THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Diego CHAMORRO

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine : **Mathématiques**

Sujet de la thèse :

Inégalités de Gagliardo-Nirenberg Précisées sur le groupe de Heisenberg

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 6 janvier 2006 devant le jury composé de :

Mme. Aline Bonami	*Professeur, Université d'Orléans*	*Rapporteur*
M. Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset	*Professeur, Université d'Evry*	*Rapporteur*
M. Yves Meyer	*Professeur émérite, ENS de Cachan*	*Directeur de Thèse*
M. Jean-Michel Morel	*Professeur, ENS de Cachan*	*Président du Jury*

Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
ENS CACHAN / CNRS / UMR 8536
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Table des matières

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier les inégalités de Sobolev précisées sur les groupes de Lie stratifiés.

Rappelons que sur $\mathbb{R}^n$ les inégalités de Sobolev classiques nous donnent une majoration de la norme L^q d'une fonction par la norme L^p de son gradient :

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p, \tag{1}$$

ici les indices p et q sont reliés avec la dimension de l'espace euclidien n comme nous le verrons un peu plus tard.

La preuve originale de ces estimations, donnée par S. Sobolev en 1936, ne considérait pas le cas $p = 1$. En effet, lorsque le paramètre p vaut 1, une autre approche est nécessaire et nous devons la démonstration de ce cas à Gagliardo et Nirenberg. Nous verrons par la suite l'importance de cette remarque.

Cette estimation (1) n'est pas optimale, elle peut être précisée en introduisant un troisième terme de la façon suivante :

$$\|f\|_q \leq C\ \|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_*^{1-\theta} \qquad (0 < \theta < 1).$$

La norme $\|\cdot\|_*$ apparaîtra de façon assez naturelle lorsqu'on étudiera les propriétés d'invariance des inégalités précédentes par rapport à certaines transformations. On remarquera qu'ici les indices p, q et θ ne sont plus reliés à la dimension de l'espace de référence.

Le point de départ de toute cette théorie est ce que l'on appelle, les inégalités sur les dérivées successives. Voici un premier exemple :

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur la droite réelle, à valeurs réelles et si $f'(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$, alors on a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leq 2\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Pour la preuve de cette inégalité nous écrivons la formule de Taylor-Lagrange sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

où $0 < \theta < 1$. On règle x de façon que $f'(x) = \pm\|f'\|_\infty$ et l'on isole $f'(x)$. Il vient, pour tout $h > 0$
$$|f'(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty.$$
Il suffit alors de choisir $h = 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty^{-1}}$ pour conclure.

Notre travail a, plus précisément, pour point de départ les inégalités de Gagliardo-Nirenberg qui ont la même structure que les inégalités entre les dérivées successives. Donnons un exemple : si l'on sait majorer $\|f\|_2$ et $\|\Delta f\|_2$, on peut estimer $\|\nabla f\|_2$. On obtient alors l'inégalité
$$\|\nabla f\|_2^2 \leq C\|f\|_2\|\Delta f\|_2. \tag{3}$$
Afin de vérifier cette majoration, on utilise la transformation de Fourier. Nous avons ainsi, pour la norme L^2 du gradient de la fonction f, la formule :
$$\|\nabla f\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int |\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$
Ensuite, on obtient pour la norme du Laplacien l'identité suivante
$$\|\Delta f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int |\xi|^4|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$
Il reste à remarquer que
$$\int |\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |\xi|^2|\hat{f}(\xi)||\hat{f}(\xi)|d\xi \leq \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int |\xi|^4|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$
par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inegalité (3) est donc élémentaire car les trois régularités sont mesurées avec la même norme L^p. C'est aussi ce qui se passait pour les normes L^∞ intervenant dans les inégalités sur les dérivées successives (2).

Pour étudier en toute généralité ce type d'inégalités, nous distinguerons trois familles d'estimations en fonction de leur méthode de démonstration. Indiquons dès maintenant que cette distinction se fera en fonction de la valeur du paramètre p comme dans le cas des inégalités de Sobolev classiques (1).

(A) La première méthode donnée par Patrick Gérard, Yves Meyer et François Oru dans [40] est basée sur une décomposition de Littlewood-Paley et sur des résultats d'interpolation appliqués aux blocs dyadiques[1]. Elle étudie donc le cas $p > 1$ et fournit l'estimation qui suit :
$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{s_1,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{4}$$
où $1 < p < q < \infty$ et on a posé $\theta = p/q$, $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ avec $-\beta < s < s_1$.

[1] Une autre démonstration, basée sur les fonctions maximales, est dûe à Pierre Gilles Lemarié-Rieusset cf. Annexe C p. 161

(B) La deuxième approche, proposée plus récemment par Michel Ledoux dans [51], utilise des arguments qui font principalement appel aux propriétés de semi-groupe et en particulier à la *pseudo-inégalité de Poincaré* pour le noyau de la chaleur. Il nous est alors possible d'étudier le cas $p = 1$ pour obtenir un résultat du type suivant :

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{5}$$

avec $1 \leq p < q < \infty$, $\theta = p/q$ et $\beta = \theta/(1-\theta)$.

(C) Finalement, la troisième méthode est dûe à A. Cohen & al. [20] et fait intervenir l'espace des fonctions à variation bornée. Ici, l'argument qui permet de mener à bien les majorations recherchées est une minoration faible de la norme de l'espace BV en fonction des coefficients d'ondelettes indexés sur les cubes dyadiques. On obtient l'inégalité

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{BV}^{1/q}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-1/q}, \tag{6}$$

où nous avons posé $1 < q \leq 2$, $0 \leq s < 1/q$ et $\beta = (1-sq)/(q-1)$.

Nous allons diviser notre étude de ces trois familles d'inégalités sur les groupes de Lie stratifiés de la façon suivante :

Au premier chapitre, nous rappelerons les notions que nous allons utiliser tout au long de ce document, pour ensuite donner les démonstrations des deux premiers cas (**A**) et (**B**) dans le cadre euclidien.

Nous concentrerons ensuite notre attention aux groupes stratifiés dont le deuxième chapitre présente une courte introduction. Voici quelques arguments qui ont motivés notre choix :

Considérons tout d'abord les dilatations : il est très facile de vérifier que toutes les inégalités ci-dessus sont invariantes par dilatation. Toutefois, si nous fixons une dilatation anisotrope (par exemple $\delta_\alpha[x] = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha^2 x_3)$ pour $\alpha > 0$ sur $\mathbb{R}^3$) nous perdons cette propriété d'invariance. Ainsi, si l'on souhaite conserver une structure d'ensemble cohérente, le cadre naturel qui s'impose est celui des groupes de Lie stratifiés.

Notre deuxième motivation est d'ordre méthodologique : bien que l'on dispose d'une transformation de Fourier sur les groupes stratifiés, celle-ci ne présente pas les mêmes commodités d'usage que dans le cas euclidien. Dans ce cadre, il nous a paru intéressant de savoir jusqu'où il était possible d'avancer dans notre étude de ces inégalités sans son utilisation.

Finalement, nous pouvons prendre comme point de départ la voie proposée par E. Stein dans son livre [73]. Pour étudier la théorie de Littlewood-Paley cet auteur utilise la donnée d'un semi-groupe vérifiant certaines hypothèses que nous détaillerons ci-dessous.

Nous observerons que ce sont précisément ces hypothèses, ainsi que les estimations sur son noyau et la décomposition spectrale de son générateur infinitésimal, qui remplacerons l'usage de la transformation de Fourier.

Avec les préliminaires du deuxième chapitre, nous exposerons au troisième chapitre les démonstrations des deux premières familles d'inégalités sur les groupes de Lie stratifiés. On y présentera également une variante de la pseudo-inégalité de Poincaré qui nous permettra d'obtenir quelques résultats faibles : nous verrons alors apparaître la norme d'un espace de Sobolev dans la partie de gauche de l'inégalité (5).

Enfin, nous terminerons ce chapitre en considérant des inégalités faisant intervenir les poids de Muckenhoupt.

On consacrera le chapitre quatre à l'étude de l'espace des fonctions à variation bornée sur les groupes de Lie stratifiés. La raison est la suivante : les méthodes de M. Ledoux et d'A. Cohen admettent une intersection commune dans le cadre euclidien. Plus précisément, lorsque le paramètre s vaut zéro dans l'estimation (6) ; nous pouvons déduire, par un simple argument d'approximation, ces inégalités à partir du résultat donné dans (5). Dans le cas où $s > 0$, nous sommes en mesure de présenter une famille d'estimations faibles valables pour tous les groupes de Lie stratifiés, sans toutefois atteindre la puissance des résultats proposés dans $\mathbb{R}^n$ par la méthode (**C**).

Le cinquième chapitre est un retour à l'espace euclidien où nous traitons la dernière famille d'inégalités exposée dans (6). Dans une première partie, nous détaillerons rapidement le raisonnement utilisé pour obtenir l'estimation faible de la norme de l'espace BV en termes des coefficients d'ondelettes orthogonales à support compact.

On essayera par la suite d'exploiter l'intersection commune entre les deux méthodes (**B**) et (**C**). Nous verrons par des contre exemples que cette démarche ne nous permet pas d'obtenir les résultats recherchés.

Ces contre exemples nous pousseront donc à traiter, par la dernière approche, le cas particulier du groupe de Heisenberg où l'on dispose d'une base d'ondelettes à support compact. Nous verrons qu'alors c'est la géométrie des cubes dyadiques qui pose des difficultés pour l'application de cette méthode.

Le sixième chapitre expose un contre exemple à l'inégalité fondamentale suivante

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}},$$

lorsque le groupe de référence est l'anneau p-adique $\mathbb{Z}_2$. La construction de ce contre exemple se base sur l'équivalence surprenante entre l'espace des fonctions à variation bornée et l'espace de Besov d'indices $(1, \infty, 1)$.

Finalement, la dernière partie de cette thèse présente une généralisation des deux premières méthodes aux groupes de Lie à croissance polynômiale et aux groupes de Lie nilpotents. Nous verrons en particulier que, dans ces cadres où l'on ne dispose plus de structure de dilatation, ce sont les résultats concernant les estimations sur le noyau de la chaleur qui délimiterons la portée de notre travail. Bien évidemment dans ce cas la troisième approche ne s'applique plus.

Notations

Nous allons utiliser dans cette thèse de façon récurrente certaines propriétés générales du noyau de la chaleur qui sont valables sous certaines hypothèses très abstraites.

Il est possible, bien sûr, d'affiner et d'ajouter d'autres propriétés en fonction du cadre dans lequel on se place : $\mathbb{R}^n$, groupes de Lie stratifiés, nilpotents ou à croissance polynômiale. Nous exposons ici les principales caractéristiques valables pour tous les cas de figure que nous considérons.

Soit G un groupe de Lie non compact, connexe, et unimodulaire et soit $X = \{X_1, ..., X_k\}$ une famille de champs de vecteurs invariants à gauche satisfaisant la condition de Hörmander :

(P0) La famille X génère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G.

Cette hypothèse nous fournit un cadre de travail très commode. En effet, si nous définissons un sous-Laplacien par

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2,$$

la condition **(P0)** nous assure que cet opérateur est autoadjoint, symétrique et sous-elliptique. En particulier, il existe un semi-groupe associé $\{H_t\}_{t\geq 0}$ vérifiant les propriétés :

(P1) $H_{t+s} = H_t H_s \; t, s > 0$ et $H_0 = Id$ (axiome de semi-groupe)

(P2) $\|H_t f\|_p \leq \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ (propriété de contraction)

(P3) Chaque H_t est un opérateur auto adjoint sur $L^2(G)$ (propriété de symétrie)

(P4) $H_t f \geq 0$ si $f \geq 0$, $H_t 1 = 1$ (propriété de positivité)

tel que l'on ait la relation

$$H_t = e^{-t\Delta}$$

dans les deux sens suivants :

(a) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(H_t - Id)f}{t} = \Delta f$ pour toute fonction f suffisamment régulière.

(b) Si $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors $u(x,t) = H_t f(x) \in \mathcal{C}^\infty(G \times \mathbb{R}^+)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$(*) \qquad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u(x,t) = 0 & \text{pour} \quad x \in G \quad \text{et} \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour} \quad x \in G. \end{cases}$$

Ce semi-groupe H_t admet un noyau de convolution

$$u(x,t) = H_t f(x) = f * h_t(x) = \int_G f(y) h_t(y^{-1} \cdot x) dy \qquad (x \in G, t > 0).$$

Résumons les principales propriétés du noyau de la chaleur $h_t(x)$:

(P5) La fonction $(x,t) \longmapsto h_t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(G \times \mathbb{R}^+)$ et est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $(*)$.

(P6) La propriété de semi-groupe due à l'identité $e^{-t\Delta} e^{-s\Delta} = e^{-(t+s)\Delta}$:

$$h_t * h_s(x) = h_{t+s}(x) \quad (x \in G; t, s > 0)$$

(P7) La positivité $h_t(x) > 0$ pour $x \in G$ et

$$\int_G h_t(x) dx = 1.$$

Chapitre 1

Inégalités de Sobolev

1.1 Espaces fonctionnels

Nous donnons dans cette section les définitions, les notations et les principales propriétés des différents espaces dont nous aurons besoin.

De manière générale étant donné une norme $\| \cdot \|$, on définira l'espace correspondant par $\{f \in \mathcal{S}' : \|f\| < \infty\}$. Ceci suppose implicitement que $\|f\|$ a un sens. Par exemple, en écrivant $\int |f| dx$, on suppose que $|f|$ est mesurable ; en écrivant $f(x)$, on suppose que f est définie presque partout.

Les normes qui caractérisent ces espaces fonctionnels mesurent certaines propriétés des fonctions et elles admettent plusieurs définitions possibles qui correspondent aux différentes façons de quantifier une même information.

On s'intéressera particulièrement à quatre types d'espaces fonctionnels :

(a) Espaces de Lebesgue L^p

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ on notera $|E|$ sa mesure de Lebesgue. En notant dx la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ on définit, pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue par la norme

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

avec la modification d'usage si $p = \infty$:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{ess} |f(x)|.$$

Une façon intéressante d'obtenir la norme de ces espaces est d'utiliser la notion de dualité. Ainsi, si p' est l'exposant conjugué [1] de p, on a pour $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, g \, dx \right| \tag{1.1}$$

[1] Nous dirons que deux réels p et p' sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Nous introduisons maintenant pour f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, sa *fonction de distribution* en posant $d_f(\alpha) = |\{x : |f(x)| > \alpha\}|$, $\alpha \in]0, \infty[$.
Nous avons en particulier la caractérisation des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$ par la formule

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha. \tag{1.2}$$

Une remarque de grande importance par la suite mérite d'être faite : ces espaces sont *homogènes* puisque leurs normes vérifient, pour a un réel strictement positif, l'égalité $\|f(ax)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = a^{-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$; nous verrons très rapidement que ceci n'est pas toujours le cas pour d'autres espaces fonctionnels.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on écrira plus simplement $\|\cdot\|_p$ pour désigner la norme dans ces espaces.

(b) Espaces de Lorentz $L^{p,q}$

On définit d'abord les espaces L^p-*faible*, notés aussi $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que la quantité

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup\left\{\alpha\, d_f^{1/p}(\alpha)\ : \alpha > 0\right\} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{1.3}$$

soit finie. En outre, on posera $L^{\infty,\infty} = L^\infty$. Indiquons tout de suite que (1.3) ne définit pas une norme. Nous reviendrons sur cette remarque un peu plus tard.

Ces espaces contiennent les espaces de Lebesgue puisqu'on a la majoration

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

comme une conséquence directe de l'inégalité de Tchebytchev. Nous avons alors l'inclusion stricte[2] d'espaces $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1 Nous parlerons dorénavant, à cause de la définition et de l'estimation ci-dessus, d'un résultat *faible* lorsqu'une norme $L^{p,\infty}$ intervient.

Passons maintenant à l'étude des espaces $L^{p,q}$. Pour cela, nous définissons la *fonction de réarrangement décroissant* de f donnée par l'expression $f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$. Cette nouvelle fonction est décroissante, continue à droite, définie sur $]0, \infty[$ et vérifie la propriété d'équimesurabilité $d_f(\alpha) = d_{f^*}(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

On note alors, pour f une fonction mesurable sur $(\mathbb{R}^n, dx)$ et pour $1 \leq p, q \leq \infty$,

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

[2]En effet, si par exemple on considère $f(x) = |x|^{-n/p}$, on a bien $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ mais $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

L'ensemble des fonctions telles que cette quantité soit finie est appelé l'espace de Lorentz d'indices p et q.

On a en particulier $L^{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ par l'équimesurabilité de f^* et si $q = \infty$ cette définition coïncide avec celle des espaces L^p-*faible* donnée dans (1.3). Si $p = \infty$ et $1 \leq q < \infty$, ces espaces offrent peu d'intérêt car $L^{\infty,q} = \{0\}$.

Les espaces de Lorentz sont aussi homogènes puisque, pour tout $a > 0$, on a la même égalité $\|f(ax)\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = a^{-n/p}\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Remarquons finalement que l'expression définie par (1.4) ne vérifie pas l'inégalité triangulaire : la majoration $(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$ est fausse en général (voir [41] p. 50). L'espace correspondant n'est donc pas un espace de Banach (c'est cependant un espace métrique complet). En revanche, si $p \neq 1$, il est possible de munir ces espaces d'une vraie norme qui sera définie postérieurement dans (1.16).

(c) Espaces de Sobolev $W^{s,p}$

Ces espaces mesurent d'une façon quantitative la régularité des fonctions. Si s est un indice de régularité, le paramètre p nous indiquera la manière de la calculer en utilisant l'intégrabilité des dérivées prises au sens des distributions.

Un exemple très utilisé dans notre travail correspond au cas où $s = 1$ et $1 \leq p < \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est alors défini par :

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|\nabla f\|_p. \tag{1.5}$$

Plus généralement, lorsque s est un entier positif, on a la définition usuelle exprimée par la norme :

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|_p \quad (1 \leq p < \infty) \tag{1.6}$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On a posé $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} ... (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Pour les valeurs réelles de l'indice de régularité nous pouvons utiliser l'approche donnée par les espaces potentiels $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \|(I - \Delta)^{s/2} f\|_p \tag{1.7}$$

où $(I - \Delta)^{s/2}$ est le potentiel de Bessel avec $s \in \mathbb{R}$ (voir par exemple [74] ou [41]).

Nous avons alors, pour $1 < p < \infty$, l'égalité d'espaces $W^{s,p} = \mathcal{W}^{s,p}$. Rappelons néanmoins que dans les cas limites, lorsque $p = 1$ ou $p = \infty$, les espaces potentiels définis par la formule (1.7) ne correspondent plus à des espaces de Sobolev (cf. [74]).

(d) Espaces de Besov $B_p^{s,q}$

Indiquons très rapidement la signification de chacun de ces paramètres : l'indice p correspond à la norme de base qui est utilisée, le paramètre s donne la régularité demandée à la fonction, tandis que l'indice q exprime une correction sur cette régularité.

La première caractérisation que nous exposons utilise les différences itérées où on a désigné par m un entier positif et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh) \quad \text{avec} \qquad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Alors pour $s > 0$, on fixe m par la condition $m-1 \leq s < m$ et nous écrivons $f \in B_p^{s,q}$ (avec $1 \leq p, q \leq \infty$) si et seulement si la norme ci-dessous est finie :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \|f\|_p + \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_h^m f\|_p^q}{|h|^{n+sq}} dh\right]^{1/q}. \tag{1.8}$$

Une autre caractérisation est possible en utilisant le semi-groupe de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ qui sera dorénavant noté par H_t. Rappelons que l'action de ce semi-groupe est donnée par convolution avec un noyau h_t. Dans le cas euclidien ce noyau est connu explicitement et correspond à une gaussienne normalisée[3]. Nous avons ainsi pour $t > 0$ la formule :

$$H_t f(x) = f * h_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-|x-y|^2/4t} \frac{dy}{(4\pi t)^{n/2}} \tag{1.9}$$

Toujours dans le cas $s > 0$, on considère maintenant k un entier naturel tel que $k > s/2$. Nous dirons alors qu'une fonction f appartient à l'espace $B_p^{s,q}$ si, pour $1 \leq p, q \leq \infty$, la quantité suivante est bornée

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 t^{(k-s/2)q} \left\|\frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k}\right\|_p^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}. \tag{1.10}$$

Soit à présent $s = 0$. Alors $k = 1$ et on définit la norme :

$$\|f\|_{B_p^{0,q}} = \|H_1 f\|_p + \left[\int_0^1 t^q \left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_p^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}$$

Si nous voulons considérer le cas où l'exposant de régularité est négatif nous utilisons encore une fois le noyau de la chaleur. Pour éviter des confusions et pour insister sur le fait que cet exposant est négatif, on écrira systématiquement $B_p^{-s,q}$ avec s positif. On caractérise alors ces espaces pour $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ par la norme suivante :

$$\|f\|_{B_p^{-s,q}} = \|H_1 f\|_p + \left[\int_0^1 t^{sq/2} \|H_t f\|_p^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}. \tag{1.11}$$

[3]On a bien sûr les propriétés (P1)-(P7) exposées dans l'introduction pour ce semi-groupe et pour son noyau.

1.1.1 Analyse de Littlewood-Paley

L'analyse de Littlewood-Paley est une variante de l'analyse de Fourier qui ouvre la voie à l'analyse par ondelettes. L'analyse de Fourier permet de décomposer toute fonction en une combinaison linéaire d'ondes $e^{i\xi.x}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ces ondes ne sont pas localisées en variable d'espace. L'analyse par ondelettes va dans la direction opposée : les ondelettes sont excellement localisées en variables d'espace, mais assez mal localisées en variable de Fourier. L'analyse de Littlewood-Paley est à mi-chemin entre les deux.

Très grossièrement, l'analyse de Littlewood-Paley revient à utiliser un banc de filtres, en découpant les fréquences en octaves (qui deviendront les couronnes dyadiques). Les sorties de ces filtres sont les "blocs dyadiques" $\Delta_j(f)(x)$ de la fonction ou distribution $f(x)$. L'analyse par ondelette reviendra à procéder à une seconde décomposition, en sous-échantillonnant les $\Delta_j(f)(x)$ suivant la règle de Shannon. On obtient ainsi les coefficients d'ondelette $c_{j,k}$ de $f(x)$.

C'est parce qu'une seconde étape est nécessaire pour aboutir à une analyse par ondelettes qu'on peut dire que l'analyse de Littlewood-Paley est à mi-chemin entre l'analyse de Fourier et l'analyse par ondelettes.

