, r)) \leq r^{\underline{d_\mu}(x_0) - \varepsilon}.$$

- *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $r' > 0$, existe $0 < r < r'$ (que depende de ε y x_0) tal que*

$$\frac{\log \mu(B(x_0, r))}{\log r} \leq \underline{d_\mu}(x_0) + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(B(x_0, r)) \geq r^{\underline{d_\mu}(x_0) + \varepsilon}.$$

  En particular, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(r_n)_{n \geq 1}$ (que depende de ε y x_0), en $\mathbb{R}_+$ que converge a cero, tal que para cada $n \geq 1$,

$$\frac{\log \mu(B(x_0, r_n))}{\log r_n} \leq \underline{d_\mu}(x_0) + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(B(x_0, r_n)) \geq r_n^{\underline{d_\mu}(x_0) + \varepsilon}.$$

Ejemplo 5. La dimensión local de la medida de Lebesgue d-dimensional $\mathcal{L}^d$ es igual a d en cada $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Puesto que cada bola $B(x_0, r)$, con $r > 0$, puede escribirse como

$$B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1),$$

y de las propiedades de la medida de Lebesgue, se sigue que

$$d_{\mathcal{L}^d}(x_0) = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^d(B(x_0, r))}{\log r} = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{\log(r^d \mathcal{L}^d(B(0, 1)))}{\log r} = d.$$

Ejemplo 6. La dimensión local de la medida uniforme $\mu_{1/3}$ sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es igual a $\log 2/\log 3$. En efecto, recordemos que $\mu_{1/3}$ satisface la siguiente *scaling condition* para todo $r > 0$ suficientemente pequeño:

$$\frac{1}{2}|B(x,r)|^s \leq \mu_{1/3}(B(x,r)) \leq 3^s|B(x,r)|^s, \quad \text{donde } s = \frac{\log 2}{\log 3}. \tag{2}$$

Así, para cada $x_0 \in \mathcal{C}$,

$$\frac{\log\left(\frac{1}{2}|B(x,r)|^s\right)}{\log r} \geq \frac{\log \mu_{1/3}(B(x,r))}{\log r} \geq \frac{\log(3^s|B(x,r)|^s)}{\log r}.$$

Tomando el límite cuando $r \longrightarrow 0$, se sigue que

$$d_{\mu_{1/3}}(x_0) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

El siguiente resultado muestra una relación entre la regularidad puntual de funciones y la regularidad puntual de las medidas.

Lema 3.1 *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ y consideremos la función F_μ definida como*

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x d\mu(y) = \mu([0,x]) & \textit{si } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_x^0 d\mu(y) = \mu([x,0]) & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

Si $0 < \underline{d_\mu}(x_0) < 1$, entonces $h_{F_\mu}(x_0) = \underline{d_\mu}(x_0)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $0 < \underline{d_\mu}(x_0) - \varepsilon < \underline{d_\mu}(x_0) + \varepsilon < 1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0 > 0$. Por la Observación 3.1, sabemos que existe $h' := h'(\varepsilon) > 0$ pequeño tal que para todo $0 < h < h'$,

$$\mu(B(x_0,h)) \leq h^{\underline{d_\mu}(x_0)-\varepsilon},$$

por tanto, para todo $|h| < h'$,

$$|F_\mu(x_0+h) - F_\mu(x_0)| = \chi_{h\geq 0}\,\mu([x_0, x_0+h]) + \chi_{h<0}\,\mu([x_0+h, x_0]) \leq \mu(B(x_0,|h|)) \leq |h|^{\underline{d_\mu}(x_0)-\varepsilon},$$

lo que implica que $F_\mu \in C^{\underline{d_\mu}(x_0)-\varepsilon}(x_0)$.

