Lección n°2: Desigualdades de Poincaré para medidas de probabilidad en una dimensión. AMARUN 2024

1 Desigualdad de Poincaré unidimensional

El contenido de esta lección se basa principalmente en [1]. Fijaremos (a, b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ un intervalo abierto y μ una medida de probabilidad en (a, b) que admite una función de densidad $x \in (a, b) \mapsto e^{-V(x)}$, con V continuo y continuamente diferenciable a trozos. Notaremos al espacio de tales medidas de probabilidad por $\mathcal{P}(a, b)$. Los espacios de Lebesgue y de Sobolev conforman un teórico natural para definir una desigualdad de Poincaré. Un estudio detallado sobre sus versiones clásicas se encuentra en [2]. Nosotros necesitamos sus versiones para medidas de probabilidad.

Definición 1 (Espacio de Lebesgue) *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a, b)$. El espacio de Lebesgue $L^2_\mu(a, b)$ es el conjunto de (clases de equivalencia dadas por la igualdad casi segura de μ de) funciones medibles tales que*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty.$$

Definición 2 (Derivada débil y espacios de Sobolev) *Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función real integrable con respecto a la medida de Lebesgue. La derivada débil de f, denotada sin ambigüedad por f', es la función integrable que cumple*

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx,$$

para cualquier función $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(a, b)$ (infinitamente diferenciable y a soporte compacto). El espacio de Sobolev $H^1_\mu(a, b)$ es el espacio de funciones en $L^2_\mu(a, b)$ tales que sus derivadas débiles también están en $L^2_\mu(a, b)$, es decir,

$$H^1_\mu(a, b) = \left\{ f \in L^2_\mu(a, b) \,|\, f' \in L^2_\mu(a, b) \right\}.$$

Las funciones $f \in H^1_\mu(a, b)$ admiten una versión continua que se escribe como $x \in [a, b] \mapsto f(x) = \int_a^b f'(x)\, dx + f(a)$ (véase por ejemplo [2]).

Ahora podemos definir adecuadamente la desigualdad de Poincaré para medidas de probabilidad.

Definición 3 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a, b)$. Decimos que μ satisface una desigualdad de Poincaré con constante $C < \infty$ si para todo $f \in H^1_\mu(a, b)$ centrado (tal que $\int_a^b f(x)\, \mu(dx) = 0$) se tiene que*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mu(dx) \le C \int_a^b \left|f'(x)\right|^2 \mu(dx), \quad \text{para todo } f \in H^1_\mu(a, b). \tag{1}$$

La constante óptima C (la más pequeña) para la cual (1) se cumple se denota por $C_P(\mu)$. Si existe una función f con la cual (1) se cumple con igualdad con $C_P(\mu)$, decimos que f satura la desigualdad de Poincaré.

Por definición, $C_P(\mu)$ está dada por

$$C_P(\mu) = \sup_{\substack{f \in H^1_\mu(a,b) \\ f \neq 0, \text{ centrado}}} \frac{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mu(dx)}{\int_a^b |f'(x)|^2 \, \mu(dx)}, \tag{2}$$

expresión que permite obtener cotas inferiores de la constante.

Ejercicio 1.1 *Sean $\mu \in \mathcal{P}(a, b)$ y $f \in L^2_\mu(a, b)$. Pruebe que*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \left(f(x) - \int_a^b f(y)\mu(y) \right)^2 \mu(dx) = \min_{c \in \mathbb{R}} \left(\int_a^b (f(x) - c)^2 \, \mu(dx) \right).$$

Ejercicio 1.2 (Perturbación) *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a,b)$. Sea $\Psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\tilde{\mu}$ la medida de probabilidad dada por $\tilde{\mu}(dx) = e^{\Psi}(x)\mu(dx)/Z$, donde Z es la constante de renormalización. Pruebe que*

$$C_P(\tilde{\mu}) \leq e^{\sup \Psi(x) - \inf \Psi(x)}.$$

Ejercicio 1.3 (Transporte) *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a,b)$. Sea $T : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz (es decir, para el cual existe $L > 0$ que verifica $|T(x) - T(y)| \leq L\,|x-y|$ para todo $x, y \in (a,b)$) diferenciable. Denote por $T\mu$ la medida imagen de μ por T, definida por*

$$T\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \qquad \text{para todo conjunto boreliano } B.$$