Construction

Il existe plusieurs manières de présenter cette décomposition. Nous allons utiliser ici une partition de l'unité de l'espace des fréquences. Définissons une fois pour toutes la transformée de Fourier par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx.$$

On fixe ensuite une fonction $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact définie dans l'espace des fréquences telle que $\eta(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\eta = 0$ pour $|\xi| \geq 2$.

Nous considérons maintenant la fonction υ, déterminée par $\upsilon(\xi) = \eta(\xi/2) - \eta(\xi)$, ce qui nous permet d'obtenir les deux partitions de l'unité suivantes :

$$1 = \eta(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \upsilon(2^{-j}\xi), \qquad \text{pour tout } \xi, \tag{1.12}$$

et

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \upsilon(2^{-j}\xi), \qquad \text{pour} \quad \xi \neq 0. \tag{1.13}$$

Nous posons maintenant $\hat{\varphi}(\xi) = \eta(\xi)$ et $\hat{\psi}(\xi) = \upsilon(\xi)$. Nous remarquons en particulier que la fonction φ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ et que tous les moments de la fonction ψ sont nuls.

On définit à présent, pour $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\varphi_j(x) = 2^{nj}\varphi(2^j x)$. Il nous est alors possible d'associer à chaque fonction φ_j un opérateur S_j donné par convolution :

$$S_j(f) = f * \varphi_j. \tag{1.14}$$

Les blocs dyadiques seront définis par $\Delta_j(f) = S_{j+1}(f) - S_j(f)$ ou encore par convolution en posant $\Delta_j(f) = f * \psi_j$ avec $\psi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$.

L'analyse de Littlewood-Paley inhomogène est alors définie par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Pour toute distribution tempérée f on a l'identité :*

$$f = S_0(f) + \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j(f) \tag{1.15}$$

où la convergence du second membre a lieu au sens des distributions.

Nous vérifions cette égalité en considérant la somme finie :

$$A_k(f) = \sum_{j=0}^{k} \Delta_j(f) = -S_0(f) + S_k(f)$$

d'où $S_0(f) + A_k(f) = S_k(f)$ et on obtient $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(f) = \lim\limits_{k\to\infty} f * \varphi_k = f$, en utilisant librement l'analyse de Fourier et l'identité (1.12).

■

Nous avons obtenu la décomposition en blocs dyadiques annoncée. Observons que cette égalité ne dépend pas de la fonction de base η choisie. On verra par la suite l'utilité de (1.13), mais venons-en tout d'abord aux applications de ce premier découpage dyadique.

Normes Equivalentes

Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_*$ deux métriques définies sur un même espace fonctionnel ; nous dirons qu'elles sont *équivalentes* et nous les noterons $\|\cdot\| \simeq \|\cdot\|_*$ s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que, pour toute fonction f on ait :

$$C_1\|f\| \leq \|f\|_* \leq C_2\|f\|.$$

Par exemple, pour les espaces de Lorentz, on peut donner une caractérisation équivalente à (1.4) pour obtenir de véritables normes. Pour cela considérons dans un premier temps la fonction

$$f^{**}(t) = \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|dx = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds.$$

Nous définissons alors, pour $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, la fonctionnelle :

$$|||f|||_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}. \tag{1.16}$$

Cette formule vérifie l'inégalité triangulaire et détermine donc bien une norme (cf. [47]). De plus on a la double estimation :

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq |||f|||_{L^{p,q}} \leq C\|f\|_{L^{p,q}}.$$

Cependant, si $p = 1$ et $1 < q \leq \infty$ il n'est pas possible de munir ces espaces d'une norme équivalente à (1.4) qui satisfasse l'inégalité triangulaire. Le lecteur intéressé par des contres exemples et plus de détails est invité à lire [47] et [41].

Ceci étant, cette norme sera notée par la suite $\|\cdot\|_{p,q}$.

Passons maintenant aux normes équivalentes données avec une analyse de Littlewood-Paley. Nous avons :

- pour les espaces de Lebesgue ($1 < p < \infty$)

$$\|f\|_p \simeq \|S_0 f\|_p + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{1.17}$$

- pour les espaces de Sobolev ($s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$)

$$\|f\|_{W^{s,p}} \simeq \|S_0 f\|_p + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{1.18}$$

- pour les espaces de Besov ($s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$)

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} \simeq \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q} \tag{1.19}$$

Le lecteur appréciera l'utilité des blocs dyadiques qui donnent une grande unité aux formules précédentes. Il trouvera une démonstration de ces équivalences dans [57] et [80].

Rappelons que l'analyse précédente ne porte que sur les petites échelles (car $j \geq 0$). Elle dépend donc d'une échelle de coupure et l'on n'y distingue pas les échelles supérieures.

Remarque 1.2 Les espaces L^1 et L^∞ n'admettent pas de normes équivalentes du type précédent. En d'autres termes, l'appartenance d'une fonction à ces espaces n'est pas caractérisable par ses blocs dyadiques. Il en est de même pour les espaces construits sur eux comme par exemple $W^{1,1}$.

Espaces Homogènes

Dans l'étude qui nous intéresse, les espaces homogènes sont d'une grande importance lorsqu'il s'agit de vérifier l'invariance par rapport aux dilatations des inégalités de Sobolev. Nous commençons ce paragraphe par des notions générales, que nous illustrons par un exemple, pour ensuite donner les caractérisations de ces espaces fonctionnels.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et a un réel strictement positif. On fixe, une fois pour toutes, la notation $f_a(x) = f(ax)$, où $ax = (ax_1, ..., ax_n)$. Nous désignerons désormais f_a comme la *dilatée* de f.

Considérons un espace de Banach fonctionnel A, invariant par translations et dilatations et vérifiant la double inclusion

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset A \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

où les deux inclusions sont continues et d'image dense.

De manière très générale nous dirons qu'une norme $\| \cdot \|$ dans A est *homogène* (ainsi que l'espace fonctionnel associé) s'il existe un exposant réel σ tel que l'égalité suivante ait lieu pour tout f :

$$\|f_a\| = a^{-\sigma}\|f\|.$$

Comme nous l'avons déjà souligné, les normes des espaces de Lebesgue et de Lorentz vérifient cette égalité avec $\sigma = n/p$. En revanche, les espaces de Sobolev et de Besov de la section précédente ne sont pas homogènes puisqu'ils sont constitués d'une somme de termes d'homogénéité différente[4]. Il existe cependant des versions homogènes de ces espaces que l'on obtient en modifiant légèrement leurs normes, mais cette manipulation n'est pas sans conséquences comme nous allons le voir tout de suite.

Introduisons alors la notation suivante : si A est un espace de Banach fonctionnel non homogène, $\dot{A}$ désignera l'espace homogène correspondant. Nous précisons nos propos en étudiant un exemple concret.

Supposons $0 < s < 1$, on définit l'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions continues bornées f telles que $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^s$. La norme de $f \in \mathcal{C}^s$ est :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \|f\|_\infty + \sup_{|h|>0} \frac{\|f(x+h) - f(h)\|_\infty}{|h|^s}. \tag{1.20}$$

Cette norme n'est pas homogène, mais lorsqu'on calcule la norme de f_a dans $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ nous avons la propriété remarquable suivante :

$$\|f_a\|_{\mathcal{C}^s} = a^s|||f||| + O(1) \qquad \text{si} \quad a \longrightarrow +\infty.$$

Ici on a posé $|||f||| = \sup\limits_{|h|>0} \frac{\|f(x+h)-f(h)\|_\infty}{|h|^s}$; d'où l'idée de ne garder qu'un seul terme dans (1.20) et de l'utiliser pour caractériser l'espace homogène $\dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n)$. Par exemple on a $f(x) = |x|^s \in \dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n)$, mais $|x|^s \notin \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, tout simplement parce que $|x|^s$ n'est pas bornée.

[4]Si l'on calcule, par exemple, la norme de f_a dans l'espace de Besov $B^{s,q}_p$ avec (1.8) le premier terme libère un exposant $-n/p$ tandis que pour le deuxième on obtient un exposant $s - n/p$.

Cependant cette quantité n'est pas pour autant une norme puisque toute fonction constante g vérifie $|||g||| = 0$. Pour définir avec précision cet espace on pose :

$$\dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{modulo les constantes} \ / \quad |||f||| < \infty\}.$$

Considérons maintenant les espaces de Sobolev avec $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$.
Dans ce même esprit, on remarque que si f appartient au sous-espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions de la classe de Schwartz dont tous les moments sont nuls, alors l'expression $\|f_a\|_{W^{s,p}}$ est équivalente à $a^{s-n/p}\|(-\Delta)^{s/2} f\|_p$ lorsque a tend ver l'infini.

Ici $(-\Delta)^{s/2}$ sont les potentiels de Riesz (cf. [41], [74]) et, pour caractériser les espaces de Sobolev homogènes, nous ne conservons que la condition

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_p < +\infty \tag{1.21}$$

dans la définition (1.7). Il faut cependant prendre quelques précautions que nous détaillons dans les trois cas suivants (cf. [57]) :

1. Si $-n/p' < s < n/p$, l'espace de Sobolev homogène $\dot{W}^{s,p}$ sera le complété de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme (1.21) et cet espace complété abstrait est bien un espace de distributions tempérées.

2. Si $s \leq -n/p'$, nous avons un problème même si f est une fonction de test. On a $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = +\infty$ à moins que tous les moments de f d'ordre inférieur ou égal à $|s + n/p'|$ ne soient nuls. On part donc de l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ que l'on complète pour la norme (1.21). Ici encore $\dot{W}^{s,p}$ est un espace de distributions tempérées.

3. Si $\frac{n}{p} + k \leq s < \frac{n}{p} + k + 1$, où k est un entier, on définit l'espace de Sobolev homogène d'indices (s, p) comme un espace de distributions modulo l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k. Ce n'est donc plus un espace fonctionnel.

Observons finalement que si s est un entier positif nous avons la définition :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_p \quad (1 < p < \infty) \tag{1.22}$$

De même que dans le cas inhomogène, les normes (1.22) et (1.21) ne sont équivalentes que si $1 < p < \infty$ (cf. [74], [41]).

Pour les espaces de Besov nous allons surtout nous intéresser à leur définition *thermique*. Remarquons que les mêmes précautions en fonction de l'indice de dérivation sont nécessaires. Nous le prenons pour l'instant strictement positif.

On définit la norme suivante pour $1 \leq p, q \leq \infty$ et k un entier naturel tel que $k > s/2$:

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left[\int_0^\infty t^{(k-s/2)q} \left\| \frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k} \right\|_p^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \tag{1.23}$$

Supposons à présent que l'exposant de régularité soit négatif (qu'on notera $-s$). On procède alors de la manière suivante ($1 \leq p, q \leq \infty$) :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{-s,q}} = \left[\int_0^\infty t^{sq/2} \|H_t f\|_p^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}. \tag{1.24}$$

Finalement, et dans les deux cas précédents, nous avons l'égalité homogène :

$$\|f_a\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = a^{s-n/p}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$$

avec $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $a > 0$. Observons que l'espace $\dot{B}_p^{s,q}$ se comporte comme $\dot{W}^{s,p}$ du point de vue homogène. En d'autres termes, l'exposant q ne joue ici auncun rôle.

Dans la section 1.2.2 nous allons utiliser un espace de Besov très précis qui est déterminé par la norme :

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-s,\infty}} = \sup_{t>0} \; t^{s/2}\|H_t f\|_\infty \tag{1.25}$$

Il convient de faire quelques remarques sur cet espace. En effet, nous observons tout d'abord que, si $0 < s \leq n$, on dispose de l'inclusion suivante :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_\infty^{-s,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

Si maintenant $n < s$, on a bien $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ mais $\varphi \notin \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$. Cet espace contient alors des fonctions de test que si celles-ci possèdent suffisamment de moments nuls. On verra par la suite l'importance de ces deux remarques lorsqu'il s'agira de l'étude des inégalités de Sobolev précisées.

Analyse de Littlewood-Paley homogène

On souhaite maintenant traiter de la même façon les grandes et les petites échelles dans la décomposition en blocs dyadiques. Mais, à partir du moment où l'on introduit les grandes échelles, le comportement à l'infini de la fonction joue un rôle qu'il ne faut pas négliger comme nous allons le voir tout de suite.

En nous appuyant sur la formule (1.13), reprenons l'identité (1.15) mais en considérant cette fois-ci la somme sur tous les entiers (qu'ils soient positifs ou négatifs) :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(f) \tag{1.26}$$

Cette identité n'a pas toujours un sens et pose deux problèmes distincts.

D'une part l'égalité des deux membres n'est pas forcément assurée : prenons par exemple la fonction $f(x) = 1$, on obtient alors $\Delta_j(f) = 0$ pour tout j.

D'autre part, la somme ne converge pas nécessairement dans $\mathcal{S}'$: soit, par exemple, $f(x) = \log|x|$ de sorte que $\hat{f}(\xi) = c\,pf.\frac{1}{|\xi|^n}$. Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 près de l'origine, on a pour tout j négatif assez grand,

$$\langle \Delta_j f, \hat{g} \rangle = \int \frac{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)}{|\xi|^n} d\xi = \int \frac{\hat{\psi}(\xi)}{|\xi|^n} d\xi = Cte > 0.$$

Nous avons donc affaire à une divergence infra-rouge *i.e.* relative aux fréquences tendant vers 0.

Nous pouvons toutefois sauver la situation de deux façons différentes. Soit en imposant un certain comportement à l'infini (en demandant par exemple que la moyenne de la fonction prise sur des boules de plus en plus grandes tende vers 0).

Soit en se plaçant dans l'espace quotient $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_k$, où $\mathcal{P}_k$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k ; solution que nous adoptons dorénavant. On obtient alors les normes homogènes suivantes :

- pour les espaces de Lebesgue ($1 < p < \infty$)

$$\|f\|_p \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{1.27}$$

- pour les espaces de Sobolev ($s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$)

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{1.28}$$

- pour les espaces de Besov ($s \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ et $1 \le q \le \infty$)

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p} \simeq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q}. \tag{1.29}$$

Le lecteur trouvera les démonstrations des équivalences correspondantes dans [57], [79] et [34].

Il importe maintenant de réaliser de la façon la plus serrée possible $\dot{B}^{s,q}_p$ comme un espace de distributions.

Si $s < n/p$ on dispose de l'injection continue $\dot{B}^{s,q}_p \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\dot{B}^{s,q}_p$ si et seulement si les sommes partielles $\sum_{j=-m}^{m} \Delta_j(f)$ convergent vers f au sens des distributions et si la norme de cet espace donnée dans (1.29) est finie.

Si $s \ge n/p$, $\dot{B}^{s,q}_p$ n'est plus un espace fonctionnel puisque toute fonction constante est identifiée avec la fonction identiquement nulle. Ainsi, si $\frac{n}{p} + k \le s < \frac{n}{p} + k + 1$, où k est un entier, $\dot{B}_p^{s,q}$ est un espace de distributions modulo les polynômes de degré inférieur ou égal à k.

Pour finir, nous rassemblons dans la proposition qui suit les inclusions existantes entre les espaces fonctionnels que nous venons de présenter.

Proposition 1.1.1 *Considérons le cas des espaces de Sobolev et de Besov inhomogènes.*

(a) Pour $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$ on a

$$B_p^{s,q_1} \subset B_p^{s,q_2} \qquad \text{avec } 1 \leq p \leq \infty.$$

(b) Si $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ et si $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ alors

$$B_{p_1}^{s_1,q_1} \subset B_{p_2}^{s_2,q_2}$$

(c) On a aussi l'inclusion entre les espaces de Sobolev et les espaces de Besov pour $s > 0$ et $p \in]1, \infty[$:

$$B_p^{s,\min\{p,2\}} \subset W^{s,p} \subset B_p^{s,\max\{p,2\}}$$

(d) et celle entre les espaces de Lebesgue et les espaces de Besov avec $p \in]1, \infty[$:

$$L^p \subset B_p^{0,\infty}$$

Ces résultats restent valables pour les espaces homogènes (cf. [9]).

1.1.2 Ondelettes

Les ondelettes peuvent êtres introduites de plusieurs façons possibles dans le cadre de $\mathbb{R}^n$ et nombreux sont les traités et les livres qui en présentent une théorie complète. Nous nous bornerons à un exposé très succint qui nous permettra de mieux comprendre certains des aspects qui seront traités plus tard.

Nous étudions en premier lieu un exemple avant de passer à la théorie générale.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbb{1}_E$ la fonction indicatrice d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$. On désigne la fonction de Haar par $h = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}$ et on obtient la famille*

$$h_{j,k}(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k) \qquad \text{avec} \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

par translations entières et dilatations dyadiques.

Alors $\{h_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k} h_{j,k}(x). \tag{1.30}$$

où l'on a noté $c_{j,k} = \langle f, h_{j,k} \rangle$.

Cette famille $(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ présente un intérêt certain : c'est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ d'une très grande simplicité. En outre, si $1 < p < \infty$, cette égalité fonctionne encore pour les espaces $L^p(\mathbb{R})$. Plus précisément, on a $f \in L^p$ si et seulement si

$$\left(\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2 |h_{j,k}|^2\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}).$$

On comparera ce résultat avec celui que l'on obtiendrait à l'aide de l'analyse de Littlewood-Paley.

Pour passer à des dimensions supérieures nous pouvons utiliser le produit tensoriel. Nous notons alors

$$h^0 = \mathbb{1}_{[0,1[} \quad \text{et} \quad h^1 = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}.$$

Puis on réalise le produit suivant pour faire intervenir toutes les coordonnées :

$$h^\varepsilon(x) = h^{\varepsilon_1}(x_1)\cdots h^{\varepsilon_n}(x_n) \tag{1.31}$$

où $\varepsilon \in V = \{0,1\}^n \setminus \{0,...,0\}$ et $x = (x_1,...,x_n)$.

Le système de Haar dans $\mathbb{R}^n$ sera alors donné par l'ensemble de fonctions :

$$\left\{h^\varepsilon_{j,k}(x) = 2^{nj/2} h^\varepsilon(2^j x - k) \quad / \, \varepsilon \in V, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\right\}. \tag{1.32}$$

Pour la construction d'ondelettes de façon plus générale il est nécessaire d'introduire le concept d'analyse multirésolution.

Définition 1.1.2 *Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une suite croissante $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ *et* $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *est dense dans* L^2.
2. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, *on a :* $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$.
3. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, *on a :* $f(x) \in V_0 \iff f(x-k) \in V_0$.
4. *Il existe une fonction $\varphi \in V_0$ telle que la suite $\varphi(x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}^n$) soit une base de Riesz de V_0.*

Nous dirons en plus que l'analyse multirésolution est r-régulière si la fonction φ vérifie l'estimation

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ tel que $|\alpha| \leq r$.

Cette notion que nous venons de définir nous permet de présenter un résultat général d'existence des bases d'ondelettes. Soit alors une analyse multirésolution r-régulière et désignons par W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Nous disposons du théorème suivant (cf. [57]) :

Théorème 1.1.1 *Il existe $q = 2^n - 1$ fonctions $\psi^1, ..., \psi^q \in V_1$ telles que :*

- $|\partial^\alpha \psi^\varepsilon(x)| \leq C_N(1+|x|)^{-N}$ *pour tout* $N \geq 1$, $|\alpha| \leq r$ *et* $1 \leq \varepsilon \leq q$.
- $\psi^\varepsilon(x-k)$, *avec* $k \in \mathbb{Z}^n$, *forment une base orthonormée de* W_0.
- $\int x^\alpha \psi^\varepsilon(x)dx = 0$ *pour* $|\alpha| < r$.

On a posé $\psi^\varepsilon_{j,k}(x) = 2^{nj/2}\psi^\varepsilon(2^j x - k)$ *avec* $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ *et* $1 \leq \varepsilon \leq q$.

Alors les fonctions $(\psi^\varepsilon_{j,k})_{\substack{1\leq\varepsilon\leq q \\ (j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n}}$ *forment une base orthonormée de* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La première propriété explique la localisation des fonctions ψ^ε ainsi que celle de leurs dérivées jusqu'à l'ordre r. Le deuxième point exprime l'orthogonalité de ces fonctions tandis que le troisième (qui est en fait une conséquence des deux autres) nous donne une information sur les oscillations de ces fonctions.

Insistons maintenant sur la caractéristique essentielle de ces fonctions : les ondelettes $\psi^\varepsilon_{j,k}$ permettent non seulement de traiter l'espace de référence L^2 mais elles restent tout aussi efficaces pour étudier des espaces fonctionnels comme L^p (pour $1 < p < \infty$), $W^{s,p}$, les espaces de Besov et bien d'autres (à condition d'avoir $|s| < r$).

C'est précisément ce que nous allons faire dans les lignes ci-dessous en présentant des normes équivalentes, mais nous nous limiterons pour plus de simplicité aux espaces homogènes. Le lecteur peut trouver un exposé complet des caractérisations par ondelettes des espaces non-homogènes dans [57].

Les fonctions de ces espaces (qui peuvent être des distributions tempérées dans certains cas) s'écrivent alors comme :

$$f(x) = \sum_\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c^\varepsilon_{j,k}\psi^\varepsilon_{j,k}(x). \tag{1.33}$$

où les coefficients d'ondelettes sont déterminés par $c^\varepsilon_{j,k} = \langle f, \psi^\varepsilon_{j,k}\rangle$.

Dans ce qui suit nous allons utiliser une analyse multirésolution de régularité r et on supposera que l'on a $|s| < r$. Ces espaces étant homogènes, les mêmes précautions dans leur définition que nous avons évoqué antérieurement sont de rigueur. On considérera finalement que la sommation sur ε est implicite dans chacune des expressions suivantes.

Nous obtenons les normes équivalentes :

- Espaces de Lebesgue ($1 < p < \infty$)

$$\|f\|_p \simeq \left\| \left(\sum_{j,k} |c_{j,k}|^2 |\psi_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

- Espaces de Sobolev $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \simeq \left\| \left(\sum_{j,k} 2^{2js} |c_{j,k}|^2 |\psi_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

- Espaces de Besov $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p} \simeq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jq(s+n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}))} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

1.2 Inégalités de Sobolev précisées

Cette section sera en partie consacrée aux propriétés d'invariance des inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg ; que ce soit par rapport aux translations, aux dilatations, ou encore par rapport à l'action du groupe de Weyl-Heisenberg que nous définissons plus loin. Nous traiterons ensuite une généralisation de ces résultats et nous ferons une comparaison qualitative des différentes inégalités proposées.

Maintenant que nous disposons de tous les éléments nécessaires, nous reviendrons aussi à la norme $\|\cdot\|_*$ dont il a été question dans l'introduction p. 3 et nous verrons comment et dans quel sens on améliore ce type d'inégalités.