Por otro lado, supongamos que $F_\mu \in C^{\underline{d_\mu}(x_0)+\varepsilon}(x_0)$. De la Observación 3.1, sabemos que existe una sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}_+$ que converge a cero, tal que para todo $n \geq 1$,

$$\mu(B(x_0,h_n)) \geq h_n^{\underline{d_\mu}(x_0)+\varepsilon/2}. \tag{3}$$

Puesto que $F_\mu \in C^{\underline{d_\mu}(x_0)+\varepsilon}(x_0)$, considerando un entero $N := N(x_0) > 0$ suficientemente grande, se sigue que para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \mu(B(x_0,h_n)) = |F_\mu(x_0+h_n) - F_\mu(x_0-h_n)| &\leq |F_\mu(x_0+h_n) - F_\mu(x_0)| + |F_\mu(x_0-h_n) - F_\mu(x_0)| \\ &\leq C h_n^{\underline{d_\mu}(x_0)+\varepsilon}, \end{aligned}$$

lo que, junto a (3), nos da una contradicción. Así, puesto que ε es arbitrario, se sigue que $h_{F_\mu}(x_0) = \underline{d_\mu}(x_0)$. ■

Observación 3.2 *El Lema 3.1 es falso cuando $\underline{d_\mu}(x_0) = 1$. En efecto, consideremos el siguiente contraejemplo: sea*

$$\mu = \mathcal{L}^1_{|_{[0,1]}},$$

por lo que $d_\mu(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Por otro lado, notar que $F_\mu(x) = x$ en $[0,1]$, y así, $F_\mu \in C^\infty(0,1)$.

Este fenómeno ocurre debido a la presencia del polinomio de la Definición 2.1.

El siguiente resultado muestra que, desde un punto de vista de regularidad local, el estudio del comportamiento de una medida puede resultar 'delicado'.

Lema 3.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Si el mapa $x \longmapsto \underline{d_\mu}(x)$ es continuo, entonces es constante e igual a d.*

Demostración. Ver [1]. ■

Teorema 3.1 *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Para $\mathcal{L}$-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^d(B(x,r))} < +\infty.$$

En dimensión $d = 1$, el teorema anterior conduce directamente al siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Para $\mathcal{L}$-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\underline{d_\mu}(x) = \liminf_{r \longrightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log r} \geq 1.$$

4. Espectro multifractal o de singularidades

Como se ha explicado anteriormente, el exponente de Hölder puntual de una función o medida suele variar rápidamente de un punto a otro. Este es el caso, por ejemplo, de la función serie de Riemann o de algunos datos observados en muchos fenómenos físicos.

Por lo tanto, en muchas situaciones no es posible calcular o estimar el exponente de Hölder puntual en cada punto, y es mucho más relevante tratar de encontrar el rango de estos exponentes, así como describir el 'tamaño' del conjunto de puntos que tienen un exponente dado.

Definición 4.1 *Sea $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (resp. μ una medida de Borel positiva en $\mathbb{R}^d$). El iso-Hölder set (también llamado conjunto de nivel) de f (resp. μ) de orden $s \geq 0$ está definido como*

$$E_f(s) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = s\right\} \quad \left(\textit{resp. } \underline{E_\mu}(s) := \left\{x \in supp(\mu) : \underline{d_\mu}(x) = s\right\}\right).$$

El espectro multifractal o espectro de singularidades de f (resp. de μ) es el mapa σ_f (resp. σ_μ) definido por

$$\sigma_f : s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \longmapsto \dim_H(E_f(s)) \in [0,d] \cup \{-\infty\},$$
$$(\textit{resp.} \quad \sigma_\mu : s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \longmapsto \dim_H\left(\underline{E_\mu}(s)\right) \in [0,d] \cup \{-\infty\})$$

con la convención $\dim_H(\emptyset) = -\infty$.

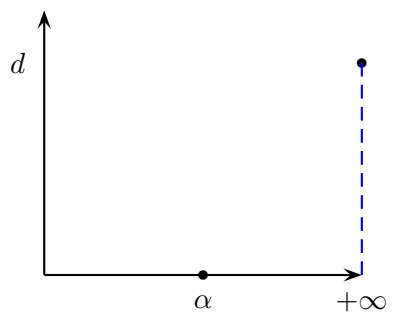

Figura 3: Espectro multifractal de las funciones f_α y $f_{\alpha,\beta}$.