- *Demuestre que*
$$C_P(T\mu) \leq L^2 C_P(\mu).$$
- *En el caso cuando T es la función afín definida como $T(x) = Lx + b$ ($L, b \in \mathbb{R}$), pruebe que*
$$C_P(T\mu) = L^2 C_P(\mu)$$

2 Interpretación espectral

Determinar la constante óptima $C_P(\mu)$ es generalmente una tarea complicada. Sin embargo, hay una interpretación espectral que facilita esta tarea. En este segmento nos limitamos a presentar las ideas detrás de la caracterización y su aplicación para hallar la Poincaré, sin profundizar en los detalles. El lector que desee ampliar sus conocimientos puede referirse a [3].

Proposición 2.1 *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a,b)$. Entonces, los siguientes dos problemas son equivalentes:*

- *Hallar $f \in H^1_\mu(a,b)$ y $\lambda \geq 0$ tales que*
$$\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mu(dx), \qquad \text{para todo } g \in H^1_\mu(a,b). \tag{P1}$$
- *Hallar $f \in H^1_\mu(a,b)$ y $\lambda \geq 0$ tales que*
$$\begin{cases} Lf(x) := (f'e^{-V})'(x)e^{V}(x) = f''(x) - V'(x)f'(x) = -\lambda f(x), & \text{para } x \in (a,b), \\ f'(a)e^{-V(a)} = f'(b)e^{-V(b)} = 0. \end{cases} \tag{P2}$$

Si a y/o b son infinitos, las condiciones de borde se interpretan como condiciones en los límites.

Además, $C_P(\mu) = 1/\tilde{\lambda}$, donde $\tilde{\lambda}$ es el ínfimo λ positivo admisible en (P1)-(P2). En particular, su función asociada f (en caso de existir) es aquella que satura la desigualdad de Poincaré.

Demostración.

En este documento no incluimos la prueba de la desigualdad $C_P(\mu) \leq 1/\tilde{\lambda}$. Esta puede ser establecida utilizando la *descomposición espectral* del operador L. En [1] se puede consultar, por ejemplo, el esquema de la demostración bajo el supuesto de que dicho espectro es discreto.

La desigualdad recíproca se obtiene directamente a partir de (P1). Supongamos que (f,λ) es una solución de (P1), con $\lambda > 0$. Al tomar en particular $g \equiv 1$, notamos que f es una función centrada. Entonces, usando (2) tenemos que

$$C_P(\mu) \geq \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda \int_a^b |f(x)|^2\ \mu(dx)}{\int_a^b |f'(x)|^2\ \mu(dx)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\int_a^b |f'(x)|^2\ \mu(dx)}{\int_a^b |f'(x)|^2\ \mu(dx)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tomando el ínfimo de los $\lambda > 0$ admisibles obtenemos $C_P(\mu) \geq 1/\tilde{\lambda}$.

Ahora probemos la equivalencia entre los problemas (P1) y (P2). Primero, supongamos que (f,λ) es solución de (P1). Si tomamos $g \equiv 1$, encontramos que f es una función centrada. Luego, eligiendo $g \in \mathscr{C}_0^\infty(a,b)$, manipulamos el término de la izquierda (ahora lo posicionamos en la derecha) para obtener:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)g'(x)\mu(dx) &= \lambda \int_a^b f(x)g(x)\mu(dx) \\
&= \lambda \int_a^b f(x)e^{-V(x)}g(x)\,dx \\
&= \lambda \int_a^b \left(\int_a^x f(y)e^{-V(y)}dy\right)' g(x)\,dx \\
&= \lambda \left[\int_a^x f(y)e^{-V(y)}\,dy\, g(x)\right]_a^b - \lambda \int_a^b \left(\int_a^x f(y)e^{-V(y)}dy\right) g'(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