Inégalités de Sobolev classiques

Nous rappelons les injections de Sobolev dans le théorème suivant en explicitant cette fois-ci la relation entre les indices et la dimension :

Théorème 1.2.1 *(Inégalités de Sobolev)*
Soit $f \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $1 < p < +\infty$ tel que $0 < sp < n$ nous avons alors l'estimation suivante avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$:

$$\|f\|_q \leq C\|(-\Delta)^{s/2} f\|_p. \tag{1.34}$$

Dans le cas où $s = p = 1$ et $q = \frac{n}{n-1}$ nous avons la majoration :

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_1.$$

Indiquons rapidement une preuve de ce théorème.

On note $f_s = (-\Delta)^{s/2} f$ de sorte que l'on a $f = (-\Delta)^{-s/2} f_s$. Il s'agit maintenant d'estimer la norme L^q dans l'identité précédente.

La démonstration repose alors sur le fait que l'opérateur $(-\Delta)^{-s/2}$ admet une solution fondamentale, donnée explicitement par $k_s(x) = c\,|x|^{-n+s}$ pour $0 < sp < n$ où $c = c(n, s)$.

Cette fonction appartient à l'espace $L^{r,\infty}$ où $r = \frac{n}{n-s}$. Il suffit de remarquer que la convolution avec une fonction $L^{r,\infty}$ envoie L^p dans $L^{q,\infty}$ si $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$ et $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, pour ensuite appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Observons que le résultat est faux si $p = 1$ et que dans ce cas on obtient l'inégalité faible suivante :

$$\|f\|_{q,\infty} \leq C\|(-\Delta)^{s/2} f\|_1.$$

Indiquons que cette estimation est optimale si q est défini par $1 - 1/q = s/n$. On le voit en prenant pour f la solution fondamentale $c\,|x|^{-n+s}$. Nous obtenons alors $(-\Delta)^{s/2} f = \delta_0$ dont la masse totale est finie.

Nous pouvons toutefois sauver la situation où $s = p = 1$ avec l'inégalité

$$\|f\|_q \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial}{\partial x_j} f\right\|_1\right)^{1/n}, \quad 1/q = 1 - 1/n, \qquad f \in \mathcal{C}_0^\infty;$$

ce qui nous conduit à la majoration recherchée (cf. [74]).

■

Il est très important de remarquer que l'étude de l'homogénéité de ces estimations explique et fixe le lien entre les exposants. Par commodité, nous allons nous occuper principalement de l'inégalité suivante pour $1 < p < \infty$:

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p \qquad 1/q = 1/p - 1/n. \tag{1.35}$$

En effet, si nous remplaçons la fonction $f(x)$ par sa dilatée $f_a(x) = f(ax)$ avec $a > 0$, dans l'inégalité ci-dessus, un calcul direct nous donne les deux expressions suivantes :

$$\|f_a\|_q = a^{-n/q}\|f\|_q \quad \text{et} \quad \|\nabla f_a\|_p = a^{1-n/p}\|\nabla f\|_p.$$

Nous obtenons ainsi la majoration $\|f\|_q \leq C\, a^{n/q+1-n/p}\|\nabla f\|_p$. Il faut alors que la relation entre les indices p, q, n exprimée dans les hypothèses ait lieu pour ne pas tomber sur une absurdité quand $a \to 0$ ou quand $a \to +\infty$.

Occupons-nous à présent de la translation $f_\tau(x) = f(x + \tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}^n$. Un calcul élémentaire nous indique que l'inégalité (1.35) est invariante par translation, tout simplement parce que l'on a $\|f_\tau\|_q = \|f\|_q$ et $\|\nabla f_\tau\|_p = \|\nabla f\|_p$.

Dans sa thèse F. Oru s'est intéressé aux propriétés d'invariance par translation et dilatation ainsi que de la stabilité asymptotique sous l'action du groupe de Weyl-Heisenberg de ces inégalités. De cette étude sont apparues de nouvelles estimations qui améliorent sensiblement le résultat de ce théorème. Nous venons de vérifer les deux premières, mais qu'en est-il de la dernière ?

Rappelons que le groupe de Weyl-Heisenberg est donné par $WH = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi]$ et que son action sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\mathcal{U}_{(y,\omega,t)} f(x) = e^{i(\omega.(x-y)+t)} f(x-y) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.36}$$

Si on pose $f_\omega(x) = e^{i\omega.x}\varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{\varphi}$ est à support compact, nous avons du côté de la norme L^q la formule $\|f_\omega\|_q \simeq \|\varphi\|_q$; tandis que de l'autre côté on obtient $\|\nabla f\|_p = |\omega| \, \|\varphi\|_p + O(1)$.

L'asymptotique de la norme L^p du gradient de f se comporte comme la norme L^p de la fonction φ multipliée par le module de $|\omega|$:

$$\|\nabla f\|_p \sim |\omega| \, \|\varphi\|_p \qquad \text{si} \quad |\omega| \to \infty.$$

Si la norme L^q est aveugle à cette modulation, la norme L^p du gradient fait apparaître le terme $|\omega|$ dans la partie de droite de l'inégalité (1.35), ce qui brise complètement l'équilibre sous l'action de ce groupe :

$$\|\varphi\|_q \leq C|\omega| \|\varphi\|_p.$$

Nous verrons par la suite comment résoudre ce problème. Passons maintenant à un autre type d'estimations.

Inégalités de Gagliardo-Nirenberg

Ces inégalités ressemblent beaucoup aux précédentes, mais elles font intervenir un troisième terme. Nous traitons d'abord un cas simplifié donné par le

Théorème 1.2.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et soient $1 \leq p < \infty$ et $p\,(1+\frac{1}{n}) \leq q$. On fixe r par la condition :*

$$r = n(q/p - 1). \tag{1.37}$$

Alors, si $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on a l'inégalité :

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p^{p/q} \|f\|_r^{1-(p/q)} \tag{1.38}$$

Nous donnerons dans la section suivante une preuve plus générale de ce résultat, mais le lecteur peut consulter [62] pour une démonstration.

La condition (1.37) entre les indices est ici aussi dictée par le critère d'homogénéité. Nous laissons le soin au lecteur de vérifer par lui-même que si r est fixé de la sorte, alors l'inégalité (1.38) est invariante par dilatation.

En revanche, le fait que la variable q soit minorée par l'expression $p\,(1+\frac{1}{n})$ est éclairé par le fait suivant :

Si l'on veut que L^r soit un espace de Banach, il est indispensable d'avoir $r \geq 1$. Maintenant, compte tenu de l'égalité (1.37), la condition $r \geq 1$ équivaut à $p\,(1+\frac{1}{n}) \leq q$.

Revenons à l'étude de l'invariance de ces estimations avec la translation f_τ, toujours définie par $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}^n$. Les mêmes considérations évoquées dans le paragraphe précédent sont valables et nous obtenons ainsi l'invariance des inégalités (1.38) par rapport aux translations.

Voyons à présent ce qui se passe avec l'action du groupe de Weyl-Heisenberg.
On a déjà vu que les espaces de Lebesgue ignoraient cette action. Compte tenu des normes qui interviennent dans le Théorème 1.2.2, on tombe sur le même problème rencontré avec les inégalités de Sobolev classiques : la norme du gradient *libère* un coefficient $|\omega|$ qui n'est présent que dans la partie de droite de l'inégalité. On constate alors la perte de l'invariance par rapport à l'action de ce groupe.

Ainsi, ni les inégalités de Sobolev ni celles de Gagliardo-Nirenberg sont invariantes par l'action du groupe de Weyl-Heisenberg.

Avant de passer au paragraphe suivant, où l'on donne une description des inégalités qui sont triplement invariantes, quelques remarques sont nécessaires lorsqu'on compare les inégalités de Sobolev à celles de Gagliardo-Nirenberg.

Observons premièrement que les inégalités de Sobolev classiques sont *très rigides* par rapport au choix des indices p et q : le résultat est bien sûr faux dès que $q \neq \frac{np}{n-p}$. En effet, supposons par exemple que $q < \frac{np}{n-p}$ et considérons une fonction f suffisamment régulière dont le comportement à l'infini soit donné par $|x|^{-\alpha}$. Pour que l'on ait $\nabla f \in L^p$ il faut que $(\alpha+1)p > n$ tandis que si l'on veut que $f \in L^q$ il vient $\alpha q > n$. Il est alors possible de choisir α tel que l'on ait $\nabla f \in L^p$ et $f \notin L^q$.

Nous remarquons aussi que les inégalités de Gagliardo-Nirenberg sont plus générales au sens où si l'on considère $q = \frac{np}{n-p}$ et que l'on remplace cette valeur dans la condition (1.37), on obtient $r = q$ et cela redonne le théorème de Sobolev usuel. Elles sont aussi beaucoup moins rigides par rapport à q et p en permettant une gamme plus large de valeurs possibles pour ces indices (mais par contre q ne doit pas être trop près de p).

Cependant ce dernier théorème est différent. Il a besoin de deux conditions complémentaires et cette complémentarité s'énonce parfois de façon surprenante. En effet, si l'on considère $q > \frac{np}{n-p}$, compte tenu des hypothèses du Théorème 1.2.2, nous avons que $r > q$. On impose alors une condition *localement* plus forte puisqu'on a l'inclusion $L^r_{loc} \subset L^q_{loc}$. En revanche, si on a $q < \frac{np}{n-p}$, c'est le comportement à l'infini de la fonction f qui est modifié avec cette nouvelle contrainte.

Le cas général des inégalités de Gagliardo-Nirenberg est donné par la théorème qui suit :

Théorème 1.2.3 *Si* $1 \leq p, q, r < \infty$, $0 \leq j \leq m$, $\frac{j}{m} \leq \sigma \leq 1$ *et*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \sigma\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\sigma)\frac{1}{q},$$

alors on a l'estimation

$$\|D^j f\|_p \leq C\|D^m f\|_r^{\sigma}\|f\|_q^{1-\sigma} \tag{1.39}$$

où $\|D^k f\|_p = \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_p$.

Si les trois normes ont la même homogénéité, c'est-à-dire si $1/p - j/n = 1/r - m/n = 1/q$, alors (1.39) est une amélioration des inégalités de Sobolev : elle implique le théorème de Sobolev classique 1.2.1 et elle est invariante par translation, dilatation et asymptotiquement invariante par le groupe de Weyl-Heisenberg.

Inégalités précisées

Nous présentons ici les inégalités qui tiennent compte de cette triple invariance et qui, comme nous le verrons plus loin, sont plus précises que les estimations de Gagliardo-Nirenberg.

Théorème 1.2.4 *(Inégalités de Sobolev précisées)*
Pour tout $1 \leq p < q < \infty$ *et pour toute fonction* f *telle que* $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et telle que* $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *on a :*

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{1.40}$$

où $\theta = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{\theta}{1-\theta}$ *et* C *est une constante qui dépend de* p, q *et* n.

Avant de passer à la vérification des propriétés d'invariance de ce type d'inégalités, il nous a semblé utile de faire quelques remarques sur la portée de ce résultat.

Tout d'abord, nous observerons que le théorème que nous avons exposé ici est relativement facile si $1 < p < \infty$ et très difficile si $p = 1$. Ce dernier cas sera traité en détail dans la section 1.2.1.

Quant au premier cas, lorsque $1 < p < \infty$, on montrera que ce théorème se ramène à une estimation *ponctuelle* sur les fonctions de Littlewood-Paley.

Nous allons pour cela utiliser le résultat général suivant :

Lemme 1.2.1 *Soit* $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *une suite et soit* $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et* $s \neq s_1$. *Alors pour tout* $r, r_1, r_2 \in [1, +\infty]$ *on a l'estimation*

$$\|2^{js}a_j\|_{\ell^r} \leq C\|2^{js_1}a_j\|_{\ell^{r_1}}^{\theta}\|2^{js_2}a_j\|_{\ell^{r_2}}^{1-\theta}. \tag{1.41}$$

Voir [9] pour une preuve.

Nous appliquons ce lemme aux blocs dyadiques $\Delta_j(f)$ avec $s = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = -\beta$ et $r = r_1 = 2$ et $r_2 = \infty$. Il vient alors :

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)(x)|^2\right)^{1/2} \leq C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j}|\Delta_j(f)(x)|^2\right)^{\theta/2}\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\beta j}|\Delta_j(f)(x)|\right)^{(1-\theta)} \tag{1.42}$$

Ici la constante C ne dépend bien évidemment pas du point x. L'objectif est donc de reconstruire les normes données par une décomposition de Littlewood-Paley dans (1.28) et (1.29) grâce à l'inégalité ci-dessus.

On déduit notre résultat en calculant la norme L^q de cette expression et en utilisant l'inégalité de Hölder (rappelons que $\theta = p/q$) :

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \leq C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j}|\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^{\theta} \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\beta j}\|\Delta_j(f)\|_\infty \right)^{(1-\theta)}$$

Ces quantités correspondent bien aux normes des espaces de Lebesgue L^q, de Sobolev $\dot{W}^{1,p}$ et de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$.

■

Toujours dans cette approche qui utilise les blocs dyadiques, on observe que si $p \neq 1$ le gradient peut être remplacé par une puissance positive de l'opérateur de Calderón $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$. Le résultat est le suivant :

Théorème 1.2.5 *Pour tout $1 < p < q < \infty$ et pour toute fonction f telle que $f \in \dot{W}^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$ et telle que $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ on a :*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s_1,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{1.43}$$

où $\theta = \frac{p}{q}$, $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ avec $\beta > 0$ et $-\beta < s < s_1$.

La démonstration de (1.43) est identique à celle du théorème précédent : il suffit d'adapter la preuve ci-dessus, dans la partie de gauche de (1.42), afin d'obtenir la norme de l'espace de Sobolev $\dot{W}^{s,q}$ au lieu de celle de l'espace de Lebesgue L^q.

Pour que (1.43) subsiste si $p = 1$, il convient de définir avec soin l'espace de Sobolev $\dot{W}^{s_1,1}$. Il y a plusieurs voies.

Remarquons tout d'abord que le choix $\Lambda f \in L^1$ ne correspond pas à un espace de Sobolev et on peut montrer, par exemple, que l'inégalité

$$\|f\|_2^2 \leq C\|\Lambda f\|_1\|f\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}}$$

est fausse. En effet, si on se place en dimension $n = 2$ et on considère la fonction $f = \frac{1}{r}$ avec $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, nous observons que $\Lambda(\frac{1}{r}) = \delta_0$ et donc sa masse totale est bornée. Nous avons aussi que $\Lambda(\log(r)) = \frac{1}{r}$ et, puisque $\log(r) \in \dot{B}^{0,\infty}_{\infty}$, on a $f \in \dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}$. Mais nous savons que $f \notin L^2$: le produit des deux normes ne contrôle pas la norme L^2.

La première et la plus facile des possibilités est d'écrire $f \in \dot{W}^{s_1,1}$ si et seulement si $(\sum 2^{2js_1}|\Delta_j f|^2)^{1/2} \in L^1$ ou, ce qui est équivalent, $\Lambda^{s_1} f \in \mathcal{H}^1$, l'espace de Stein et Weiss.

Alors (1.43) reste vrai, avec la même démonstration.

Si maintenant s_1 est un entier, on écrit naturellement $f \in \dot{W}^{s_1,1}$ si et seulement si $\partial^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| = m$. Le résultat reste vrai si $m = 1$ comme nous le verrons par la suite.

Revenons maintenant aux inégalités (1.40). Plusieurs aspects attirent notre attention dans ces nouvelles estimations que nous allons traiter dans quatre remarques :

(A) Vérifions premièrement les propriétés d'invariance de ces inégalités.

Tout d'abord, voyons ce qui se passe avec les dilatations et les translations. Nous allons considérer ces deux transformations en notant $f_{\tilde{a}}(x) = f(ax + \tau)$, avec $\tau \in \mathbb{R}^n$ et $a > 0$. On obtient alors $\|f_{\tilde{a}}\|_q = a^{-n/q}\|f\|_q$ pour la partie de gauche de (1.40).

Puis $\|\nabla f_{\tilde{a}}\|_p^\theta = a^{\theta(1-n/p)}\|\nabla f\|_p^\theta$ pour la norme du gradient et, finalement, pour la norme de l'espace de Besov $\|f_{\tilde{a}}\|_{-\beta}^{1-\theta} = a^{-\theta}\|f\|_{-\beta}^{1-\theta}$.

On retrouve alors la relation $-\frac{n}{q} = \theta(1 - \frac{n}{p}) - \theta$ qui n'est vraie que si $\theta = \frac{p}{q}$.

Le cas $p = q$ est bien sûr exclu car dans ce cas c'est la norme de l'espace Besov $\dot{B}_\infty^{\infty,\infty}$ qui disparaît (on a $1 - \theta = 0$).

Le choix de l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ n'est pas fortuit. Il est justifié par le théorème suivant :

Théorème 1.2.6 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach tel que $X \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|f(\cdot + y)\|_X = \|f\|_X \quad et \quad \forall a > 0 \quad \|f(a\cdot)\|_X = a^{-\beta}\|f\|_X$$

Alors $X \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$.

En effet, comme $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ est un espace d'indice négatif, il est facile de voir qu'une norme équivalente sur cet espace est donnée par

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\beta j}\|S_j f\|_\infty.$$

Il suffit donc de montrer que pour f appartenant à X et tout j dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\|S_j f\|_\infty \leq C 2^{\beta j}\|f\|_X.$$

Or $\quad S_j(x) = \langle 2^{nj}\varphi(2^j(x - \cdot)); f(\cdot)\rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} = \langle\check{\varphi}; f(2^{-j}(x + \cdot))\rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Etant donné que $X \hookrightarrow \mathcal{S}'$, la fonction $\check{\varphi}$, qui est dans la classe de Schwartz, appartient à X', le dual de X. On a donc :

$$|S_j f(x)| = \left|\langle\check{\varphi}, f(2^{-j}(x + \cdot))\rangle_{X,X'}\right| \leq \|\check{\varphi}\|_{X'}\|f(2^{-j}(x + \cdot)\|_X = 2^{\beta j}\|\check{\varphi}\|_{X'}\|f\|_X.$$

■

Compte tenu des conditions requises par l'homogénéité, $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ est l'espace maximal rendant vraie l'inégalité de Sobolev précisée qui est donc optimale.

On étudie maintenant la stabilité dans l'asymptotique donnée par l'action du groupe de Weyl-Heisenberg.

Soit encore une fois $f_\omega(x) = e^{i\omega.x}\varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{\varphi}$ est à support compact.

La norme L^q reste toujours insensible à cette transformation tandis que la norme du gradient devient $\|\nabla f_\omega\|_p^\theta \sim |\omega|^\theta \, \|\varphi\|_p^\theta$ quand $|\omega| \to \infty$.

C'est ici qu'intervient le troisième terme des inégalités précisées (1.43). En effet, par le choix de φ, si $|\omega| > R$ alors $e^{i\omega.x}\varphi(x)$ appartient à l'espace de Besov homogène $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ et sa norme dans cet espace a pour asymptotique $|\omega|^{-\beta}\|\varphi\|_\infty$:

$$\|f_\omega\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \sim |\omega|^{-\theta}\|\varphi\|_\infty^{1-\theta} \text{ quand } |\omega| \to \infty \qquad (-\beta = \theta/(\theta-1))\,.$$

Ainsi, le terme $|\omega|$ qui provenait de la norme du gradient est *absorbé* par la norme de l'espace de Besov. Ces inégalités sont donc bien invariantes par l'action du groupe de Weyl-Heisenberg au sens que nous avons indiqué ci-dessus.

Nous obtenons alors la triple invariance annoncée. Ces estimations sont donc plus **stables** par rapport aux trois transformations que nous avons étudiées.

(B) Mais pouvons-nous récupérer les inégalités classiques (1.35) ? En quel sens les inégalités (1.40) sont-elles une amélioration des injections de Sobolev ? Notre deuxième remarque propose une réponse à ces questions.

Nous pouvons bien sûr obtenir les inégalités classiques (1.35) à partir de (1.40) en écrivant :

$$\|f\|_q \leq C\,\Gamma \|\nabla f\|_p,$$

où le terme Γ est donné par le quotient des normes suivantes :

$$\Gamma = \left(\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} / \|\nabla f\|_p\right)^{1-\theta}.$$

Et ce terme est en général très petit lorsque les indices sont liés par la condition de Sobolev : si l'on considère par exemple une fonction modulée on obtient $\Gamma \sim |\omega|^{-1}$.

Pour récupérer les inégalités de Gagliardo-Nirenberg à partir du théorème 1.2.4 nous pouvons voir si l'on dispose d'une quelconque inclusion entre les espaces L^r et l'espace de Besov $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ lorsque r est fixé par la condition (1.37). Observons que q ne peut pas être trop près de p : il faut que l'on ait la condition $p(1 + 1/n) \leq q$.

Dans ce cas, si l'on prend dans (1.43) $s = 0$ et $s_1 = 1$, alors $\beta = \frac{p}{q-p} = \frac{n}{r}$ et, en utilisant la proposition 1.1.1-d) puis 1.1.1-b), nous avons la suite d'inclusions

$$L^r \subset \dot{B}_r^{0,\infty} \subset \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$$

ce qui se traduit en terme des normes par :

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}} \leq C\,\|f\|_{\dot{B}_r^{0,\infty}} \leq C'\|f\|_r$$

Il est possible alors de récupérer les inégalités de Gagliardo-Nirenberg puisque la norme de l'espace L^r est plus grande que celle de l'espace de Besov.

Ainsi, ce résultat est plus **précis** que les inégalités classiques lorsque tous les paramètres sont liés entre eux par la condition de Sobolev.

(C) Notre troisième remarque porte sur la grande liberté dans le choix des exposants. Seule la condition $p < q$ est demandée, que l'on compare bien sûr avec les liens plus compliqués existant entre les indices dans les inégalités précédentes (1.35) et (1.38). Ce résultat est alors bien plus **général** du point de vue des indices.

Observons que les inégalités de Gagliardo-Nirenberg nous permettaient de traiter le cas où $p(1+1/n) \leq q$. Maintenant nous pouvons également étudier la situation suivante $p < q < p(1+1/n)$ qui est équivalente au cas $n < \beta$.

Rappelons que dans ce cas, l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ ne contient des fonctions test que si celles-ci possèdent suffisamment de moments nuls. En effet, si $\beta > n$, alors les conditions $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\int \varphi \neq 0$ impliquent $\|\varphi\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}} = +\infty$ et donc le résultat n'a aucun intérêt.