Este mapa proporciona una 'jerarquía' entre los conjuntos de nivel $E_f(s)$ (resp. $E_\mu(s)$), según el tamaño medido por su dimensión de Hausdorff. El cálculo de σ_f (resp. σ_μ) se ha realizado en diversos entornos: series de Fourier, procesos estocásticos (Lévy, Markov, movimiento browniano fraccionario), medidas definidas dinámicamente (Gibbs y medidas invariantes).

Observación 4.1 *La Definición 4.1 motiva las siguientes observaciones:*

- *El cálculo de σ_f puede resultar muy complicado pues se necesita, a priori, calcular un número infinito de dimensiones de conjuntos.*
- *Notemos que los conjuntos de nivel $\{E_f(s)\}_{s\in[0,+\infty]}$ forman una partición no numerable de $\mathbb{R}^d$, i.e*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{s\in[0,+\infty]} E_f(s).$$

Definición 4.2 *Una función f es llamada monofractal si su espectro multifractal está soportado por un solo punto, i.e. si existe $s^* \in [0,+\infty]$ tal que $\mathbb{R}^d = E_f(s^*)$. Caso contrario, f es llamada multifractal.*

Ejemplo. Sea $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Las funciones del ejemplo 1 y 2 son multifractales, pues

$$E_{f_\alpha}(\alpha) = E_{f_{\alpha,\beta}}(\alpha) = \{x_0\}, \quad \text{y} \quad E_{f_\alpha}(+\infty) = E_{f_{\alpha,\beta}}(+\infty) = \mathbb{R}^d \setminus \{x_0\},$$

por lo que

$$\sigma_{f_\alpha}(\alpha) = \sigma_{f_{\alpha,\beta}}(\alpha) = 0, \quad \text{y} \quad \sigma_{f_\alpha}(+\infty) = \sigma_{f_{\alpha,\beta}}(+\infty) = 1,$$

El espectro multifractal de las funciones $f\alpha$ y $f_{\alpha,\beta}$ se presenta en la Figura 3.

Ejemplo. Sea $0 < H < 1$. La función de Weierstrass W_H es monofractal ya que

$$E_{W_H}(H) = \mathbb{R} \Longrightarrow \sigma_{W_H}(H) = 1.$$

El espectro multifractal de la función W_H se presenta en la Figura 4.

Ejemplo. Tomó casi 150 años el cálculo del espectro de singularidades σ_R de la *función no diferenciable de*

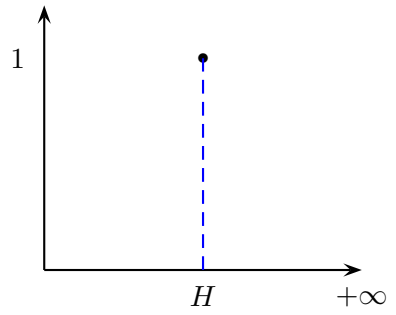

Figura 4: Espectro multifractal de la función de Weierstrass W_H.

Riemann R. En [2] se muestra que

$$\sigma_R(s) = \begin{cases} 4s-2 & \text{si } s \in [1/2, 3/4], \\ 0 & \text{si } s = 3/2, \\ -\infty & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El siguiente teorema presenta una condición que debe satisfacer el espectro multifractal de cualquier medida en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 4.1 *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $\sigma_\mu(s) \leq \text{mín}\{s, d\}$, para todo $s \in [0, +\infty]$.*

Para demostrar el Teorema 4.1 necesitaremos del siguiente resultado clásico.

Teorema 4.2 (Teorema/Lema de recubrimiento de Besicovitch) *Sean $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $R = \{B(x, r_x)\}_{x \in E}$ con $r_x > 0$ un recubrimiento de E por bolas centradas en sus puntos. Existen Q_d familias de conjuntos $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{Q_d}$, donde Q_d es una constante independiente de E, tal que*

1. *$\mathcal{F}_i$ esta compuesta por bolas de R disjuntas dos a dos, para todo $i \in \{1, \ldots, Q_d\}$.*
2. *$E \subset \bigcup_{i=1}^{Q_d} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B$.*

Observación 4.2 *El segundo punto del teorema anterior implica que cada $\mathcal{F}_i$ es numerable. Justamente aquí radica la importancia de este teorema.*

Demostración del Teorema 4.1. Consideremos el siguiente conjunto

$$\underline{E_\mu}^{\leq}(s) := \{x \in \mathbb{R}^d : \underline{d_\mu}(x) \leq s\}.$$

Obviamente $\underline{E_\mu}(s) \subset \underline{E_\mu}^{\leq}(s)$, por lo que es suficiente probar que $\dim_H \left(\underline{E_\mu}^{\leq}(s)\right) \leq \text{mín}\{s, d\}$.