El primer término en la última línea se anula porque f es centrada. Así, obtenemos:

$$
\int_a^b f'(x)g'(x)e^{-V(x)}dx = -\lambda \int_a^b \left(\int_a^x f(y)e^{-V(y)}dy\right) g'(x)\,dx
$$

para todo $g \in \mathscr{C}_0^\infty(a,b)$. Dado que la primitiva $x \mapsto \int_a^x f(y)e^{-V(y)}dy$ pertenece a $L^2_\mu(a,b)$ (**Ejercicio 2.1** Pruébelo), por dualidad esto nos lleva a la igualdad de funciones:

$$
f'e^{-V} = -\lambda \int_a^{\cdot} f(y)e^{-V(y)}dy,
$$

En particular:

$$
Lf = e^V(f'e^{-V})' = -\lambda f \in L^2_\mu(a,b).
$$

Resta demostrar que f satisface las condiciones de borde. Al integrar ahora el término de la derecha de (P1) tomando $g \in H^1_\mu(a,b)$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_a^b f(x)g(x)e^{-V(x)}dx &= \int_a^b f'(x)g'(x)e^{-V(x)}dx \qquad (3)\\
&= \left[f'(x)g(x)e^{-V(x)}\right]_a^b - \int_a^b \underbrace{e^{V(x)}(f'(x)e^{-V(x)})'}_{Lf(x)} g(x)e^{-V(x)}\,dx \\
&= \left[f'(x)g(x)e^{-V(x)}\right]_a^b + \lambda \int_a^b f(x)g(x)e^{-V(x)}\,dx. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Cancelando los términos idénticos en ambos lados y tomando g que se anule en solo uno de los dos extremos, concluimos que $f'(a)e^{-V(a)} = f'(b)e^{-V(b)} = 0$.

Finalmente, basta leer (3)-(4) en el sentido contrario para convencerse que toda solución de (P2) es a su vez solución de (P1). ■

El operador L también puede ser utilizado para obtener cotas inferiores de la desigualdad de Poincaré. Esto es posible gracias a la fórmula variacional de Chen [4]:

Teorema 2.1 (Fórmula variacional de Chen) *Sea $\mu \in \mathcal{P}(a,b)$. Entonces*

$$
\frac{1}{C_P(\mu)} = \sup_{g'>0} \inf_{x\in(a,b)} \frac{(-Lf)'}{f'}.
$$

A continuación ilustramos la aplicación de la Proposición 2.1.

Ejemplo 2.1 *La constante óptima de la desigualdad de Poincaré para la distribución uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ es $C_P(\mu) = 1/\pi^2$ y la desigualdad es saturada por $x \in (0,1) \mapsto \cos(\pi x)$.*

En efecto, la función de densidad de la distribución uniforme se puede escribir como $x \in (0,1) \mapsto 1 = \exp(-\log(1))$. Entonces, la Proposición 2.1 nos dice que la constante óptima de la desigualdad de Poincaré es el inverso del menor $\lambda > 0$ admisible en el problema:

$$\begin{cases} -\lambda f(x) & = f''(x) - (\log(1))' f'(x) = f''(x), \qquad \text{para todo } x \in (0,1), \\ f'(0) & = f'(1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Sus soluciones generales se expresan como:

$$g(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{6}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. El valor de B debe ser igual a cero gracias a la primera condición de borde porque

$$g'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0.$$

De la segunda condición de borde, $g'(1) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, no queremos que A sea igual a cero, ya que en ese caso g sería idénticamente nula. Entonces, esta condición caracteriza nuestros valores λ como $\lambda = k^2\pi^2$, con $k \geq 1$ entero. Pero, dado que solo nos interesa el menor valor posible, tomamos $k = 1$ y obtenemos que

$$C_P(\mu) = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Una vez descubierta la constante óptima, completamos este ejemplo proporcionando la función asociada a λ_1. Tomando $A = 1$ (esto es posible pues función f es única salvo escalamiento) y reemplazando λ_1 en (6) obtenemos la función: $x \in [0,1] \mapsto g(x) = \cos(\pi x)$.

Para terminar esta sección veamos que podría ocurrir que no exista una función asociada a $C_P(\mu)$. Esto generalmente sucede cuando la solución de la ecuación diferencial (P2) no pertenece a $L^2_\mu(a,b)$. Este es el caso, por ejemplo, para la distribución exponencial.