Par ailleurs, si $\beta > n$ dans le théorème 1.2.5, on peut aussi, si θ est suffisamment petit, choisir $s < -n(1-1/q)$ et alors le membre de gauche de (1.43) ne peut être fini que si l'intégrale de f est nulle. Il y a cependant un problème de savoir quel sens donner à (1.43) si $\beta > n$ et si, par exemple, $s > 0$: cela est possible si s_1 est assez grand.

(D) Finalement, nous avons, comme pour l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, deux informations complémentaires données par les normes des espaces de Sobolev et de Besov.

Observons que le fait d'appartenir à l'espace de Sobolev homogène $\dot{W}^{1,p}$ n'implique l'appartenance à l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{\gamma,\infty}$ que si l'égalité entre les exposants $\gamma = 1 - n/p$ a lieu (cf. proposition 1.1.1). Cette remarque nécessite les précisions suivantes par rapport aux inégalités précisées :

1. Supposons que $-\beta = \gamma$. Ceci n'a de sens que si $1 \leq p < n$ puisque l'exposant β est strictement positif. En utilisant la définition de $\beta = p/(q-p)$, on déduit dans ce cas d'égalité entre les indices γ et $-\beta$ que $q = \frac{np}{n-p}$.
   Le lecteur reconnaîtra la condition du théorème de Sobolev classique. Ainsi, si tous les exposants sont liés de la sorte, l'information $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ n'est pas indispensable pour obtenir $f \in L^q$. Mais on a par contre un résultat plus puissant puisque $L^q \subset \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$.

2. Si maintenant $\gamma < -\beta < 0$, il faut aussi que l'on ait $1 \leq p < n$. De même, avec la définition de β, on obtient l'inégalité $q > \frac{np}{n-p}$. Posons $q_0 = \frac{np}{n-p}$. On a (théorème

de Sobolev), $f \in L^{q_0}$. Nous voulons obtenir $f \in L^q$ ce qui signifie un meilleur contrôle du comportement à l'infini de f. Ce n'est possible qu'à l'aide de l'information complémentaire donnée par $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$.
Il convient ici d'observer que la seule hypothèse $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ peut entraîner $f \in L^q$ à l'infini. En effet, $|x|^{-\beta} \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ et la condition $f \in L^q$ à l'infini s'écrit $\beta q > n$, c'est à dire $q < \frac{np}{n-p}$.

3. Supposons à présent que $-\beta < \gamma$. Nous avons $\beta = \frac{p}{q-p} > 0$, en revanche $\gamma \geq 0$ si et seulement si $p \geq n$. La condition $-\beta < \gamma$ est donc évidemment vraie si $p \geq n$. Si $1 \leq p \leq n$ cette condition s'écrit $q < \frac{np}{n-p}$.
Le fait d'appartenir à $\dot{W}^{1,p}$ n'implique pas $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ et cette dernière condition est nécessaire pour obtenir le résultat cherché. On doit s'occuper du comportement local déficient de la fonction f, mais à l'opposé des inégalités de Gagliardo-Nirenberg la contrainte $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$ n'est pas localement plus forte.

Interpolation

Les inégalités qui apparaissent dans les Théorèmes 1.2.2 et 1.2.4 majorent la norme d'un espace de fonctions par la moyenne géométrique de deux normes d'espaces différents. Quelques unes de ces estimations sont connues depuis longtemps et le cadre théorique dans lequel elles interviennent est celui de l'interpolation d'espaces de Banach. Nous rappelons brièvement les faits les plus importants. Le livre qui nous a servi de référence est [9] et nous prions le lecteur de le consulter pour une étude plus détaillée.

Dans ce qui suit, on prendra en compte les deux paramètres $0 < \theta < 1$ et $1 \leq q \leq \infty$. Soient alors A_0 et A_1 deux espaces de Banach contenus dans un espace de Banach X.

On note par $A_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q}$ l'espace d'interpolation réel entre A_0 et A_1 de norme $\|\cdot\|_{\theta,q}$. Observons qu'ici la norme dans $A_{\theta,q}$ décroît en q pour θ fixé.

Nous désignerons par $A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_{[\theta]}$ avec la norme $\|\cdot\|_{[\theta]}$ l'espace d'interpolation complexe entre A_0 et A_1.

Le lien avec nos inégalités est présenté par la

Proposition 1.2.1 *Soit $f \in A_0 \cap A_1$, alors on a*

$$\|f\|_{\theta,q} \leq C \|f\|_{A_0}^{1-\theta} \|f\|_{A_1}^{\theta}. \tag{1.44}$$

Nous obtenons le même résultat si l'on utilise la méthode d'interpolation complexe. Observons qu'il existe une réciproque dans le sens suivant :

Lemme 1.2.2 *Si A_0 et A_1 sont définis comme ci-dessus et si l'on dispose d'une norme $|||\cdot|||$ sur $A_0 \cap A_1$ telle que, pour un $\theta \in]0,1[$ et une constante C, on ait*

$$|||f||| \leq C \|f\|_{A_0}^{1-\theta} \|f\|_{A_1}^{\theta}$$

alors on a nécessairement

$$|||f||| \leq C'\|f\|_{A_{\theta,1}}.$$

On souhaiterait bien pouvoir utiliser cette proposition tant la ressemblance des estimations (1.44) avec (1.40) est forte. Malheureusement, les inégalités de Sobolev précisées telles que nous les avons présentées ne découlent pas directement de cette méthodologie.

Considérons en effet l'exemple suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$\|f\|_6 \leq C\|\nabla f\|_2^{1/3}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1/2,\infty}}^{2/3} \tag{1.45}$$

qui est un cas particulier du théorème 1.2.4. Nous allons voir les obstacles auxquels se heurtent les techniques d'interpolation.

(a) Du point de vue de l'interpolation réelle, l'espace $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ n'est pas un espace classique si $A_0 = \dot{B}_{p_0}^{s_0,q_0}$ et $A_1 = \dot{B}_{p_1}^{s_1,q_1}$ et $p_0 \neq p_1$ (cf. [40], [9]). C'est bien le cas ici puisque $A_0 = \dot{B}_\infty^{-1/2,\infty}$ et $A_1 = \dot{B}_2^{1,2}$.

(b) Si l'on utilise l'interpolation complexe on obtient $(A_0, A_1)_{[\theta]} = \dot{B}_6^{0,6}$. Le problème ici est que $\dot{B}_6^{0,6}$ n'est pas inclus dans L^6 (cf. proposition 1.1.1).

L'inégalité (1.45) ne peut donc pas être établie par les techniques d'interpolation usuelles. Mais il est par contre possible de s'inspirer des méthodes d'interpolation pour obtenir des inégalités précisées.

C'est ainsi que la preuve de M. Ledoux que nous présentons dans la section suivante peut se concevoir comme une adaptation du théorème de Marcinkiewicz dans le sens où l'on introduit une fonction de seuillage pour mener à bon terme les estimations nécessaires.

1.2.1 La preuve par la méthode de Ledoux

Nous redonnons la démonstration des inégalités de Sobolev précisées décrites par le Théorème 1.2.4 p. 27 en utilisant la méthode de M. Ledoux [51]. Pour la démonstration de ce théorème nous allons procéder en deux temps : on montre d'abord une inégalité où nous supposons que toutes les normes sont finies, puis on passe au cas général par un argument d'approximation.

Dans les deux cas la *pseudo-inégalité*[5] *de Poincaré* jouera un rôle central. C'est pourquoi avant de commencer les autres calculs nous énonçons ce résultat et nous présentons une preuve très simple :

Proposition 1.2.2 *(Pseudo-inégalité de Poincaré)*
Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ telle que $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et pour $t \geq 0$ on a :

$$\|f - H_t f\|_p \leq C\sqrt{t}\|\nabla f\|_p \tag{1.46}$$

où C est une constante qui ne dépend que de n.

[5] Nous avons emprunté la terminologie de *pseudo-inégalité de Poincaré* à [51].

Pour la preuve de cette proposition nous considérons

$$f(x) - H_t f(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) h_t(y) dy$$

où h_t est le noyau du semi-groupe de la chaleur, ainsi :

$$f(x) - H_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(\cdot) - f(\cdot - y) \right] h_t(y) dy.$$

Mais, puisque $\|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_p \leq |y| \, \|\nabla f\|_p$, on obtient

$$\|f - H_t f\|_p \leq \|\nabla f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} |y| h_t(y) dy = \|\nabla f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} |y| e^{-|y|^2/4t} (4\pi t)^{-n/2} dy$$

$$\leq \|\nabla f\|_p \, t^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} |y| e^{-|y|^2} 2\pi^{-n/2} dy \leq C_n \, t^{1/2} \|\nabla f\|_p$$

et la proposition est démontrée.

■

Une fois que nous avons ce résultat nous pouvons passer à la démonstration de ces estimations.

1.2.2 Une première inégalité

Voici le résultat que nous nous proposons de démontrer :

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p^{\theta} \|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{1.47}$$

Rappelons que $1 \leq p < q < \infty$, $\theta = p/q$ et que $\beta = \theta/(1-\theta)$.

Nous supposons dans un premier temps que $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et nous montrerons alors que cette norme peut être estimée par (1.47). Ici toutes les normes sont finies, on verra plus tard comment il est possible de s'affranchir du fait que $f \in L^q$.

On peut considérer par homogénéité que $\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \leq 1$. Nous voulons alors démontrer l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx. \tag{1.48}$$

Notre point de départ est la caractérisation des espaces de Lebesgue par les ensembles de niveaux donnée en (1.2) :

$$\frac{1}{5^q} \|f\|_q^q = \int_0^{\infty} |\{|f| > 5\alpha\}| \, d(\alpha^q). \tag{1.49}$$

Il s'agit maintenant d'évaluer $|\{|f| > 5\alpha\}|$.

Pour cela on pose $t_\alpha = \alpha^{2(\theta-1)/\theta}$ et on obtient, en utilisant la caractérisation thermique (1.25) des espaces de Besov, l'estimation :

Lemme 1.2.3 $\|H_{t_\alpha}(f)\|_\infty \leq \alpha$.

Afin de mener à bien les majorations qui apparaissent, il nous est nécessaire d'introduire une fonction de seuillage.

On définit alors la fonction de coupure $\Theta_\alpha(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ de la façon suivante :

- $\Theta_\alpha(-t) = -\Theta_\alpha(t)$
- $\Theta_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \alpha \\ t - \alpha & \text{si } \alpha \leq t \leq M\alpha \\ (M-1)\alpha & \text{si } t > M\alpha \end{cases}$

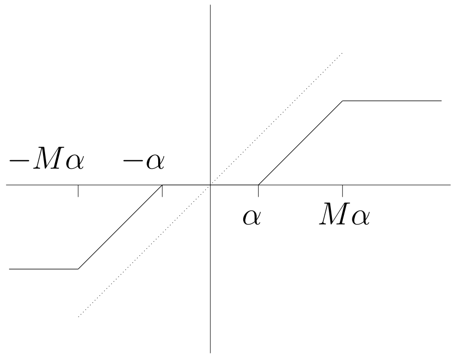

FIG. 1.1 – La fonction $\Theta_\alpha(t)$.

Ici M est un paramètre qui dépend de q dont l'utilité apparaîtra plus tard. Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons pour l'instant que $M \geq 10$.

Ceci nous permet de considérer une nouvelle fonction définie par $f_\alpha = \Theta_\alpha(f)$ qui vérifie les deux propriétés essentielles exposées dans les lemmes suivants.

Lemme 1.2.4 *L'ensemble* $\{|f| > 5\alpha\}$ *est inclus dans l'ensemble* $\{|f_\alpha| > 4\alpha\}$*. On obtient alors l'inégalité*

$$|\{|f| > 5\alpha\}| \leq |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}| .$$

Remarquons aussi que sur l'ensemble $\{|f| \leq M\alpha\}$ *on a l'estimation* $|f - f_\alpha| \leq \alpha$.

Lemme 1.2.5 *Pour* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$*, on dispose de l'égalité suivante*

$$\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} \quad \textit{presque-partout.}$$

La preuve du premier lemme découle directement de la définition de la fonction Θ_α.

La démonstration du deuxième lemme repose sur le fait suivant : f_α n'est différentiable en x_0 que si $f(x_0) \neq \pm\alpha, \pm M\alpha$ ou si $f(x_0)$ prend l'une de ces quatre valeurs et si $\nabla f(x_0) = 0$. Dans ces deux cas, nous avons $\nabla f_\alpha(x_0) = \varepsilon \nabla f(x_0)$ où $\varepsilon = 1$ si $\alpha < |f(x_0)| < M\alpha$ et 0 sinon.

Remarquons pour finir que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ (hypothèse qui sera satisfaite bien qu'elle ne découle pas de $\nabla f \in L^p$) alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble des x tels que $f(x) = b$ et $\nabla f(x) \neq 0$ est de mesure nulle.

Revenons maintenant à l'expression (1.49). Avec le Lemme 1.2.4 nous obtenons la majoration :

$$\int_0^\infty |\{|f| > 5\alpha\}|\, d(\alpha^q) \leq \int_0^\infty |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}|\, d(\alpha^q) = I. \tag{1.50}$$

On pose à présent

$$E(\alpha) = \{|f_\alpha| > 4\alpha\}, \quad F(\alpha) = \{|f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)| > \alpha\} \quad \text{et} \quad G(\alpha) = \{|H_{t_\alpha}(f_\alpha - f)| > 2\alpha\}.$$

En utilisant la propriété de linéarité du semi-groupe H_t, on peut écrire

$$f_\alpha = f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha) + H_{t_\alpha}(f_\alpha - f) + H_{t_\alpha}(f)$$

et, compte tenu de $\|H_{t_\alpha}(f)\|_\infty \leq \alpha$, il vient :

$$E(\alpha) \subset F(\alpha) \cup G(\alpha).$$

Ceci nous donne alors une estimation de la partie de droite de (1.50) par deux intégrales que nous allons traiter séparément :

$$I \leq \underbrace{\int_0^\infty |F(\alpha)| d(\alpha^q)}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty |G(\alpha)| d(\alpha^q)}_{I_2}. \tag{1.51}$$

• Pour la première intégrale I_1, l'inégalité de Tchebytchev fournit l'estimation suivante

$$|F(\alpha)| \leq \alpha^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)|^p dx.$$

En utilisant la pseudo-inégalité de Poincaré (1.46) dans l'intégrale de droite, on obtient :

$$|F(\alpha)| \leq C\, \alpha^{-p}\, t_\alpha^{p/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\alpha|^p dx.$$

Rappelons que le choix de t_α fixé auparavant donne $t_\alpha^{p/2} = \alpha^{p-q}$. De plus, puisque par le lemme 1.2.5 l'égalité $\nabla f_\alpha = (\nabla f) \mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}}$ a lieu presque partout quand $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$|F(\alpha)| \leq C\, \alpha^{-q} \int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx.$$

En intégrant maintenant par rapport à $d(\alpha^q)$ on a :

$$\int_0^\infty |F(\alpha)| d(\alpha^q) \leq C \int_0^\infty \alpha^{-q} \left(\int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx \right) d(\alpha^q) = C\, q \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \left(\int_{\frac{|f|}{M}}^{|f|} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) dx$$

Nous obtenons ainsi une majoration pour cette première intégrale :

$$I_1 \leq C\, q \log(M) \|\nabla f\|_p^p. \tag{1.52}$$

• Pour l'étude de la deuxième intégrale I_2 donnée dans (1.51), on écrit :

$$|f - f_\alpha| = |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| \leq M\alpha\}} + |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}$$

Mais grâce à la définition de f_α (cf. lemme 1.2.4), on a

$$|f - f_\alpha| \leq \alpha + |f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}. \tag{1.53}$$

On applique alors le semi-groupe de la chaleur aux deux membres de (1.53) ce qui donne l'inégalité ponctuelle

$$H_{t_\alpha}(|f - f_\alpha|) \leq \alpha + H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}})$$

et on obtient ainsi l'inclusion :

$$G(\alpha) \subset \left\{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \right\}.$$

Finalement, en considérant la mesure de ces ensembles, il vient :

$$|G(\alpha)| \leq \left| \left\{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \right\} \right|. \tag{1.54}$$

En intégrant (1.54) par rapport à $d(\alpha^q)$, nous avons :

$$I_2 = \int_0^\infty |G(\alpha)| d(\alpha^q) \leq \int_0^\infty \left| \{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \} \right| d(\alpha^q).$$

On obtient alors, en appliquant l'inégalité de Tchebytchev

$$I_2 \leq \int_0^\infty \alpha^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_{t_\alpha} \left(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}} \right) dx \right) d(\alpha^q).$$

En utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$I_2 \leq q \int_{\mathbb{R}^n} |f| \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}} \alpha^{q-2} d\alpha \right) dx = \frac{q}{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \frac{|f|^{q-1}}{M^{q-1}} dx$$

D'où finalement :

$$I_2 \leq \frac{q}{q-1} \frac{1}{M^{q-1}} \|f\|_q^q. \tag{1.55}$$

En recollant les morceaux (1.52) et (1.55), qui correspondent aux estimations des deux intégrales I_1 et I_2, on obtient la majoration suivante :

$$\frac{1}{5^q} \|f\|_q^q \leq Cq \log(M) \|\nabla f\|_p^p + \frac{q}{q-1} \frac{1}{M^{q-1}} \|f\|_q^q.$$

Puisque toutes les normes sont finies et en choisissant M assez grand, on obtient

$$\left(\frac{1}{5^q} - \frac{q}{q-1} \frac{1}{M^{q-1}} \right) \|f\|_q^q \leq Cq \log(M) \|\nabla f\|_p^p$$

ce qui montre l'inégalité (1.48).

■

1.2.3 Une approximation

Le théorème n'est cependant pas complètement démontré.
Nous avons supposé, pour la démonstration de l'inégalité forte (1.47), que la norme L^q de la fonction f était bornée et que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

On va maintenant, grâce à un argument d'approximation, se défaire de ces deux hypothèses pour ne garder que le fait que les normes des espaces de Sobolev et de Besov soient finies.

Considérons donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\nabla f \in L^p$ et $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$. Nous construisons une approximation de f en écrivant :

$$f_j(x) = S_j(f)(x) - S_{-j}(f)(x), \qquad j \in \mathbb{N},$$

où S_j est l'opérateur défini par la formule (1.14) que nous avons utilisé dans la décomposition de Littlewood-Paley.

Nous allons avoir besoin du résultat suivant

Lemme 1.2.6 *Si $q > p$ et $\nabla f \in L^p$, alors $f_j \in L^q$.*

Bien entendu, on n'a pas $f \in L^q$ pas plus que $S_j(f) \in L^q$.

Ce qui fait fonctionner le lemme est que la divergence infra-rouge (qui apparaît quand on veut passer de ∇f à f) a été éliminée en remplaçant f par f_j. On observera, en effet, que la transformée de Fourier de f_j est nulle au voisinage de 0.
Ces remarques devraient convaincre le lecteur de la justesse du lemme 1.2.6. Nous y reviendrons au chapitre 3.

On peut alors appliquer le raisonnement de la section précédente à f_j dont la norme L^q est finie. Nous avons :

$$\|f_j\|_q \leq C\|\nabla f_j\|_p^\theta \|f_j\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}$$

Maintenant, parce que $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$, on a $f_j \rightharpoonup f$ au sens des distributions.

Il en résulte que

$$\|f\|_q \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}$$

Nous nous sommes alors restreint aux deux hypothèses initiales, à savoir $\nabla f \in L^p$ et $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$. Le théorème est maintenant complètement démontré.

$\blacksquare$

1.3 Une autre transformation

Nous avons déjà vu dans la section 1.2 l'importance des dilatations dans l'étude des inégalités de Sobolev. Nous avons aussi remarqué que le fait d'imposer certaines propriétés d'invariance par rapport à des transformations conduisait à considérer d'autres normes : c'était le cas notamment avec l'action du groupe de Weyl-Heinsenberg et la norme de l'espace de Besov.

Dans cette section nous allons nous intéresser à une transformation très particulière qui motivera les choix ainsi que les résultats des chapitres suivants. Nous partons de l'exemple qui suit dans $\mathbb{R}^3$:

$$\|f\|_2^2 \leq C\|\nabla f\|_1 \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \tag{1.56}$$

Cette inégalité est bien sûr triplement invariante par dilatation, par translation et asymptotiquement sous l'action du groupe de Weyl-Heisenberg.

Considérons maintenant le groupe des dilatations anisotropes agissant sur $\mathbb{R}^3$ et définies par $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{N}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (a^{\lambda_1} x_1, a^{\lambda_2} x_2, a^{\lambda_3} x_3) \tag{1.57}$$

où les entiers $\lambda_j \geq 1$ sont tous distincts.

De même, la dilatée anisotrope d'une fonction f est définie par $f_a(x) = f(a^{\lambda_1} x_1, a^{\lambda_2} x_2, a^{\lambda_3} x_3)$.

Quelles propriétés d'invariance possède l'inégalité (1.56) par rapport à cette transformation ? Pouvons-nous espérer de récupérer les mêmes résultats d'invariance que précédemment si l'on remplace f par f_a ?

Nous allons donc étudier en détail, pour chacune des normes présente, ce qui se passe. Commençons tout d'abord avec la plus simple, la norme $L^2(\mathbb{R}^3)$.

On obtient alors :

$$\|f_a\|_2 = a^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)/2} \|f\|_2,$$

par un changement de variables. Cet espace est donc bien homogène mais cette fois-ci de degré $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/2$ et non plus de degré $-3/2$ comme dans le cas classique.

Pour conserver l'invariance sous l'action de cette nouvelle transformation de l'inégalité (1.56), il faudrait que l'action conjuguée des normes des espaces de Sobolev $\dot{W}^{1,1}$ et de Besov $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ puissent *générer* un coefficient semblable pour compenser le terme $a^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)/2}$ qui apparaît dans la partie de droite avec la norme L^2.

Malheureusement ce n'est pas le cas : nous allons voir qu'aucune propriété d'homogénéité ne peut être déduite ni du gradient ni de l'espace de Besov.

Passons sans plus attendre au gradient et regardons ce qu'il en est par rapport à cette nouvelle dilatation :

$$\nabla f_a(x) = \left(a^{\lambda_1} \frac{\partial f_a}{\partial x_1}, a^{\lambda_2} \frac{\partial f_a}{\partial x_2}, a^{\lambda_3} \frac{\partial f_a}{\partial x_3} \right).$$

Les coefficients λ_j étant tous différents ne nous pouvons rien factoriser dans cette expression pour tenter d'obtenir une quelconque propriété d'homogénéité lorsqu'on calcule la norme L^1.