La desigualdad es trivial cuando $s \geq d$. Consideremos ahora $s \in [0, d)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $s + \varepsilon < d$. Gracias a la Observación 3.1, para cada $x \in \underline{E_\mu}^{\leq}(s)$, existe una sucesión $(r_n^x)_{n \geq 1}$ en $\mathbb{R}_+$ (que depende de ε y x) que converge a cero, tal que para cada $n \geq 1$,

$$\mu(B(x, r_n^x)) \geq (r_n^x)^{\underline{d_\mu}(x)+\varepsilon} \geq (r_n^x)^{s+\varepsilon}. \tag{4}$$

Sean $0 < \eta < 1$ y $t > s + \varepsilon$. Usamos la técnica habitual de hallar una cota superior para $\mathcal{H}_\eta^t(\underline{E_\mu}^{\leq}(s))$.

Por la convergencia a cero de la sucesión $(r_n^x)_n$, asumimos sin pérdida de generalidad que $r_n^x < \eta$ para todo $n \geq 1$ y cada $x \in \underline{E_\mu}^{\leq}(s)$. Así, la familia de bolas $\{B(x, r_n^x)\}_{x \in \underline{E_\mu}^{\leq}(s)}$ forma un η recubrimiento (no numerable) de $\underline{E_\mu}^{\leq}(s)$. Aplicando el Lema de recubrimiento de Besicovitch, obtenemos Q_d familias $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{Q_d}$ tal que

- $\mathcal{F}_i = \{B(x, r_n^x)\}_{x \in E_i}$, donde las bolas son disjuntas dos a dos y $E_i \subset \underline{E_\mu}^{\leq}(s)$ es numerable.
- $\underline{E_\mu}^{\leq}(s) \subset \bigcup_{i=1}^{Q_d} \bigcup_{x \in E_i} B(x, r_n^x)$.

Así, la familia $\{B(x, r_n^x)\}_{x \in E_i, 1 \leq i \leq Q_d}$ forma un η recubrimiento contable de $\underline{E_\mu}^{\leq}(s)$. Por lo tanto, denotando por C_d cualquier constante que depende de la dimensión,

$$\mathcal{H}_\eta^t(\underline{E_\mu}^{\leq}(s)) \leq \sum_{i=1}^{Q_d} \sum_{x \in E_i} |B(x, r_n^x)|^t \leq C_d \sum_{i=1}^{Q_d} \sum_{x \in E_i} (r_n^x)^t \leq C_d \sum_{i=1}^{Q_d} \sum_{x \in E_i} (r_n^x)^{s+\varepsilon}.$$

Puesto que cada F_i esta compuesto por bolas disjuntas dos a dos y μ es una medida de probabilidad, la desigualdad (4) nos da que

$$\mathcal{H}_\eta^t(\underline{E_\mu}^{\leq}(s)) \leq C_d \sum_{i=1}^{Q_d} \sum_{x \in E_i} \mu(B(x, r_n^x)) = C_d \sum_{i=1}^{Q_d} \mu \left(\bigcup_{x \in E_i} B(x, r_n^x) \right) \leq C_d.$$

Tomando $\eta \longrightarrow 0$ y puesto que $t > s + \varepsilon$ es cualquiera, se sigue que $\dim_H(\underline{E_\mu}^{\leq}(s)) \leq s + \varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0$ se sigue el resultado. ■

Referencias

[1] Z. Buczolich and S. Seuret. Measures and functions with prescribed singularity spectrum. *J. Fractal Geometry*, 1(3):295–333, 2014.

[2] Stephane Jaffard. The spectrum of singularities of riemann's function. *Revista matemática iberoamericana*, 12(2):441–460, 1996.