Ejemplo 2.2 *Considere la distribución $\mathcal{E}(\gamma)$ ($\gamma > 0$), de función de densidad $x \in (a,b) \mapsto \gamma e^{-\gamma x}$. Entonces se tiene que $C_P(\mu) = 4/\gamma^2$, pero no existe función que sature la desigualdad de Poincaré.*

En [5] se propuso obtener la primera desigualdad $C_P(\mu) \leq 4/\gamma^2$; replicamos su demostración. En vista del Ejercicio 1.1, para cualquier función $f \in H^1_\mu(0,\infty)$ centrada tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x)|^2 \,\mu(dx) &= \min_{c\in\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty (f(x) - c)^2 \,\mu(dx) \right) \\ &\leq \int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Integrando por partes el término del lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx &= \left[-(f(x) - f(0))^2 e^{-\gamma x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty 2\,(f(x) - f(0))\, f'(x) e^{-\gamma x}\, dx \\ &= 2\int_0^\infty (f(x) - f(0))\, f'(x) e^{-\gamma x}\, dx. \end{aligned}$$

Luego, la desigualdad de Hölder nos permite controlar

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx &\leq 2 \left(\int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 e^{-\gamma x}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |f'(x)|^2 e^{-\gamma x}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\gamma} \left(\int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |f'(x)|^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Entonces, juntando (7) y (8) da como resultado

$$\int_0^\infty |f'(x)|^2 \,\mu(dx) \leq \int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx \leq \frac{4}{\gamma^2} \int_0^\infty |f'(x)|^2 \,\gamma e^{-\gamma x}\, dx = \frac{4}{\gamma^2} \int_0^\infty |f'(x)|^2 \,\mu(dx).$$

lo cual implica que $C_P(\mu) \le 4/\gamma^2$.

Para obtener la desigualdad recíproca empleamos (2) con la función centrada $f_\varepsilon(x) = e^{\varepsilon x} - \frac{1}{\gamma-\varepsilon}$, con $\varepsilon < \gamma/2$ (de manera que $f_\varepsilon \in H^1_\mu((0,\infty))$). Luego de algunos cálculos tenemos

$$\frac{\int_0^\infty |f_\eta(x)|^2 \mu(dx)}{\int_0^\infty |f'_\eta(x)|^2 \mu(dx)} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-2\varepsilon} - \frac{\gamma}{(\gamma-\varepsilon)^2}}{\frac{\gamma^2}{(\gamma-\varepsilon)^2}} = \frac{(\varepsilon-\gamma)^2 - \gamma(2\varepsilon-\gamma)}{\varepsilon^2(\varepsilon-\gamma)^2}.$$

El límite cuando $\varepsilon \to \gamma/2$ y la ecuación (2) implican que $C_P(\mu) \ge 4/\gamma^2$.

Sin embargo, no existe una función que sature la desigualdad de Poincaré. De hecho, la solución del problema diferencial asociado

$$\begin{cases} f''(x) - \gamma f'(x) = -\dfrac{\gamma^2}{4} f(x), & x > 0, \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

está dada por $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{2}\gamma x\right) e^{\frac{1}{2}\gamma x}$, la cual no pertenece a $L^2_\mu((0,\infty))$.

Ejercicio 2.2 *Pruebe que la constante óptima de la desigualdad de Poincaré para la distribución uniforme* $\mathcal{U}([a,b])$ *(*$a<b$*) es* $C_P(\mu) = \frac{1}{\pi^2}(b-a)^2$ *y la desigualdad es saturada por* $x \in (a,b) \mapsto \cos\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$.

Ejercicio 2.3 *Considere la distribución normal* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *(*$m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$*), de función de densidad* $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. *Halle la constante óptima de su desigualdad Poincaré.*

3 Aproximación numérica de la constante de Poincaré

En esta parte suponemos que a y b son finitos. Revisitamos el método numérico propuesto en [1] para estimar la constante $C_P(\mu)$ y la función que satura la desigualdad de Poincaré. Este se basa en una discretización en elementos finitos para resolver el problema (P1).

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideramos la partición uniforme del intervalo (a,b) con paso $h = (b-a)/n$, dada por los nodos $x_i = a + ih$ ($i \in [\![0,n]\!]$). Introducimos el espacio finito dimensional $H_h \subseteq H^1_\mu(a,b)$ generado por las funciones lineales a trozos

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ 1 - \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las ilustramos en la Figura 1.