Pour l'espace de Besov le constat est le même : si l'on considère, par exemple, la définition donnée par les blocs dyadiques de cet espace on a

$$\|f_a\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\|\Delta_j f_a\|_\infty$$

où $\Delta_j f_a$ est donné par convolution et aucun changement de variable ne peut nous laisser récupérer la propriété d'homogénéité.

La situation n'est pas pour autant perdue.
Mais quelles sont les modifications à faire pour obtenir une invariance par rapport à cette dilatation anisotrope ? Quel est le prix à payer ? Doit-on introduir une autre norme ?

Il faudra pour cela redéfinir les espaces fonctionnels en considérant dès le début cette dilatation. Ceci a pour conséquence de remanier de façon profonde tous les outils classiques que nous utilisons pour les adapter à cette transformation.

Le cadre naturel pour traiter ces propriétés, où tout est subordonné aux dilatations (dans un sens à préciser), est celui des *groupes stratifiés* qui sera exposé dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Les groupes de Lie stratifiés

On exposera dans la première partie de ce chapitre les principales propriétés de ces groupes. Nous verrons qu'ils sont principalement caractérisés par la donnée d'une structure de dilatation anisotrope comme celle exprimée dans (1.57).

Nous pourrons aussi apprécier à quel point ces dilatations interviennent dans plusieurs aspects essentiels du groupe et comment elles conditionnent très fortement la plupart des outils que nous utilisons, que ce soit les éléments de l'algèbre de Lie, l'expression de l'équation de la chaleur ou la définition même des espaces fonctionnels.

L'idée directrice est donc d'obtenir des relations homogènes pour les objets usuels par rapport à ces nouvelles dilatations. Nous verrons ainsi apparaître, comme un corollaire de cette adaptation, quelques différences importantes par rapport à leurs définitions naturelles dans le cadre euclidien.

Remarquons en particulier que certaines techniques spécifiques à $\mathbb{R}^n$ (la transformation de Fourier notamment) ne seront plus disponibles en toute généralité. Nous les remplaceront par l'utilisation intensive de la structure de dilatation, par des estimations du noyau de la chaleur et par la décomposition spectrale du Laplacien.

L'étude de ces propriétés fera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre où on s'intéressera à l'équation de la chaleur ainsi qu'aux différentes caractéristiques du semi-groupe de la chaleur et de son noyau associé.

Nous terminerons ce bref aperçu en donnant plusieurs définitions possibles des espaces fonctionnels dont nous aurons besoin pour démontrer les inégalités de Sobolev précisées dans le cadre des groupes stratifiés.

Le lecteur familier avec les groupes de Lie stratifiés peut survoler très rapidement ce chapitre pour ensuite concentrer son attention sur les chapitres suivants. Cependant, par égard aux lecteurs pour qui ce cadre différent présente des aspects nouveaux, nous exposerons dans les lignes qui suivent ce qu'il faut avoir en tête pour attaquer la suite.

2.1 Présentation

Si ces groupes peuvent sembler d'un premier abord très abstraits, on dispose en fait d'une quantité d'informations considérable. En effet, une fois que nous acceptons d'adapter nos définitions aux dilatations anisotropes, la plupart des outils étudiés se comportent de façon assez naturelle. Nous commençons par considérer un cadre légèrement plus général, celui des groupes homogènes, pour nous concentrer un peu plus tard sur les groupes stratifiés proprement dits.

2.1.1 Structure de groupe

Un groupe homogène $\mathbb{G}$ est la donnée de $\mathbb{R}^n$ équipé d'une structure de groupe de Lie et d'une famille de dilatations qui sont des automorphismes de groupe. Nous avons alors deux applications différentiables

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x, y &\longmapsto x \cdot y \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \cdot^{-1} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

qui font de $(\mathbb{R}^n, \cdot, \cdot^{-1})$ un groupe. Nous supposerons toujours que l'élément neutre du groupe s'identifie avec l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Pour les dilatations, nous les définissons en fixant des entiers $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ tels que $1 = a_1 = ... = a_m \leq ... \leq a_n$ et en posant pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \delta_\alpha[x] = (\alpha^{a_1} x_1, ..., \alpha^{a_n} x_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous avons en particulier les deux points suivants :

(a) $\delta_\alpha[x \cdot y] = \delta_\alpha[x] \cdot \delta_\alpha[y]$ (par l'hypothèse d'automorphisme)

(b) $\delta_\alpha[\delta_\beta[x]] = \delta_{\alpha\beta}[x]$.

Par la suite, et par un souci de clarté et de concision, on notera souvent αx au lieu de $\delta_\alpha[x]$ et α désignera toujours un réel strictement positif.

Une première conséquence de la définition des dilatations s'observe dans la forme que prend la loi de groupe. Il est en effet possible de voir que celle-ci sera *polynômiale* :

$$(\forall x, y \in \mathbb{G}) \qquad x \cdot y = x + y + P(x, y) \tag{2.2}$$

pour $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un certain polynôme tel que $P(0,0) = P(x,0) = P(0,y) = 0$. De plus, en écrivant $P = (P_1, ..., P_n)$, chaque P_k est homogène de degré a_k. Nous prions le lecteur de consulter [75] p. 618 pour une démonstration.

Le lecteur peut se convaincre facilement que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec sa structure de groupe et muni des dilatations usuelles (*i.e.* $a_i = 1$ pour $i = 1, ..., n$) est un groupe homogène. Voici un autre exemple que nous développerons au fur et à mesure de notre exposé et qui servira de référence pour illustrer les techniques que nous souhaitons étudier :

Le groupe de Heisenberg

On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. On considère la loi de groupe avec l'expression :

$$x \cdot y = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)) \qquad (2.3)$$

L'élément inverse est donné par $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3)$, l'élément neutre est $(0, 0, 0)$ et il est facile de vérifier que ce groupe n'est pas commutatif : tout simplement $x_1y_2 - y_1x_2$ est l'opposé de $x_2y_1 - y_2x_1$.

Nous définissons dans ce groupe la dilatation suivante :

$$\begin{aligned} \delta_\alpha : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \delta_\alpha[x] = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha^2 x_3) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Ici nous avons $a_1 = a_2 = 1$ et $a_3 = 2$ et nous vérifions sans peine les propriétés (a) et (b) de la page précédente pour cette dilatation.

On notera dorénavant $\mathbb{H}$ le triplet formé de $\mathbb{R}^3$, de la loi de groupe (2.3) et de la dilatation (2.4).

Revenons aux groupes homogènes.

La *dimension homogène* par rapport à la dilatation (2.1) sera donnée par la somme des exposants de la dilatation :

$$N = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i. \qquad (2.5)$$

Remarquons qu'elle est toujours plus grande que la dimension topologique n : on a bien $N \geq n$ puisque les exposants a_i vérifient $a_i \geq 1$ pour tout $i = 1, ..., n$.

Par exemple, dans le cas du groupe de Heisenberg, on obtient $N = 4$ et $n = 3$ tandis que dans le cas euclidien ces deux notions coïncident.

Voici une définition importante lorsqu'on dispose d'une structure de dilatation :

Définition 2.1.1 *Nous dirons qu'une fonction sur* $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ *est* homogène de degré $\lambda \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation δ_α *si elle vérifie* $f(\delta_\alpha[x]) = \alpha^\lambda f(x)$ *pour tout* $\alpha > 0$.

De même, nous dirons qu'un opérateur différentiel D *est homogène de degré* λ *si* $D(f(\delta_\alpha[x])) = \alpha^\lambda (Df)(\delta_\alpha[x])$ *pour tout* f *appartenant au domaine de l'opérateur.*

En particulier, si f est homogène de degré λ et si D est un opérateur différentiel de degré μ, alors Df sera homogène de degré $\lambda - \mu$.

Ces groupes ne sont pas forcément abéliens -nous l'avons bien vu avec le groupe de Heisenberg. Nous nous plaçons alors dans un cadre *non-commutatif* et il faudra prendre en compte l'invariance à gauche (ou à droite) des objets étudiés.

Nous invitons de lecteur à consulter [52], [60], [69], [31] et [75] pour plus de détails sur la structure de groupe.

Norme et distance

Ces deux objets sont tout à fait essentiels pour pouvoir poursuivre notre étude. Il est possible de munir tout groupe homogène $\mathbb{G}$ d'une norme, que l'on notera $|\cdot|$, avec les propriétés suivantes :

(a) Pour $x \in \mathbb{G}$ on a $|x| \geq 0$, avec $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(b) Pour $x \in \mathbb{G}$ et $\alpha > 0$, on a $|\alpha x| = \alpha |x|$.

(c) $(\forall x \in \mathbb{G}) \quad |x| = |x^{-1}|$,

(d) $(\forall x, y \in \mathbb{G}) \quad |x \cdot y| \leq |x| + |y|$.

Voici un exemple de norme pour les groupes homogènes :

$$|x| = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|^{1/a_j}\}.$$

Notons que cette expression ne satisfait pas la propriété (d) mais vérifie $|x \cdot y| \leq c(|x| + |y|)$ pour une certaine constante c : c'est donc une quasi-norme. Indiquons toutefois que cette propriété suffit pour notre étude et pour bien d'autres applications (cf. [75]).

Dans le cas du groupe de Heisenberg on considère la fonction suivante

$$(\forall x \in \mathbb{H}) \quad |x| = \left[\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + 16x_3^2\right]^{1/4} \tag{2.6}$$

qui satisfait les conditions (a)-(c) ci-dessus de façon élémentaire. Il est par contre moins évident de vérifier que l'on a l'inégalité triangulaire. Voir [23], [43], [75] pour une justification de ce résultat.

A partir de cette norme définie sur $\mathbb{G}$ nous pouvons définir deux distances avec les expressions :

$$d_1(x,y) = |y^{-1} \cdot x| \qquad et \tag{2.7}$$

$$d_2(x,y) = |x \cdot y^{-1}|, \tag{2.8}$$

qui possèdent les propriétés usuelles qui découlent de celles de la norme (dans ce qui suit d représente indistinctement d_1 et d_2) :

1. $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) > 0$ pour $x \neq y$,

2. $d(x,y) = d(y,x)$,

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, pour tout $x, y, z \in \mathbb{H}$,

4. $d(\delta_\alpha[x], \delta_\alpha[y]) = \alpha d(x,y)$, pour tout $\alpha > 0$.

Observons que ces deux distances sont bien homogènes mais la première distance est invariante à gauche, tandis que la deuxième l'est à droite.

En effet, soit z un élément du groupe $\mathbb{G}$, on a bien

$$d_1(z \cdot x, z \cdot y) = |y^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z \cdot x| = |y^{-1} \cdot x| = d_1(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{G}$$

et en procédant de la même manière on obtient l'invariance à droite pour d_2 :

$$d_2(x \cdot z, y \cdot z) = d_2(x,y).$$

En revanche, d_1 n'est pas invariante à droite et d_2 n'est pas invariante à gauche.

Ce fait est souligné par le fait que ces distances ne sont *pas* équivalentes.

Pour le voir d'une façon plus claire, nous nous plaçons sur le groupe de Heisenberg afin de donner une expression explicite de ces deux distances d_1 et d_2 obtenues à partir de la norme (2.6) :

$$d_1(x,y) = |y^{-1} \cdot x| = \left[\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right)^2 + 16(x_3 - y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))^2 \right]^{1/4}$$

$$d_2(x,y) = |x \cdot y^{-1}| = \left[\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right)^2 + 16(x_3 - y_3 + \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2))^2 \right]^{1/4}$$

Soient alors x_k et y_k deux points du groupe $\mathbb{H}$ déterminés par $x_k = (k^2, 1/k, k)$ et $y_k = (k^2, -1/k, 0)$, pour $k \in \mathbb{N}$. Un calcul direct nous montre que l'on a pour la première distance :

$$d_1(x_k, y_k) = 2/k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que pour la deuxième distance on obtient :

$$d_2(x_k, y_k) \simeq 2\sqrt{2k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Du point de vue de d_1, x_k et y_k sont donc très proches, mais du point de vue de d_2 ils s'écartent l'un de l'autre de plus en plus.

Nous obtenons alors deux espaces de types homogènes distincts dans le sens de Coifman et Weiss [21] en fonction du choix de la distance.

On fixera désormais notre attention sur la distance invariante à gauche et nous considérerons tous les objets de façon à conserver cette propriété. On posera donc $d = d_1$.

Une fois que nous avons fixé cette distance, nous considérons les boules caractérisées par la formule

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{G}/d(x, y) < r\}.$$

Remarquons qu'alors nous avons $B(x, r) = x \cdot B(0, r)$, et par homogénéité, que $B(0, r) = \delta_r B(0, 1)$ pour $r > 0$.

2.1.2 Mesure de Haar, espaces de Lebesgue et de Lorentz

Du point de vue de la mesure, les groupes homogènes se comportent d'une façon classique, car la mesure de Lebesgue dx est bi-invariante et coïncide avec la mesure de Haar. On parlera alors de groupes unimodulaires. Nous y reviendrons au chapitre 7.

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{G}$ on notera dorénavant $|E|$ sa mesure. Et pour les boules que nous avons définies précédemment, nous avons l'importante propriété d'homogénéité suivante :

$$|B(0, 2r)| = 2^N |B(0, r)|.$$

Venons-en aux espaces fonctionnels définis uniquement avec la notion de mesure.
Pour les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{G})$ nous les définirons par la norme :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

pour $1 \leq p < \infty$ et, si $p = \infty$, par

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{G})} = \sup_{x\in\mathbb{G}} \text{ess}\, |f(x)|.$$

Remarquons que l'on a l'invariance à gauche et à droite de ces espaces

$$\|f(x \cdot z)\|_{L^p(\mathbb{G})} = \|f(z \cdot x)\|_{L^p(\mathbb{G})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{G})} \qquad (\forall z \in \mathbb{G}).$$

Nous avons aussi la caractérisation donnée par la formule :

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{G})} = p\int_0^\infty \sigma^{p-1} d_f(\sigma) d\sigma \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{2.9}$$

où, rappelons-le, $d_f(\sigma) = |\{|f| > \sigma\}|$ est la fonction de distribution avec $\sigma \in]0, \infty[$.

Quant aux espaces L^p-faible ils seront définis par la norme suivante :

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{G})} = \sup\left\{\sigma d_f^{1/p}(\sigma) : \sigma > 0\right\} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{2.10}$$

Ces deux familles d'espaces que nous venons de définir conservent toutes leurs propriétés usuelles. En particulier, ils sont bien homogènes mais cette fois-ci de degré $-N/p$ par rapport aux dilatations δ_α puisqu'on a $\|f(\delta_\alpha[\cdot])\|_A = \alpha^{-N/p}\|f\|_A$, où A désigne sans distinction les espaces L^p et $L^{p,\infty}$.

Convolution

Nous définissons à présent, pour f et g deux fonctions mesurables, la convolution dans les groupes homogènes par l'expression

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1}\cdot x)dy = \int_{\mathbb{G}} f(x\cdot y^{-1})g(y)dy. \tag{2.11}$$

Etant donné que les opérations que l'on considère ne sont pas commutatives, il convient de distinguer la convolution à gauche de celle de droite. Nous avons en effet que $f * g \neq g * f$. Plus précisément :

$$\int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1}\cdot x)dy \neq \int_{\mathbb{G}} f(y)g(x\cdot y^{-1})dy.$$

Remarquons finalement que l'on dispose des inégalités de Young dans $\mathbb{G}$:

Lemme 2.1.1 *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tels que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Si $f \in L^p(\mathbb{G})$ *et* $g \in L^q(\mathbb{G})$, *alors* $f * g \in L^r(\mathbb{G})$ *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q \tag{2.12}$$

Le lecteur pourra consulter une preuve de ce lemme dans [31].

2.1.3 Algèbre de Lie homogène

A chaque groupe homogène $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot, \delta)$ on associe son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont les éléments peuvent se concevoir de trois façons différentes : comme les vecteurs tangents à l'origine du groupe, comme les champs de vecteurs invariants à gauche ou comme les champs de vecteurs invariants à droite. Mais indépendemment du point de vue choisi, les propriétés de l'algèbre de Lie seront un reflet de celles du groupe $\mathbb{G}$ comme nous allons le voir tout de suite.

Notons d'abord $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ les espaces des champs de vecteurs invariants à gauche et à droite respectivement. On réservera la notation X pour les champs de vecteurs invariants à gauche et Y pour ceux invariants à droite.

Si X_j sont les champs de vecteurs invariants à gauche qui coïncident avec $\partial/\partial x_j$ à l'origine, on peut voir alors que la famille $(X_j)_{1\leq j\leq n}$ forme une base de $\mathfrak{g}_1$ qui en tant qu'espace vectoriel est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

On vérifie alors que l'on a l'expression qui suit

$$(X_j f)(x) = \frac{\partial f(x \cdot y)}{\partial y_j}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j<k} q_j^k(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{2.13}$$

où $q_j^k(x)$ est un polynôme homogène de degré $a_k - a_j$. Ceci est une conséquence directe des propriétés de la dilatation et de la loi de groupe (cf. [75]).

Voyons sur un exemple précis ce que cela veut dire. Comme d'habitude on se place sur le groupe de Heisenberg.

Soit alors μ un vecteur tangent à l'origine de coordonnées $(1, 0, 0)$ et soit $s \longmapsto \mu s$ la droite associée dans le groupe de Heisenberg. Le champ de vecteurs correspondant, qui coïncide avec $\partial/\partial x_1$ à l'origine et qui est invariant à gauche, est donné par la formule :

$$(X_1 f)(x) = \frac{d}{ds} f(x \cdot \mu s)\bigg|_{s=0} \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Rappelons que, par la loi de groupe, nous avons $x \cdot \mu s = (x_1 + s, x_2, x_3 - \frac{1}{2} x_2 s)$. On obtient donc :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

En procédant de la même manière pour les champs de vecteurs qui coïncident avec $\partial/\partial x_2$ et $\partial/\partial x_3$ à l'origine nous avons :

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\,, \qquad T = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2.14}$$

Vérifions rapidement qu'ils sont invariants à gauche, nous le faisons pour X_1, les autres cas étants identiques. Soit $z \in \mathbb{H}$, alors

$$\begin{aligned} X_1[f(z \cdot x)] &= X_1 \left[f\left(z_1 + x_1, z_2 + x_2, z_3 + x_3 + \frac{1}{2}(z_1 x_2 - z_2 x_1) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} f(z \cdot x) - \frac{1}{2}(z_2 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} f(z \cdot x) = [X_1 f](z \cdot x). \end{aligned}$$

Passons à présent aux champs de vecteurs invariants à droite. Ils sont définis de la même manière dans le cadre général des groupes homogènes :

$$(Y_j f)(x) = \frac{\partial f(y \cdot x)}{\partial y_j}\bigg|_{y=0} \tag{2.15}$$

Dans le cas du groupe de Heisenberg, les champs de vecteurs que l'on obtient sont alors :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\,, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\,, \qquad T = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2.16}$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ces champs de vecteurs sont bien invariants à droite, mais ne le sont pas à gauche. Observons finalement que T est bi-invariant.

On obtient, dans le groupe de Heisenberg, les relations suivantes entre les champs de vecteurs invariants à gauche et ceux invariants à droite :

$$X_1 = Y_1 - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{et} \qquad X_2 = Y_2 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Avant de fermer la parenthèse sur $\mathbb{H}$, nous explicitons les relations de commutation de Heisenberg, si utiles en mécanique quantique, qui sont données par le crochet de Lie

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = T, \tag{2.17}$$
$$[X_i, T] = [T, X_i] = 0$$

où $i = 1, 2$. En revanche, dans le cas des champs de vecteurs invariants à droite, on a $[Y_1, Y_2] = -T$ et tous les autres commutateurs sont nuls. Nous aurons l'occasion de revenir à ces champs de vecteurs sur le groupe de Heisenberg lorsqu'il s'agira de traiter les espaces fonctionnels.

Etudions maintenant l'homogénéité de ces objets. Par la formule donnée dans (2.13) on peut déduire facilement que ces champs de vecteurs sont homogènes de degré a_j :

$$X_j\left(f(\alpha x)\right) = \alpha^{a_j}(X_j f)(\alpha x) \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{2.18}$$

Et ceci reste vrai pour les vecteurs Y_j.

Nous remarquons ainsi que les champs de vecteurs épousent les mêmes propriétés d'homogénéité par rapport à la dilatation du groupe. Nous pouvons de cette façon apprécier jusqu'à quel degré les objets ont été modifiés pour obtenir une cohérence d'ensemble vis à vis de ces nouvelles dilatations.

Nous faisons ici trois remarques sur les champs de vecteurs X_j et Y_j, mais avant nous fixons quelques notations utiles. Pour tout multi-indice $I = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit X^I et Y^I par

$$X^I = X_1^{i_1}...X_n^{i_n} \quad \text{et} \quad Y^I = Y_1^{i_1}...Y_n^{i_n}.$$

On notera alors $|I| = i_1 + ... + i_n$ l'ordre de la dérivation et $d(I) = a_1 i_1 + ... + a_n i_n$ le degré homogène de celle-ci.

Premièrement nous avons, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{G})$, les égalités

$$\int_{\mathbb{G}} \varphi(x)(X^I\psi)(x)dx = (-1)^{|I|} \int_{\mathbb{G}} (X^I\varphi)(x)\psi(x)dx. \tag{2.19}$$

$$\int_{\mathbb{G}} \varphi(x)(Y^I\psi)(x)dx = (-1)^{|I|} \int_{\mathbb{G}} (Y^I\varphi)(x)\psi(x)dx. \tag{2.20}$$

Deuxièmement, l'interaction des opérateurs X^I et Y^I avec les convolutions est explicitée par :

$$X^I(f * g) = f * (X^I g) \tag{2.21}$$

$$Y^I(f * g) = (Y^I f) * g. \tag{2.22}$$

Finalement nous avons l'égalité :

$$(X^I f) * g = f * (Y^I g). \tag{2.23}$$

Le lecteur trouvera une justification de ces résultats dans [31].

Suivant l'usage courant on fera dorénavant l'identification $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$.

C'est à dire que l'on travaillera avec les champs de vecteurs invariants à gauche. Et si ce n'est pas le cas on explicitera avec soin le type de champs de vecteurs qui est en jeu.

L'application exponentielle

On vient de voir ci-dessus comment obtenir les éléments de l'algèbre de Lie à partir de la loi du groupe. Pour faire le chemin inverse, c'est à dire pour passer de l'algèbre au groupe, nous avons besoin de la proposition suivante

Proposition 2.1.1 *Soit G un groupe de Lie connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, alors l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans G.*

Il est possible de vérifier (cf. [81]) que la mesure de Haar du groupe est l'image de la mesure de Lebesgue de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sous ce difféomorphisme.

Ceci nous permet d'étendre, en conservant la même notation, les dilatations à l'algèbre de Lie en procédant de la manière suivante :

$$\delta_\alpha\left(\sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha^{a_j} X_j$$

C'est dans ce sens que l'on parle d'algèbre homogène par rapport aux dilatations et ces dilatations sont des automorphismes de l'algèbre de Lie car

$$\delta_\alpha([X_i, X_j]) = [\delta_\alpha(X_i), \delta_\alpha(X_j)].$$

Stratification de l'algèbre de Lie

Le concept suivant est crucial pour la suite puisque c'est dans ce cadre très précis que l'on exposera la plupart des théorèmes.

Définition 2.1.2 *Nous dirons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est* stratifiée *si, en tant qu'espace vectoriel, elle se décompose comme une somme de sous-espaces linéaires*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{1\leq j\leq k} E_j \qquad \textit{tels que} \tag{2.24}$$

- *E_1 génère l'algèbre $\mathfrak{g}$ et $[E_1, E_j] = E_{j+1}$ pour $1 \leq j < k$.*

- *$[E_1, E_k] = \{0\}$ et $E_k \neq \{0\}$, mais $E_j = \{0\}$ si $j > k$.*

Ici $[E_1, E_j]$ désigne le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments $[U, V] = UV - VU$ avec $U \in E_1$ et $V \in E_j$.

Un groupe de Lie dont l'algèbre admet une stratification sera lui aussi désigné comme *stratifié*.

L'entier k est appelé le *degré* de la stratification de $\mathfrak{g}$. Par exemple pour le groupe de Heisenberg nous avons $k = 2$ et pour le cas euclidien $k = 1$.

Nous supposerons dorénavant que $\mathbb{G}$ est **stratifié**. Il est alors possible de voir que si l'on considère les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ tels que $a_1 = a_2 = ... = a_m = 1$ $(m \leq n)$ alors la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$ est une base de E_1 et génère donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (cf. [31]).

Remarque 2.1 C'est avec cette famille de champs de vecteurs que nous allons construire le gradient et le Laplacien dans la section suivante. Toutefois nous utiliserons aussi les autres champs de vecteurs dans la formulation de quelques uns des résultats présentés ci-dessous. Ainsi, si nous considérons $I = (i_1, ..., i_n)$, nous ferons intervenir tous les champs de vecteurs $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$. Il ne faudra donc pas confondre $|I|$ et $d(I)$.

Nous avons fini cette brève introduction des groupes stratifiés. Le lecteur désireux d'approfondir l'étude de ces groupes peut consulter [75], [31], [69], [30], [59].

2.2 Equation de la chaleur

Notre objectif dans ce paragraphe est de donner un sens à l'équation de la chaleur sur les groupes stratifiés :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{J}\right) u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{2.25}$$

Ici f est une fonction définie sur $\mathbb{G}$, $t > 0$ et $\mathcal{J}$ est un opérateur différentiel avec des propriétés similaires à celles du Laplacien usuel dans le cas euclidien. Nous verrons donc, dans les paragraphes suivants, les définitions ainsi que les principales propriétés des objets qui nous permettrons d'atteindre notre but.

Nous nous plaçons sur un groupe de Lie stratifié $\mathbb{G}$ de dimension topologique n et de dimension homogène N. On considérera la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$ de vecteurs invariants à gauche qui forment une base de la première tranche de la stratification de l'algèbre de Lie.

On dira qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{G})$ si les semi-normes suivantes sont finies pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice $I = (i_1, ..., i_n)$:

$$N_{k,I}(f) = \sup_{x \in \mathbb{G}} (1 + |x|)^k |X^I f(x)|.$$

2.2.1 Gradient et Laplacien

Nous définissons à partir de ces champs de vecteurs le gradient sur $\mathbb{G}$ de la façon suivante[1] :

$$\nabla = (X_1, ..., X_m) \tag{2.26}$$

Cet opérateur est bien sûr invariant par translation à gauche et homogène de degré 1 par rapport aux dilatations puisque nous avons l'égalité $\nabla[f(\alpha x)] = \alpha[\nabla f](\alpha x)$.

Nous définissons aussi la longueur du gradient par la formule :

$$|\nabla f| = \left((X_1 f)^2 + ... + (X_m f)^2\right)^{1/2}$$

On a finalement, en vertu de (2.19), que l'adjoint ∇^* dans $L^2(\mathbb{G})$ du gradient est donné par $-\nabla$.

Nous nous intéressons maintenant au Laplacien dans les groupes stratifiés, on définit alors sur $L^2(\mathbb{G})$ l'opérateur :

$$\mathcal{J} = \nabla^* \nabla = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 \tag{2.27}$$

et son opérateur de la chaleur associé sur $\mathbb{G} \times]0, \infty[$ par $\partial_t + \mathcal{J}$.

Observons que, par un théorème de Hörmander [45], les opérateurs $\mathcal{J}$ et $\partial_t + \mathcal{J}$ sont sous-elliptiques au sens suivant : si u est une distribution sur $\mathbb{G}$ (ou sur $\mathbb{G} \times]0, \infty[$) telle que $\mathcal{J} u$ (ou $(\partial_t + \mathcal{J} u)$) soit $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert Ω, alors u est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

Voici quelques propriétés évidentes du Laplacien :

1. Le Laplacien $\mathcal{J}$ est un opérateur invariant par translation à gauche et homogène de degré 2 par rapport aux dilatations du groupe $\mathbb{G}$:
$$\mathcal{J}[f(z \cdot x)] = [\mathcal{J} f](z \cdot x) \quad \forall z \in \mathbb{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}[f(\alpha x)] = \alpha^2 [\mathcal{J} f](\alpha x) \quad \text{pour tout } \alpha > 0.$$
2. C'est aussi un opérateur auto-adjoint : pour $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{G})$ nous avons
$$\langle f, \mathcal{J} g \rangle = \langle \mathcal{J} f, g \rangle \tag{2.28}$$
3. $\mathcal{J}$ est accrétif dans le sens où l'on a $\langle \mathcal{J}(f), f \rangle \geq 0$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{G})$.

Remarque 2.2 Le Laplacien tel que nous le considérons ici ne fait pas intervenir les champs de vecteurs dont l'homogénéité est différente de 1. Il est cependant possible de les prendre en compte pour la définition du Laplacien (cf. chapitre 7).

[1]Rappel : $m = \dim E_1 \leq n$

2.2.2 Semi-groupe de la chaleur

Nous avons vu dans le premier chapitre comment définir la plupart des espaces fonctionnels avec le semi-groupe de la chaleur. Nous allons reprendre cette approche puisqu'ici, en absence de transformation de Fourier, les techniques les plus importantes que nous avons à notre disposition sont basées sur l'utilisation de la structure de dilatation et sur des estimations portant sur le semi-groupe de la chaleur ainsi que sur son noyau associé. Il convient donc de faire un exposé soigné de ces objets avec leurs principales propriétés.

On présentera tous les résultats qui nous sont nécessaires pour la suite dans cette section.

Nous avons détaillé ci-dessous quelques preuves pour la commodité du lecteur ; cependant nous renvoyons aux références suivantes pour les démonstrations complètes : [29], [69], [75] et [81].

Voici notre premier théorème qui reprend quelques unes des propriétés **(P1)-(P7)** (cf. Introduction p. 7) :

Théorème 2.2.1 *(Folland [29]) Il existe une unique famille d'opérateurs linéaires continus* $\{H_t\}_{t>0}$ *définis sur* $L^1 + L^\infty(\mathbb{G})$*, vérifiant les propriétés de semi-groupe* $H_{t+s} = H_t H_s$ *pour tout* $t, s > 0$ *et* $H_0 = Id$*, et telle que l'on ait :*

(a) Le Laplacien $\mathcal{J}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe* H_t : $H_t = e^{-t\mathcal{J}}$.

(b) H_t *est un opérateur auto-adjoint de contraction sur* L^p *pour* $1 \leq p \leq \infty$, $t > 0$.

(c) Le semi-groupe admet un noyau de convolution :

$$H_t f = f * h_t \quad \text{où} \quad h_t = h(x,t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\times]0,\infty[)$$

est le **noyau de la chaleur**.

(d) $\|H_t f - f\|_p \to 0$ *si* $t \to 0$ *pour* $f \in L^p$ *et* $1 \leq p < \infty$.

(e) On a l'identité $\mathcal{J} H_t = H_t \mathcal{J}$.

(f) Si $f \geq 0$ *alors* $H_t f \geq 0$ *et* $H_t 1 = 1$.

(g) Si $f \in L^p(\mathbb{G})$, $1 \leq p \leq \infty$, *alors la fonction*

$$u(x,t) = H_t f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G} \times \mathbb{R}^+)$$

vérifie l'équation de la chaleur (2.25).

Nous explicitons dans les deux propositions qui suivent des propriétés du noyau de la chaleur sur les groupes stratifiés.

Proposition 2.2.1 *Le noyau de la chaleur satisfait les point suivants :*

(a) $(\partial_t + \mathcal{J})h_t = 0$ *sur* $\mathbb{G}\times]0,\infty[$.

(b) $h(x,t) = h(x^{-1},t)$.

(c) $h(x,t) \geq 0$ *et* $\int_{\mathbb{G}} h(x,t)dx = 1$.

(d) h_t *vérifie la propriété de semi-groupe :* $h_t * h_s = h_{t+s}$ *pour* $t,s > 0$.

(e) $h(\delta_\alpha[x], \alpha^2 t) = \alpha^{-N} h(x,t)$.

Le lecteur consultera [31] p. 56 pour la démonstration des points $(a)-(d)$ de la proposition ci-dessus. Nous considérons toutefois utile d'expliciter la preuve du dernier point puisqu'il insiste sur la relation existante entre la structure de dilatation, le Laplacien et le noyau de la chaleur. On remarquera qu'en dehors de ce cadre, on ne dispose plus en toute généralité de cette importante propriété (cf. chapitre 7).

Nous allons utiliser le fait que le Laplacien est un opérateur homogène de degré 2. En effet, le lecteur peut facilement se convaincre que l'on a l'égalité suivante :

$$\delta_{1/\alpha}\left[\mathcal{J}\left(f(\delta_\alpha[x])\right)\right] = \alpha^2 \mathcal{J} f(x) \qquad (\alpha > 0).$$

Donc d'après un théorème de Hunt [48], le semi-groupe $\{H_{\alpha^2 t}\}$ engendré par $\alpha^2\mathcal{J}$ vérifie

$$H_{\alpha^2 t}(f) = \delta_{1/\alpha}\left[H_t(f(\delta_\alpha[x]))\right]$$

c'est-à-dire :

$$\int f(x\cdot y^{-1})h(y,\alpha^2 t)dy = \int f(x\cdot\delta_\alpha[y^{-1}])h(y,t)dy = \alpha^{-N}\int f(x\cdot y^{-1})h(\delta_{\alpha^{-1}}[y],t)dy.$$

On obtient alors l'égalité $h(\delta_\alpha[x],\alpha^2 t) = \alpha^{-N}h(x,t)$.

■

Proposition 2.2.2 *Voici d'autres propriétés vérifiées par* h_t *:*

(a) On peut étendre le noyau de la chaleur à $\mathbb{G}\times\mathbb{R}$ *en posant*

$$h_t(x) = 0 \text{ si } t \leq 0.$$

Alors $h(x,t)$ *est localement intégrable sur* $\mathbb{G}\times\mathbb{R}$ *et* $(\partial_t + \mathcal{J})h_t(x) = \delta_0$ *au sens des distributions de* $\mathcal{D}'(\mathbb{G}\times\mathbb{R})$*, où* δ_0 *est la masse de Dirac en* 0 *sur* $\mathbb{G}\times\mathbb{R}$.

(b) $h_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G}\times\mathbb{R}\setminus\{0,0\})$ *par sous-ellipticité de l'opérateur* $\partial_t + \mathcal{J}$.

(c) *Pour tout $t > 0$ fixé, $x \mapsto h(x,t)$ appartient à la classe de Schwartz dans $\mathbb{G}$.*

(d) *Il est également possible d'étendre l'action du semi-groupe H_t à $\mathcal{S}'$ et on a la limite $H_t f \to f$ dans $\mathcal{S}'$ lorsque t tend vers 0 pour $f \in \mathcal{S}'$.*

Nous renvoyons au livre [31] pour une preuve de ces propriétés.

Voici deux autres résultats :

Lemme 2.2.1 *Soit $I = (i_1, ..., i_n)$ un multi-indice et soient C, c deux constantes qui dépendent du groupe. Nous avons alors les estimations qui suivent :*

$$h_t(x) \leq C t^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{ct}}, \qquad x \in \mathbb{G}, t > 0. \tag{2.29}$$

$$\int_{\mathbb{G}} e^{-\frac{|x|^2}{ct}} dx = C\, t^{N/2}. \tag{2.30}$$

$$|X^I h_t(x)| \leq C t^{-\frac{N+d(I)}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{ct}}, \qquad x \in \mathbb{G}, t > 0. \tag{2.31}$$

Le lecteur trouvera une démonstration de ce lemme dans [81].

Proposition 2.2.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $1/p + 1/p' = 1$. Pout tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice I, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :*

$$\|(1+|x|)^\alpha X^I h_t\|_p \leq C(1+\sqrt{t})^\alpha t^{-(\frac{N}{2p'} + \frac{d(I)}{2})}, \quad t > 0. \tag{2.32}$$

Les constantes ici ne dépendent que du groupe $\mathbb{G}$, de p et de I.

Remarquons que ce résultat paraphrase, avec un peu plus de détail, la partie (c) de la proposition 2.2.2.

Pour la démonstration de cette proposition, que nous exposons pour la commodité du lecteur, nous allons utiliser le lemme 2.2.1 et nous suivons [36].

On a alors, en utilisant la formule (2.31), l'estimation :

$$|(1+|x|)^\alpha X^I h_t(x)|^p \leq C t^{-p\frac{N+d(I)}{2}} \left((1+|x|)^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{Ct}} \right)^p$$

En intégrant par rapport à dx il vient

$$\int_{\mathbb{G}} |(1+|x|)^\alpha X^I h_t(x)|^p dx \leq C t^{-p\frac{N+d(I)}{2}} \int_{\mathbb{G}} \left((1+|x|)^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{Ct}} \right)^p dx$$

$$\leq C\, t^{-p\frac{N+d(I)}{2}} \left(\sup_{x \in \mathbb{G}} (1+|x|)^{p\alpha} e^{-\frac{p|x|^2}{2Ct}} \right) \int_{\mathbb{G}} e^{-\frac{p|x|^2}{2Ct}} dx \tag{2.33}$$

Nous invoquons ici la majoration (2.30) pour l'intégrale de l'expression ci-dessus, tandis que pour le terme entre parenthèses on utilise le fait suivant :

$$\sup_{\rho \geq 0} (1+\rho)^{p\alpha} e^{-\frac{p\rho^2}{Ct}} \leq C(1+\sqrt{t})^{p\alpha}.$$

Nous obtenons, en revenant à (2.33) :

$$\|(1+|x|)^\alpha X^I h_t(x)\|_p^p \leq Ct^{-p\frac{N+d(I)}{2}} t^{N/2}(1+\sqrt{t})^{p\alpha} = C(1+\sqrt{t})^{p\alpha} t^{-p(\frac{N}{2p'}+\frac{d(I)}{2})}$$

D'où :

$$\|(1+|x|)^\alpha X^I h_t\|_p \leq C(1+\sqrt{t})^\alpha t^{-(\frac{N}{2p'}+\frac{d(I)}{2})}, \quad t>0.$$

$\blacksquare$

Nous terminons ainsi notre bref exposé sur le noyau de la chaleur dans le cadre des groupes de Lie stratifiés. Voici toutefois une dernière observation :

Remarque 2.3 De façon générale nous ne disposons pas d'une expression explicite des noyaux de la chaleur. Cependant, dans le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$ nous avons la formule suivante [76] :

$$h_t(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda t)} \cos(\lambda x_3) e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda t)} d\lambda.$$

Cette information peut s'avérer très riche de conséquences, puisqu'on peut d'une part démontrer *à la main* la plupart des propriétés que nous venons de présenter, mais, surtout, il est alors possible de construire explicitement plusieurs des objets que nous allons développer par la suite (cf. annexe A p. 155).

2.3 Espaces fonctionnels

Nous allons reprendre tous les espaces définis dans le premier chapitre dans le cadre des groupes homogènes stratifiés. On explicitera quelques uns des différents points de vue possibles pour rendre l'exposé du chapitre suivant plus clair.

Puissances fractionnaires du Laplacien

Nous rappelons la théorie des puissances fractionnaires d'opérateurs (cf. [29] et [69]) sur les groupes stratifiés.

Définition 2.3.1 *Soit $1<p<\infty$, $0<s$ et k le plus petit entier plus grand que s. L'opérateur $\mathcal{J}_p^s$ est défini par :*

$$\mathcal{J}_p^s f = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Gamma(k-s)} \int_\varepsilon^\infty t^{k-s-1} \mathcal{J}^k H_t f\, dt \tag{2.34}$$

dans le domaine $D(\mathcal{J}_p^s)$ de toutes les fonctions $f \in L^p(\mathbb{G})$ telles que la limite existe en norme L^p.

L'opérateur $\mathcal{J}_p^{-s}$ est, quant à lui, caractérisé par :

$$\mathcal{J}_p^{-s} f = \lim_{\eta \to \infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\eta} t^{s-1} H_t f dt \tag{2.35}$$

toujours sur le domaine de toutes les fonctions $f \in L^p(\mathbb{G})$ telles que la limite existe en norme L^p.

Si l'on note par Id l'opérateur identité, on définit les deux opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}
(Id + \mathcal{J}_p)^s f &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Gamma(k-s)} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{k-s-1} e^{-t} (Id + \mathcal{J})^k H_t f dt \\
(Id + \mathcal{J}_p)^{-s} f &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-t} H_t f dt
\end{aligned}$$

dans le domaine des fonctions L^p telles que la limite existe pour le premier.

Pour le second nous observons que cette intégrale est absolument convergente : $(Id + \mathcal{J}_p)^{-s}$ est un opérateur borné sur L^p.

Observons qu'il est aussi possible de prendre en compte des valeurs complexes pour l'exposant s (cf. [29]). Nous nous limiterons cependant au cas $s \in \mathbb{R}^*$ qui est celui qui nous intéresse le plus en vue des applications futures aux inégalités de Sobolev précisées.

Avant de passer à la caractérisation des espaces de Sobolev, il est important de s'attarder sur quelques propriétés de ces opérateurs.

Nous les regroupons dans la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *Soit $1 < p, q < \infty$. Si Υ_p dénote sans distinction les opérateurs $\mathcal{J}_p$ et $(I + \mathcal{J}_p)$ on a :*

(a) Si $f \in D(\Upsilon_p^{s_2}) \cap D(\Upsilon_p^{s_1+s_2})$, alors $\Upsilon_p^{s_2} f \in D(\Upsilon_p^{s_1})$ et $\Upsilon_p^{s_1}\Upsilon_p^{s_2} f = \Upsilon_p^{s_1+s_2} f$.

(b) Si $f \in D(\Upsilon_p^s) \cap L^q$, alors $f \in D(\Upsilon_q^s)$ si et seulement si $\Upsilon_p^s f \in L^q$. Dans ce cas on a l'égalité $\Upsilon_p^s f = \Upsilon_q^s f$.

(c) Les opérateurs $\mathcal{J}_p^s$ et H_t commutent : pour $f \in D(\mathcal{J}_p^s)$ et $s > 0$ on a l'égalité

$$\mathcal{J}_p^s H_t f = H_t \mathcal{J}_p^s f.$$

(d) L'opérateur $\mathcal{J}_p^s H_t$ est auto-adjoint pour $s \neq 0$.

(e) *Pour* $s \neq 0$, *l'opérateur* $\mathcal{J}_p^s$ *est homogène de degré* $2s$.

On renvoie le lecteur à [29] pour une démonstration.

Remarquons que sur leur domaine commun les opérateurs $\mathcal{J}_p^s$ et $\mathcal{J}_q^s$ coïncident pour tout $s \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, et dorénavant, nous ne prendrons plus en compte ces indices (on procédera de même pour $(Id + \mathcal{J}_p)^s$ et $(Id + \mathcal{J}_q)^s$).

Espaces de Sobolev

Voici une première définition de ces espaces :

Définition 2.3.2 *Pour* $1 < p < \infty$ *et* $0 < s$, *l'espace de Sobolev* $W^{s,p}(\mathbb{G})$ *est l'espace* $D(\mathcal{J}_p^{s/2})$ *muni de la norme*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_p + \|\mathcal{J}^{s/2} f\|_p.$$

Pour la version homogène de ces espaces nous avons :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|\mathcal{J}^{s/2} f\|_p \tag{2.36}$$

Dans le cas où l'exposant de régularité est un entier positif, on adoptera la définition classique pour $I = (i_1, ..., i_m)$ $(m < n)$:

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \sum_{|I| \leq s} \|X^I f\|_p \qquad (1 \leq p < \infty). \tag{2.37}$$

De même que dans le cas euclidien, les définitions (2.36) et (2.37) ne sont équivalentes que si $1 < p < \infty$. Voir par exemple [29] pour une démonstration de cette équivalence.

L'espace homogène qui intervient dans quelques résultats que nous nous proposons de démontrer est caractérisé de la façon suivante :

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}} = \|\nabla f\|_p \qquad (1 \leq p < \infty). \tag{2.38}$$

Etant donné que les champs de vecteurs qui interviennent dans ces définitions sont invariants à gauche, le lecteur peut se convaincre très facilement que cette propriété se transmet aux espaces que nous venons de considérer.

Finalement, nous avons bien pour les espaces homogènes la propriété :

$$\|f(\delta_\alpha[\cdot])\|_{\dot{W}^{s,p}} = \alpha^{s-N/p} \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}.$$

Le lecteur trouvera une étude complète des espaces de Sobolev dans les références [69], [29] et [31].

Espaces de Besov

On définit les espaces de Besov $B_p^{s,q}$, pour $0 < s < \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ avec $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \frac{s}{2}$, par la norme :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 t^{(m-s/2)q} \left\| \frac{\partial^m H_t f}{\partial t^m}(\cdot) \right\|_p^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}.$$

Lorsque l'indice de régularité est négatif (que l'on notera $-s$) nous avons :

$$\|f\|_{B_p^{-s,q}} = \|H_1 f\|_p + \left[\int_0^1 \left(t^{s/2}\|H_t f\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} \tag{2.39}$$

Dans ce cas (ou lorsque $s = 0$), les "objets" f appartenant à $B_p^{-s,q}$ sont des distributions tempérées. On doit donc s'attendre à ce que $\|H_t f\|_p$ tende vers l'infini quand $t \to 0$ (si ce n'était pas le cas, on aurait $\|H_t f\|_p \leq C$ avec $t \to 0$. Mais $H_t f \rightharpoonup f$ au sens des distributions et cela permettrait de conclure à $f \in L^p$).