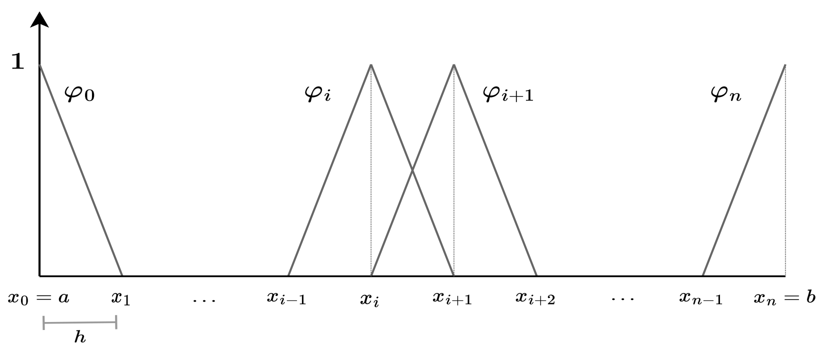

Figure 1: Funciones lineales a trozos φ_i ($i \in [\![0,n]\!]$) en el intervalo (a,b).

El problema (P1) restringido al espacio finito dimensional H_h se convierte en encontrar $\lambda \ge 0$ y $f_h \in H_h$ tales que

$$\lambda \int_a^b f_h(x) g_h(x) \mu(dx) = \int_a^b f'_h(x) g'_h(x) \mu(dx) \quad \text{para todo } g_h \in H_h. \tag{9}$$

Al escribir f_h como $f_h(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i}\varphi_i(x)$ y sustituir g por φ_j para cada $j \in [\![0, n]\!]$, (9) se reduce al problema algebraico

$$K_h \mathbf{f}_h = \lambda M_h \mathbf{f}_h, \tag{10}$$

donde $\mathbf{f}_h$ es el vector de entradas $(\mathbf{f}_h)_i = f_{n,i}$ y K_h, M_h son las matrices dadas por $(K_h)_{i,j} = \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\mu(dx)$ y $(M_h)_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\mu(dx)$.

La matriz M_h es simétrica y definida positiva (**Ejercicio 3.1** Verifíquelo), por lo que podemos escribirla como su descomposición de Cholesky $M_h = L_h L_h^\top$, donde L_h es una matriz triangular inferior. Luego, si notamos $\tilde{\mathbf{f}}_h = L_h^\top \mathbf{f}_h$ y $\tilde{K}_h = L_h^{-1} K_h (L_h^\top)^{-1}$, al multiplicar ambos lados de (10) por L_h^{-1} el problema se expresa como

$$\tilde{K}_h \tilde{\mathbf{f}}_h = \lambda \tilde{\mathbf{f}}_h.$$

Este es finalmente el problema de valores propios que se resuelve. La estimación de $C_P(\mu)$ está dada por el inverso del primer valor propio no nulo de $\tilde{K}_h$, y los coeficientes de la función propia $\mathbf{f}_h$ se recuperan a través de la relación $\mathbf{f}_h = (L_h^\top)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_h$.

Ejercicio 3.1 *Con la ayuda de la función*

$$\begin{aligned} \varphi\colon [-1, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \varphi(x) = 1 - |x|, \end{aligned}$$

escriba las entradas $(K_h)_{i,j}$ *y* $(M_h)_{i,j}$ *como integrales definidas en el intervalo* $(-1, 1)$.

Referencias

[1] O. Roustant, F. Barthe, and B. Iooss. Poincaré inequalities on intervals – application to sensitivity analysis. *Electronic Journal of Statistics*, 11(2):3081 – 3119, 2017.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.

[3] I. Gentil y M. Ledoux D. Bakry. *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer International Publishing, 2013.

[4] M. Chen. Analytic proof of dual variational formula for the first eigenvalue in dimension one. *Science in China Series A Mathematics*, 42:805–815, 08 1999.

[5] S. Bobkov y M. Ledoux. Poincaré's inequalities and talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution. *Probability Theory and Related Fields*, 107:383–400, 1997.