La condition $\dot{B}_p^{-s,\infty}$ s'écrit $\|H_t f\|_p \leq C\ t^{-s/2}$ (taux d'explosion quand $t \downarrow 0$) et, plus généralement, $f \in \dot{B}_p^{-s,q}$ s'écrit $\int_0^{+\infty} (t^{s/2}\|H_t f\|_p)^q \frac{dt}{t} < \infty$.

En particulier, dans le cas homogène où le paramètre de régularité est négatif avec $p, q = \infty$, nous avons :

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-s,\infty}} = \sup_{t>0}\ t^{s/2}\|H_t f\|_\infty \tag{2.40}$$

C'est surtout cette dernière définition que nous allons utiliser puisque le troisième espace qui apparaît dans les inégalités de Sobolev précisées est justement donné par $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$, où le paramètre β est choisi en fonction des critères d'invariance par rapport aux dilatations.

Voici un dernier résultat utile (cf. [29] et [69]) :

Proposition 2.3.2 *Soit $\alpha > 0$, l'opérateur $\mathcal{J}^{\alpha/2}$ réalise un isomorphisme entre les espaces $\dot{W}^{s,p}$ et $\dot{W}^{s-\alpha,p}$. Ceci reste vrai si l'on remplace les espaces de Sobolev par des espaces de Besov : $\dot{B}_p^{s,q}$ et $\dot{B}_p^{s-\alpha,q}$.*

Nous présentons, avant de clore cette section, quelques exemples de fonctions dans l'espace de Besov défini par la norme (2.40).

• Il est facile de se convaincre que la masse de Dirac à l'origine δ_0 appartient à l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{-N,\infty}$. En effet, il suffit d'utiliser la propriété d'homogénéité du noyau de la chaleur donnée par la proposition 2.2.1-(e) :

$$\|\delta_0\|_{\dot{B}_\infty^{-N,\infty}} = \sup_{t>0}\ t^{N/2}\|\delta_0 * h_t\|_\infty = \sup_{t>0}\|h_1(t^{-1/2}\cdot)\|_\infty = C.$$

• Plaçons nous maintenant sur le groupe de Heisenberg. Rappelons rapidement que la dimension homogène de $\mathbb{H}$ est $N = 4$, que le Laplacien est donné par $\mathcal{J} = -(X_1^2 + X_2^2)$ où X_i sont les champs de vecteurs donnés par (2.14) et que la norme est

$$|x| = [(x_1^2 + x_2^2)^2 + 16x_3^2]^{1/4}.$$

Nous avons alors le

Théorème 2.3.1 *Si $s > -4$ la fonction localement intégrable $f_s(x) = |x|^s$ appartient à l'espace $\dot{B}^{s,\infty}_{\infty}(\mathbb{H})$. Si maintenant $s < -4$ et $s \notin -2\mathbb{N}$, alors $pf|x|^s \in \dot{B}^{s,\infty}_{\infty}(\mathbb{H})$. Finalement, si $s \in -2\mathbb{N}$ et $s \leq -4$, alors $pf|x|^s \notin \dot{B}^{s,\infty}_{\infty}(\mathbb{H})$.*

Nous distinguons quatre cas pour la démonstration de ce théorème :

1. Soit $s \geq 0$. Si $s = 0$ il n'y a évidemment aucun problème : $1 \in \dot{B}^{0,\infty}_{\infty}$. Passons maintenant au cas $s > 0$. On tombe sur les espaces de Hölder $\dot{\mathcal{C}}^s$ que nous détaillerons au chapitre 4. Nous avons en effet $\dot{B}^{s,\infty}_{\infty} = \dot{\mathcal{C}}^s$. Voir par exemple [69] pour une preuve de cette identité dans les groupes stratifiés.

2. Soit $-4 < -s < 0$. Nous remarquons tout d'abord que $|x|^{-2}$ est une solution fondamentale du Laplacien (cf. [75]) :

$$\mathcal{J}(|x|^{-2}) = c\,\delta_0; \tag{2.41}$$

alors, par la proposition 2.3.2, on obtient $|x|^{-2} \in \dot{B}^{-2,\infty}_{\infty}(\mathbb{H})$.

Pour le cas général, nous utilisons le fait suivant : pour une fonction localement intégrable $f \geq 0$, on a équivalence entre $f \in \dot{B}^{-s,\infty}_{\infty}$ et $\int_{B(x_0,r)} f(x)dx \leq Cr^{4-s}$. Afin de vérifier cette dernière propriété quand $f(x)$ est homogène de degré $-s$, on fait le changement de variable $x = \delta_r[y]$.

Tout se ramène alors à vérifier $\int_{B(x_0,1)} |x|^{-s}dx \leq C$, uniformément en $x_0 \in \mathbb{H}$. Pour démontrer cette estimation, on distingue $|x_0| \leq 2$ et $|x_0| > 2$. Dans le premier cas, $x \in B(x_0, 1)$ implique $|x| \leq 3$ et donc

$$\int_{B(x_0,1)} |x|^{-s}dx \leq \int_{|x|\leq 3} |x|^{-s}dx = C.$$

Dans le second cas, $x \in B(x_0, 1)$ implique $|x| \geq 1$ et évidemment

$$\int_{B(x_0,1)} |x|^{-s}dx \leq |B(x_0, 1)| \leq C.$$

3. Soit maintenant $-s = -4$. Nous savons que $pf|x|^{-4} \notin \dot{B}^{-4,\infty}_{\infty}(\mathbb{H})$ puisque cette distribution n'est pas homogène de degré 4. Nous avons en effet

$$\langle pf|x|^{-4}, \varphi\rangle = \int_{|x|\leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^4}dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^4}dx.$$

Pour savoir si $pf|x|^{-4} \in \dot{B}_{\infty}^{-4,\infty}(\mathbb{H})$, on remplace $\varphi(x)$ par $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon^2)$. On a alors :

$$\langle pf|x|^{-4}, \varphi_\varepsilon \rangle = \int_{|x|\leq\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^4} dx + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^4} dx$$

La première intégrale tend vers 0 car $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^4} \in L^1_{loc}$. La seconde tend vers l'infini. Mais si $pf|x|^{-4} \in \dot{B}_{\infty}^{-4,\infty}(\mathbb{H})$, on devrait trouver $O(1)$.

4. Soit finalement $-s = -6$. Pour montrer que $pf|x|^{-6} \notin \dot{B}_{\infty}^{-6,\infty}$, on procède comme plus haut et l'on teste sur $\varphi(\delta_{1/\varepsilon}[x])$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\varphi = 1 - x_1^2 - x_2^2$ au voisinage de l'origine. On a alors :

$$I(\varepsilon) = \langle pf|x|^{-6}, \varphi_\varepsilon \rangle = \int_{|x|\leq 1} \frac{\varphi(\delta_{1/\varepsilon}[x]) - 1 + \frac{x_1^2}{\varepsilon} + \frac{x_2^2}{\varepsilon}}{|x|^6} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(\delta_{1/\varepsilon}[x])}{|x|^6} dx.$$

On fait le changement de variable $x = \delta_\varepsilon[y]$ et l'on obtient :

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|y|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(y) - 1 + y_1^2 + y_2^2}{|y|^6} dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|y|\leq R} \frac{\varphi(y) - 1 + y_1^2 + y_2^2}{|y|^6} dy + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R<|y|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(y) - 1 + y_1^2 + y_2^2}{|y|^6} dy.$$

Ici encore on obtient une singularité logarithmique. Si l'on avait $pf|x|^{-6} \in \dot{B}_{\infty}^{-6,\infty}$, on aurait dû trouver $O(\varepsilon^{-2})$.

Pour étudier en toute généralité ces cas, nous noterons

$$A^s(x) = [(x_1^2 + x_2^2)^2 + 16x_3^2]^s$$

de sorte que l'on ait $|x|^{4s} = A^s(x)$.

Nous considérons maintenant l'opérateur $M_s = \left(\mathcal{J}^2 + (1+2s)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$. Observons que cette opérateur M_s est continu de $\dot{B}_{\infty}^{s,\infty}$ dans $\dot{B}_{\infty}^{s-4,\infty}$.

Un calcul simple nous fournit l'identité suivante

$$M_s A^s(x) = 128 s^3 (1+2s) A^{s-1}(x).$$

Il en résulte que $|x|^s \in \dot{B}_{\infty}^{s,\infty}$ implique $|x|^{s-4} \in \dot{B}_{\infty}^{s-4,\infty}$.

■

Il est encore possible de donner beaucoup d'autres propriétés et caractérisations de ces espaces fonctionnels mais nous nous arrêtrons là pour ne pas alourdir l'exposé. Le lecteur trouvera plus de détails dans [69].

2.3.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Nous nous proposons ici de donner des normes équivalentes, comme on l'a fait dans la section 1.1.1 du chapitre précédent, pour les espaces fonctionnels que nous venons de définir.

Observons que du point de vue technique, une adaptation est nécessaire puisqu'on ne dispose pas, en toute généralité, de transformation de Fourier pour les groupes de Lie stratifiés. Nous utilisons alors une autre approche et l'outil qui nous permet la construction des blocs dyadiques est la résolution spectrale du Laplacien. Voici de quoi il s'agit :

Théorème - Définition 2.3.1 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié et soit $\mathcal{J}$ l'opérateur Laplacien défini par la formule (2.27). Nous avons alors la décomposition spectrale*

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda. \tag{2.42}$$

La preuve de ce théorème repose sur les propriétés du Laplacien et sur le cadre Hilbertien donné par l'espace L^2. Voir par exemple [55].

L'usage de la théorie spectrale est éclairé par le fait que l'on puisse construire de nouveaux opérateurs de la façon suivante :

Proposition 2.3.3 *Soit m une fonction borélienne bornée définie sur $]0, +\infty[$. Alors, l'opérateur $m(\mathcal{J})$ déterminé par l'identité*

$$m(\mathcal{J}) = \int_0^{+\infty} m(\lambda) \, dE_\lambda, \tag{2.43}$$

est borné sur $L^2(\mathbb{G})$ et admet un noyau de convolution M :

$$m(\mathcal{J})(f) = f * M \qquad (\forall f \in L^2(\mathbb{G})). \tag{2.44}$$

Ce résultat est complété grâce à la présence d'une structure de dilatation (cf. [31]) :

Lemme 2.3.1 *Soit m une fonction borélienne bornée sur $]0, \infty[$ et soit M le noyau de l'opérateur $m(\mathcal{J})$. Alors, pour tout $t > 0$, on construit un opérateur borné sur L^2 en posant $m_t(\mathcal{J}) = m(t\mathcal{J})$ dont le noyau associé est donné par*

$$M_t(x) = t^{-N/2} M(t^{-1/2} x). \tag{2.45}$$

Nous présentons un exemple afin de rendre ces aspects plus concrets :
Soit la fonction $m(t\lambda) = e^{-t\lambda}$ définie sur $]0, +\infty[$ avec $t > 0$. L'opérateur que l'on obtient ainsi est en fait le semi-groupe de la chaleur :

$$m(t\mathcal{J}) = \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \, dE_\lambda = H_t.$$

Si l'on considère son noyau, nous avons $m(t\mathcal{J})(f)(x) = f * h_t(x)$ et nous retrouvons la propriété homogène $h_t(x) = t^{-N/2} h_1(t^{-1/2} x)$.

Cette conclusion n'est cependant pas optimale puisqu'on savait déjà que le noyau de la chaleur appartient à la classe de Schwartz et pas seulement à L^2. Il est donc possible d'étendre le champ d'application de cette méthode pour des fonctions appartenant à des espaces autres que L^2. Voici comment on procède ; mais tout d'abord, posons une définition utile :

Soit $k \in \mathbb{N}$ et m une fonction de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+)$. On écrit

$$\|m\|_{(k)} = \sup_{\substack{1\le r\le k \\ \lambda>0}} (1+\lambda)^k |m^{(r)}(\lambda)|. \tag{2.46}$$

La formule ci-dessus nous donne une condition nécessaire pour obtenir certaines propriétés des opérateurs définis par (2.43) comme nous l'indique la

Proposition 2.3.4 *Soient $\alpha \in \mathbb{N}$, $I = (i_1, ..., i_n)$ un multi-indice et $p \in [1, \infty]$. Il existe une constante $C > 0$ et un entier k tels que, pour toute fonction $m \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+)$ avec $\|m\|_{(k)} < \infty$, le noyau M_t de l'opérateur $m(t\mathcal{J})$, $t > 0$, satisfait l'estimation*

$$\|(1+|\cdot|)^\alpha X^I M_t(\cdot)\|_p \le C(1+\sqrt{t})^\alpha t^{-(\frac{N}{2p'}+\frac{d(I)}{2})} \|m\|_{(k)}. \tag{2.47}$$

Ce résultat est accompagné du corollaire qui suit

Corollaire 2.3.1 *Soit $t > 0$*

1. *Soit m la restriction sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, le noyau M de l'opérateur $m(\mathcal{J})$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{G})$.*
2. *Soit m comme ci-dessus ; si en plus elle s'annule à tous les ordres au voisinage de l'origine, alors, le noyau M appartient à l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{G})$ formé des fonctions de la classe de Schwartz dont tous les moments sont nuls.*

Le lecteur trouvera une démonstration de ces deux résultats dans [46] et [36].

En particulier, et dans ces deux cas, l'opérateur $m_t(\mathcal{J})$ est borné de L^p dans L^p pour $1 \le p \le \infty$.

Nous allons appliquer ces résultats à la construction des blocs dyadiques. Nous nous intéressons principalement à la décomposition homogène, le cas inhomogène a été traité dans [36] dans un cadre plus général (cf. chapitre 7).

Voici le procédé :

Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que $\varphi = 1$ sur $]0, \frac{1}{4}[$ et $\varphi = 0$ sur $[1, \infty[$. Nous définissons la fonction ψ en écrivant

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda/4) - \varphi(\lambda) \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$ on fixe les dilatées de ψ par :

$$\psi_j(\lambda) = \psi(2^{-2j}\lambda)$$

Nous vérifions alors sans problème que l'on a l'égalité pour $\lambda > 0$:

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\lambda). \tag{2.48}$$

Il s'agit maintenant d'associer à chaque fonction ψ_j un bloc dyadique Δ_j. En utilisant le corollaire 2.3.1, nous avons :

$$\Delta_j(f)(x) = \psi_j(\mathcal{J})(f)(x) = f * M_j(x) \tag{2.49}$$

où chaque $M_j \in \mathcal{S}_0(\mathbb{G})$.

Alors, avec la formule de reconstruction (2.48), il nous est possible d'énoncer le résultat suivant (cf. [53]) :

Théorème 2.3.2 *Soit f une distribution tempérée définie, modulo les polynômes, sur $\mathbb{G}$. Nous avons alors la décomposition dyadique :*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \tag{2.50}$$

Ce théorème nous donne donc la décomposition de Littlewood-Paley sur les groupes de Lie stratifiés.

En combinant la proposition 2.3.4 et le lemme 2.3.1, on obtient les inégalités de Bernstein pour les blocs dyadiques :

Proposition 2.3.5 *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{G})$. Alors pour tout multi-indice $I = (i_1, ..., i_n)$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$ nous avons :*

$$\|X^I \Delta_j f\|_q \leq C \; 2^{j(d(I)+N(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \|\Delta_j f\|_p$$

où $1 \leq p, q \leq \infty$. La constante C dépend de I, p, q mais elle est indépendante de j et de f.

Voici une preuve inspirée de [53] :

Considérons la fonction auxiliaire $\tilde{\psi}(\lambda) = \varphi(\lambda/16) - \varphi(\lambda/4)$ de sorte que l'on ait l'identité

$$\tilde{\psi}(\lambda)\psi(\lambda) = \psi(\lambda).$$

Du point de vue des opérateurs nous avons

$$\Delta_j(f) = \psi(2^{-2j}\mathcal{J})(f) = \tilde{\psi}(2^{-2j}\mathcal{J})\psi(2^{-2j}\mathcal{J})(f) = \tilde{\psi}(2^{-2j}\mathcal{J})\Delta_j(f).$$

On notera $\tilde{M}_j$ le noyau de l'opérateur associé à la fonction $\tilde{\psi}$ qui vérifie les hypothèses du corollaire 2.3.1. Il vient alors, pour tout multi-indice $I = (i_1, ..., i_n)$,

$$X^I \Delta_j(f) = X^I \left(\tilde{\psi}(2^{-2j}\mathcal{J})\Delta_j(f) \right) = \Delta_j(f) * X^I(\tilde{M}_j).$$

Nous appliquons maintenant l'inégalité de Young avec $1 + 1/q = 1/p + 1/r$,

$$\|X^I \Delta_j(f)\|_q \leq \|\Delta_j(f)\|_p \|X^I(\tilde{M}_j)\|_r,$$

puis, étant donné que l'on a $\|X^I(\tilde{M}_j)\|_r \leq C\, 2^{jd(I)} 2^{Nj(\frac{r-1}{r})}$ car $\tilde{M}_j \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$, nous obtenons le résultat recherché :

$$\|X^I \Delta_j(f)\|_q \leq C\, 2^{jd(I)} 2^{Nj(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\Delta_j(f)\|_p.$$

■

Nous pouvons à présent donner les normes équivalentes avec une analyse de Littlewood-Paley par rapport à la décomposition (2.50) :

Théorème 2.3.3 *On a l'équivalence des normes suivantes pour les espaces homogènes de Lebesgue, Sobolev et Besov :*

$$\|f\|_p \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \qquad (1 < p < \infty) \tag{2.51}$$

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2sj} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \qquad (1 < p < \infty; s \in \mathbb{R}) \tag{2.52}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p} \simeq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qsj} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q} \qquad (1 \leq p, q \leq \infty; s \in \mathbb{R}) \tag{2.53}$$

La preuve de ces équivalences est classique une fois que l'on dispose de toutes les propriétés des blocs dyadiques que nous venons de décrire. Voir par exemple [75], [35], [73] & [36].

Invariance par translation

Il est important d'observer que tout ce qui a été dit depuis la section 2.2 p. 51 peut se retranscrire en employant les champs de vecteurs invariants à droite. En effet, jusqu'à présent nous avions supposé, pour fixer les notations, que les outils utilisés étaient invariants à gauche.

Les principales propriétés des espaces fonctionnels considérés se maintiennent si nous fixons cette fois-ci l'invariance à droite. Mais ces espaces ne seront pas les mêmes. Nous allons détailler un peu cette discussion.

Pour le voir plus clairement nous nous plaçons sur le groupe de Heisenberg et nous allons traiter les espaces de Sobolev. Pour plus de simplicité nous considérons des espaces homogènes dont l'indice de régularité est entier.

On distingue alors deux espaces selon leur invariance par rapport aux translations, que l'on notera $\dot{W}_g^{1,2}(\mathbb{H})$ et $\dot{W}_d^{1,2}(\mathbb{H})$ et que l'on caractérise par les normes suivantes :

$$\|f\|_g = \sum_{i=1,2} \|X_i f\|_2 \tag{2.54}$$

$$\|f\|_d = \sum_{i=1,2} \|Y_i f\|_2 \tag{2.55}$$

où l'expression des champs de vecteurs X_i et Y_i est donné par (2.14) et (2.16).

Ces deux espaces sont différents. En effet : soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$, on définit à l'aide de cette fonction la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $f_k(x) = f(a_k^{-1} \cdot x)$ où $a_k = (0, k, 0)$.

Il est facile de vérifier que la norme (2.54) dans $\dot{W}_g^{1,2}(\mathbb{H})$ des fonctions f_k est constante.

Nous allons voir tout de suite que nous obtenons $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ au sens de la norme (2.55) de $\dot{W}_d^{1,2}(\mathbb{H})$.

Pour cela, évaluons $Y_1 f_k(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_3})f_k(x)$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
Y_1 f_k(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(x_1, x_2 - k, x_3 + \frac{1}{2}kx_1) + \left(\frac{x_2 + k}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f\right)(x_1, x_2 - k, x_3\frac{1}{2}kx_1) \\
Y_1 f_k(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(x_1, x_2 - k, x_3 + \frac{1}{2}kx_1) + \left(\frac{x_2 - k}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f\right)(x_1, x_2 - k, x_3\frac{1}{2}kx_1) \\
&\qquad + k\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f\right)(x_1, x_2 - k, x_3 + \frac{1}{2}kx_1).
\end{aligned}$$

La norme L^2 du premier terme vaut $\|\frac{\partial}{\partial x_1} f\|_2$, la norme L^2 du deuxième terme vaut $\|x_2\frac{\partial}{\partial x_3} f\|_2$ et ces deux quantités sont bornées.

Mais la norme L^2 du troisième terme vaut exactement $k\|\frac{\partial}{\partial x_3} f\|_2$ et cette quantité dépend de k.

En raisonnant de façon similaire pour Y_2 on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 *Soit $a_k = (-k, k, 0)$ un élément de $\mathbb{H}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$. Alors la norme dans $\dot{W}_d^{1,2}(\mathbb{H})$ de $f_k(x) = f(a_k^{-1} \cdot x)$ tend vers $+\infty$ quand $k \to \infty$ tandis que la norme dans $\dot{W}_g^{1,2}(\mathbb{H})$ de ces fonctions est constante pour tout k.*

Remarque 2.4 Cette démarche se généralise sans problème aux autres groupes stratifiés grâce à la forme que prend la loi de groupe. Les espaces de Sobolev *à gauche* et *à droite* sont donc différents et ne coïncident que lorsque l'indice de régularité est nul puisque dans ce cas on obtient les espaces de Lebesgue. Pour les espaces de Besov on peut encore procéder de manière semblable.

Chapitre 3

Inégalités de Sobolev sur les groupes de Lie stratifiés

Nous généralisons aux groupes de Lie stratifiés les estimations que nous avons considérées dans le premier chapitre. Dans la section 3.1, on traitera les inégalités classiques qui sont bien connues dans ce cadre (cf. [81], [29]).

Les inégalités précisées seront détaillées dans les sections 3.2 et 3.3. Nous divisons, comme dans le cas euclidien, la démonstration en deux parties qui correspondent aux deux méthodes dont nous disposons pour mener à bon terme nos estimations.

Cette division se fait en fonction de la valeur du paramètre p qui caractérise l'espace de Sobolev qui est en jeu.

En effet, si $p > 1$, nous pouvons utiliser les caractérisations équivalentes avec les blocs dyadiques que nous avons détaillées dans le chapitre précédent. Il suffira alors, pour atteindre notre objectif, d'appliquer un argument d'interpolation au niveau des fonctions de Littlewood-Paley.

Toutefois, si $p = 1$, il nous faut utiliser une autre méthode qui se base, comme nous l'avons déjà vu sur $\mathbb{R}^n$, sur l'utilisation de la pseudo-inégalité de Poincaré. Nous proposons ici une généralisation de ce résultat qui nous permettra de considérer des inégalités faibles dans un premier temps, pour ensuite étudier des estimations fortes.

Nous terminerons ce chapitre en considérant des inégalités précisées faisant intervenir des poids de Muckenhoupt. On suivra ici aussi les mêmes étapes et méthodes exposées dans les deux sections précédentes.

Remarquons simplement que, dans le cas où $p > 1$, ces inégalités à poids découlent de la théorie générale, tandis que lorsque $p = 1$, il est nécessaire de réaliser une légère adaptation des arguments jusqu'à présent utilisés.

3.1 Estimations classiques

Les inégalités de Sobolev classiques ont été étudiées sur les groupes de Lie stratifiés (et même dans des cadres encore plus abstraits) par plusieurs auteurs, voir par exemple [81] et [29]. On se borne donc ici à une description très rapide de ces résultats bien connus, pour cela, nous allons avoir besoin de la définition suivante :

Définition 3.1.1 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié. Nous dirons qu'une distribution K_α est un noyau de type α si elle vérifie l'estimation $|K_\alpha(x)| \leq C\,|x|^{\alpha-N}$ et si elle est homogène de degré $\alpha - N$.*

L'utilité de cette définition est reflétée par la

Proposition 3.1.1 *Soient $0 < \alpha < N$, $1 < \alpha p < N$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$ et K_α un noyau de type α. Si f est une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{G})$, alors $f * K_\alpha$ appartient à $L^q(\mathbb{G})$:*

$$\|f * K_\alpha\|_q \leq C\|f\|_p.$$

Dans certains cas, les puissances fractionnaires de l'opérateur Laplacien défini par (2.27), peuvent s'exprimer en fonction d'un noyau de type homogène comme nous l'indique la

Proposition 3.1.2 *Soit $0 < \alpha < N$. Alors*

1. *l'intégrale*
$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{(\alpha/2)-1} h_t(x)dt$$
converge pour tout $\alpha \neq 0$ et R_α définit un noyau de type α.

2. *Si $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$, $f \in D(\mathcal{J}_p^{-\alpha/2})$ et si l'intégrale $g(x) = f * R_\alpha$ converge pour presque tout x ; alors on a l'égalité $\mathcal{J}^{-\alpha/2} f = g$.*

Avec tous ces résultats en main, dont les démonstrations peuvent être consultées dans [29], nous pouvons considérer le

Théorème 3.1.1 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié. On a alors :*

$$\|f\|_q \leq C\|\mathcal{J}^{\alpha/2} f\|_p \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < N$, $1 < \alpha p < N$ et $1/q = 1/p - \alpha/N$.

La preuve est directe : on pose $f_\alpha = \mathcal{J}^{\alpha/2} f \in L^p$ et on applique alors la proposition 3.1.2 de sorte que l'on ait $f = \mathcal{J}^{-\alpha/2} f_\alpha$. Il suffit maintenant pour estimer la norme L^q de l'expression précédente de considérer la proposition 3.1.1, puisque le noyau de cet opérateur est de type α.

L'objectif des sections qui suivent est de raffiner ces estimations de la même façon qu'il a été fait dans le premier chapitre.

Remarquons toutefois que le cas où $p = \alpha = 1$ ne découle pas de cette méthode. Ces inégalités seront traitées au chapitre 7.

3.2 Inégalités de Sobolev précisées, cas $p > 1$.

Nous pouvons maintenant mettre en œuvre les outils que nous avons développés dans le chapitre précédent. En effet, avec les caractérisations des espaces fonctionnels donnés par une analyse de Littlewood-Paley, nous sommes en mesure de présenter le résultat suivant qui est la généralisation du théorème 1.2.5 p. 28 au cadre des groupes de Lie stratifiés.

Théorème 3.2.1 *Soit $1 < p < q < \infty$ et $\theta = \frac{p}{q}$. Soient s, s_1 et β des indices réels tels que $s = \theta s_1 + (1-\theta)\beta$ de telle sorte que $-\beta < s < s_1$.*

Alors, pour toute fonction f telle que $f \in \dot{W}^{s_1,p}(\mathbb{G})$ et telle que $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{G})$, on a :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{s_1,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{3.2}$$

Ici C est une constante qui dépend de p, q et $\mathbb{G}$.

Le démonstration de ce théorème découle directement de l'application du lemme 1.2.1 p. 27 et des normes équivalentes données dans le chapitre précédent. On laisse donc la vérification au lecteur. Nous détaillerons cependant cette approche un peu plus tard, dans un cadre légèrement différent, lorsqu'on étudiera les inégalités à poids dans la section 3.4.

Remarque 3.1 Ce résultat a été démontré dans le groupe de Heisenberg par [6]. Observons que la construction des blocs dyadiques proposée est assez différente de celle que nous avons exposé dans le chapitre précédent. Elle fait appel à certaines propriétés très particulières des polynômes de Legendre et se prête mal à une généralisation à d'autres groupes.

Bien évidemment, pour étudier le cas où $p = 1$ cette approche n'est plus possible. Nous nous tournons alors vers un autre point de vue que nous explicitons dans les sections suivantes.

3.3 Inégalités de Sobolev précisées, cas $p = 1$.

Voici le théorème qu'on se propose de démontrer dans ce cadre des groupes de Lie stratifiés :

Théorème 3.3.1 *Soit $1 \leq p < q < \infty$. Pour toute fonction f telle que $\nabla f \in L^p(\mathbb{G})$ et telle que $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{G})$ nous avons l'estimation suivante :*

$$\|f\|_{q} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{1,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{3.3}$$

où $\theta = \frac{p}{q}$, $\beta = \theta/(1-\theta)$ et C est une constante qui dépend de p, q et $\mathbb{G}$.

Pour la preuve de ce résultat nous allons diviser notre étude en trois étapes. Premièrement, on traite une généralisation de la pseudo-inégalité de Poincaré, ensuite nous considérons des inégalités faibles pour terminer avec des inégalités fortes.

3.3.1 La pseudo-inégalité de Poincaré modifiée

Nous nous intéressons ici à la première étape de notre programme.

Théorème 3.3.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{G}$ telle que $\nabla f \in L^p$ et soit $0 \leq s < 1$ un réel fixé, nous avons alors la majoration :*

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f\|_p \leq C\, t^{\frac{1-s}{2}} \|\nabla f\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty) \tag{3.4}$$

où la constante $C = C_s$ dépend du groupe $\mathbb{G}$.

Remarquons que si $s = 0$, nous avons bien la majoration exprimée par la pseudo-inégalité de Poincaré usuelle (cf. proposition 1.2.2 p. 33).

Observons, pour commencer la démonstration, que les identités suivantes ont lieu :

$$(\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} m(t\lambda)dE_\lambda\right) t^{1-s/2}\mathcal{J}f(x), \tag{3.5}$$

ici nous avons noté

$$m(\lambda) = \lambda^{s/2-1}(1 - e^{-\lambda}) \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0, \tag{3.6}$$

où m est une fonction bornée qui tends vers 0 à l'infini car $s/2 - 1 < 0$.

Nous décomposons cette fonction en écrivant :

$$m(\lambda) = m_0(\lambda) + m_1(\lambda) = m(\lambda)\theta_0(\lambda) + m(\lambda)\theta_1(\lambda) \tag{3.7}$$

où nous avons choisi les fonctions auxiliaires $\theta_0(\lambda), \theta_1(\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ définies par :

- $\theta_0(\lambda) = 1 \quad \text{sur} \quad]0, 1/2] \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sur} \quad]1, \infty[,$

- $\theta_1(\lambda) = 0 \quad \text{sur} \quad]0, 1/2] \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{sur} \quad]1, \infty[,$

de sorte que $\theta_0(\lambda) + \theta_1(\lambda) \equiv 1$.

Nous obtenons ainsi la formule :

$$(\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} m_0(t\lambda)dE_\lambda\right) t^{1-s/2}\mathcal{J}f(x) + \left(\int_0^{+\infty} m_1(t\lambda)dE_\lambda\right) t^{1-s/2}\mathcal{J}f(x)$$

Si l'on note $M_t^{(i)}$ le noyau de l'opérateur déterminé par $\int_0^{+\infty} m_i(t\lambda)dE_\lambda$ pour $i = 0, 1$, nous avons :

$$(\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f)(x) = t^{1-s/2}\mathcal{J}f * M_t^{(0)}(x) + t^{1-s/2}\mathcal{J}f * M_t^{(1)}(x). \tag{3.8}$$

A partir de l'égalité (3.8) on obtient,

$$\left\|\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f\right\|_p \leq \left\|t^{1-s/2}\mathcal{J}f * M_t^{(0)}\right\|_p + \left\|t^{1-s/2}\mathcal{J}f * M_t^{(1)}\right\|_p \tag{3.9}$$

Nous allons majorer les deux termes de droite de (3.9) par les deux résultats suivants :

Proposition 3.3.1 *On dispose de l'estimation qui suit pour le premier terme de (3.9) :*

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(0)} \right\|_p \leq C t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \tag{3.10}$$

La vérification de ce résultat est simple puisque la fonction m_0 est la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction appartenant à la classe de Schwartz. Nous sommes alors dans les hypothèses du corollaire 2.3.1 : le noyau $M_t^{(0)}$ appartient donc à $\mathcal{S}(\mathbb{G})$. Nous allons appliquer ce résultat après avoir remarqué l'identité :

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(0)} \right\|_p = \left\| t^{1-s/2} \nabla f * \tilde{\nabla} M_t^{(0)} \right\|_p$$

où nous avons noté $\tilde{\nabla}$ le gradient formé des champs de vecteurs invariants à droite. Rappelons que l'on a dans ce cas $\nabla \varphi * \psi = \varphi * \tilde{\nabla} \psi$.

Il vient alors :

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(0)} \right\|_p \leq t^{1-s/2} \|\nabla f\|_p \|\tilde{\nabla} M_t^{(0)}\|_1.$$

Maintenant, par la proposition 2.3.4 nous avons que $\|\tilde{\nabla} M_t^{(0)}\|_1 \leq C\, t^{-1/2}$.

On obtient ainsi :

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(0)} \right\|_p \leq C t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p$$

■

Proposition 3.3.2 *Pour le deuxième terme de (3.9), nous avons :*

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(1)} \right\|_p \leq C t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \tag{3.11}$$

On découpe maintenant la fonction m_1 de la façon suivante :

$$m_1(\lambda) = \lambda^{s/2-1} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \theta_1(\lambda) = m_a(\lambda) - m_b(\lambda) \tag{3.12}$$

où l'on a posé : $m_a(\lambda) = \lambda^{s/2-1} \theta_1(\lambda)$ et $m_b(\lambda) = \lambda^{s/2-1} e^{-\lambda} \theta_1(\lambda)$.

On note $M_t^{(a)}$ et $M_t^{(b)}$ les noyaux associés à ces deux fonctions. Remarquons tout de suite que $m_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et qu'alors $M_t^{(b)} \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$. Nous avons le

Lemme 3.3.1

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(b)} \right\|_p \leq C t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \tag{3.13}$$

La preuve est directe et suit les mêmes étapes que celle de la proposition 3.3.1.

■

En revanche, nous traitons l'autre partie de (3.12) par le résulat suivant :

Lemme 3.3.2

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(a)} \right\|_p \leq C t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \tag{3.14}$$

Pour la preuve de ce lemme nous considérons une nouvelle fonction $\psi(\lambda) = \theta_0(\lambda/2) - \theta_0(\lambda)$ de sorte que l'on ait l'identité

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^{-j}\lambda) = \theta_1(\lambda).$$

Ainsi nous avons

$$m_a(t\lambda) = t^{s/2-1}\lambda^{s/2-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^{-j}t\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(1-s/2)} \tilde{\psi}(2^{-j}t\lambda)$$

où $\tilde{\psi}(\lambda) = \psi(\lambda)\lambda^{s/2-1}$ est une fonction $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. On note $\tilde{\psi}_{j,t}(\lambda) = \tilde{\psi}(2^{-j}t\lambda)$.

Par le corollaire 2.3.1, le noyau $\tilde{K}_{j,t}$ de l'opérateur associé à la fonction $\tilde{\psi}_{j,t}$ appartient à $\mathcal{S}_0(\mathbb{G})$. Il vient alors :

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(a)} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(1-s/2)} \left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * \tilde{K}_{j,t} \right\|_p .$$

En utilisant la définition du Laplacien et les propriétés des champs de vecteurs, nous avons :

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(a)} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(1-s/2)} t^{1-s/2} \|\nabla f\|_p \|\tilde{\nabla} \tilde{K}_{j,t}\|_1 .$$

Par le même corollaire 2.3.1 on obtient

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(a)} \right\|_p \leq C\, t^{(1-s)/2} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j(1-s/2)} 2^{j/2} t^{-1/2} \|\nabla f\|_p$$

$$\left\| t^{1-s/2} \mathcal{J} f * M_t^{(a)} \right\|_p \leq C\, t^{(1-s)/2} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \leq C\, t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p .$$

■

Avec les propositions 3.3.1 et 3.3.2 on complète la majoration de la formule (3.9), ce qui termine la preuve du théorème.

■

Il existe une autre façon de vérifier ce résultat. On peut, par exemple et comme dans le cas euclidien lorsque $s = 0$, utiliser l'estimation

$$\|f(\cdot) - f(\cdot\, y^{-1})\|_p \leq C|y| \|\nabla f\|_p$$

que nous démontrerons au chapitre prochain.

3.3.2 Des inégalités faibles

Ces premières estimations fournies par le théorème 3.3.2 nous permettent d'obtenir la majoration suivante :

Théorème 3.3.3 *Soit f une fonction définie sur un groupe stratifié $\mathbb{G}$ appartenant aux espaces de Sobolev $\dot{W}^{1,p}$ et de Besov $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$. Alors pour $1 \leq p < q < \infty$ et $0 \leq s < \frac{p}{q} < 1$ nous avons l'inégalité suivante :*

$$\|f\|_{\dot{W}_{\infty}^{s,q}} \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{3.15}$$

avec $\beta = \frac{p-sq}{q-p} > 0$, $\theta = p/q$ et C est une constante qui dépend de s, p, q et du groupe $\mathbb{G}$.

Ici on a posé $\|f\|_{\dot{W}_{\infty}^{s,q}} = \|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{q,\infty}$ et c'est dans ce sens que l'on parle d'inégalités faibles.

Il est probable que le théorème 3.3.3 puisse être amélioré en

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{3.16}$$

mais la preuve que nous donnerons ne permet pas d'établir ce résultat. La démonstration de cette inégalité dans $\mathbb{R}^n$ repose sur l'existence de bases orthonormées d'ondelettes comme nous le verrons au chapitre 5.

Revenons maintenant à la démonstration des estimations faibles (3.15).

Remarquons d'abord que l'opérateur $\mathcal{J}^{s/2}$ réalise un isomorphisme entre les espaces $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ et $\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}$ (cf. proposition 2.3.2). Ainsi (3.15) se réécrit comme :

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{q,\infty} \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}$$

C'est sur cette inégalité que nous allons appliquer l'outillage qui nous est désormais familier. Supposons tout d'abord que la norme $\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}$ est bornée et majorée par 1.

L'inégalité qu'on se propose de démontrer est la suivante :

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{q,\infty} \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}. \tag{3.17}$$

Il s'agit alors d'évaluer pour tout $\alpha > 0$ l'expression $\left|\{|\mathcal{J}^{s/2}f| > 2\alpha\}\right|$.

Si nous utilisons la caractérisation de l'espace de Besov en fonction du noyau de la chaleur, nous avons

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}} \leq 1 \iff \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{\beta+s}{2}}\|H_t\mathcal{J}^{s/2}f\|_{\infty}\right\} \leq 1.$$

Ainsi, si l'on pose $t_\alpha = \alpha^{-\left(\frac{2}{\beta+s}\right)}$, on obtient $\|H_{t_\alpha}\mathcal{J}^{s/2}f\|_{\infty} \leq \alpha$.
Observons qu'avec l'expression explicite du paramètre β on a $t_\alpha = \alpha^{-\frac{2(q-p)}{p(1-s)}}$.

Donc, étant donné que l'on dispose de l'inclusion d'ensembles

$$\left\{|\mathcal{J}^{s/2}f| > 2\alpha\right\} \subset \left\{|\mathcal{J}^{s/2}f - H_{t_\alpha}\mathcal{J}^{s/2}f| > \alpha\right\},$$

l'inégalité de Tchebytchev implique

$$\alpha^q \left|\{|\mathcal{J}^{s/2}f| > 2\alpha\}\right| \leq \alpha^{q-p}\int_{\mathbb{G}} |\mathcal{J}^{s/2}f - H_{t_\alpha}\mathcal{J}^{s/2}f|^p dx.$$

Nous utilisons alors la pseudo-inégalité de Poincaré modifiée, donnée par le théorème 3.3.2, pour majorer la partie de droite de l'inégalité précédente :

$$\alpha^q \left|\{|\mathcal{J}^{s/2}f| > 2\alpha\}\right| \leq C\alpha^{q-p}\, t_\alpha^{\frac{p}{2}(1-s)}\int_{\mathbb{G}} |\nabla f|^p dx. \tag{3.18}$$

Mais, étant donné le choix de t_α, on a $\alpha^{q-p}\alpha^{-\frac{2(q-p)}{p(1-s)}\frac{p(1-s)}{2}} = 1$.

Donc (3.18) entraîne la majoration

$$\alpha^q \left|\{|\mathcal{J}^{s/2}f| > 2\alpha\}\right| \leq C\|\nabla f\|_p^p\,;$$

en utilisant la définition (2.10) il vient

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{q,\infty}^q \leq 2^q C\|\nabla f\|_p^p$$

et nous obtenons le résultat annoncé.

■

3.3.3 Une inégalité forte

Supposons tout d'abord que $s = 0$ et remarquons encore une fois qu'en dehors de ce cadre nous ne savons pas comment obtenir des inégalités fortes à partir des estimations faibles (3.15).

Pour passer des majorations faibles à des estimations qui font intervenir des normes de Lebesgue, nous avons besoin d'une étape intermédiaire explicitée par la proposition suivante.

Proposition 3.3.3 *Rappelons que $1 \leq p < q < \infty$, $\theta = \frac{p}{q}$ et $\beta = \theta/(1-\theta)$. On a alors*

$$\|f\|_q \leq C\|f\|_{\dot{W}^{1,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}$$

lorsque les trois normes présentes dans cette inégalité sont finies.

Remarquons que la preuve de cette majoration est la même que celle donnée sur $\mathbb{R}^n$. Nous la détaillons toutefois pour la commodité du lecteur.

De même que dans le théorème précédent, on commencera par supposer que l'on a $\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}} \leq 1$. Ainsi, on doit démontrer la majoration

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^\theta. \tag{3.19}$$

Toujours par la définition thermique des espaces de Besov, on peut encore déterminer le paramètre t de la façon suivante : $t_\alpha = \alpha^{-2(q-p)/q}$ où $\alpha > 0$; nous avons alors l'estimation $\|H_t f\|_\infty \leq \alpha$.

Maintenant que nous travaillons avec la norme de l'espace L^q, on utilise la caractérisation donnée avec la fonction de distribution :

$$\frac{1}{5^q}\|f\|_q^q = \int_0^\infty |\{|f| > 5\alpha\}|\, d(\alpha^q). \tag{3.20}$$

Il s'agit à présent d'évaluer l'ensemble $\{|f| > 5\alpha\}$ et pour cela nous introduisons la même fonction de seuillage utilisée p. 35 :

$$\Theta_\alpha(t) = \begin{cases} \Theta_\alpha(-t) = -\Theta_\alpha(t) & \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \alpha \\ t - \alpha & \text{si} \quad \alpha \leq t \leq M\alpha \\ (M-1)\alpha & \text{si} \quad t > M\alpha \end{cases}$$

Ici, M est un paramètre qui dépend de q et que nous supposerons pour l'instant plus grand que 10. Cette fonction de coupure nous permet de définir un nouvelle fonction en posant $f_\alpha = \Theta_\alpha(f)$.

Lemme 3.3.3 *Voici quelques propriétés importantes de la fonction f_α :*

1. *L'ensemble défini par $\{|f| > 5\alpha\}$ est inclus dans l'ensemble $\{|f_\alpha| > 4\alpha\}$.*

2. *Sur l'ensemble $\{|f| \leq M\alpha\}$ on a l'estimation $|f - f_\alpha| \leq \alpha$.*

3. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{G})$, on a l'égalité $\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}}$ presque partout.*

Nous laissons la vérification de ce lemme au lecteur.

Revenons à présent à (3.20). Par le premier point du lemme ci-dessus nous avons la majoration :

$$\int_0^\infty |\{|f| > 5\alpha\}|\, d(\alpha^q) \leq \int_0^\infty |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}|\, d(\alpha^q) = I. \tag{3.21}$$

On note $A_\alpha = \{|f_\alpha| > 4\alpha\}$, $B_\alpha = \{|f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)| > \alpha\}$ et $C_\alpha = \{|H_{t_\alpha}(f_\alpha - f)| > 2\alpha\}$.

Maintenant, avec la propriété de linéarité de H_t on peut écrire :

$$f_\alpha = f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha) + H_{t_\alpha}(f_\alpha - f) + H_{t_\alpha}(f).$$

Alors, en tenant en compte du fait $\|H_t f\|_\infty \leq \alpha$, on obtient :

$$A_\alpha \subset B_\alpha \cup C_\alpha.$$

Cette inclusion d'ensembles nous donne l'inégalité suivante

$$I \leq \int_0^\infty |B_\alpha|\, d(\alpha^q) + \int_0^\infty |C_\alpha|\, d(\alpha^q) \tag{3.22}$$

On va étudier et majorer ces deux intégrales, que nous appelerons I_1 et I_2 respectivement, par les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.4 *Pour la première intégrale de (3.22) nous avons l'estimation :*

$$I_1 = \int_0^\infty |B_\alpha|\, d(\alpha^q) \leq C\, q \log(M) \|\nabla f\|_p^p \tag{3.23}$$

En effet, l'inégalité de Tchebytchev implique

$$|B_\alpha| \leq \alpha^{-p} \int_{\mathbb{G}} |f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)|^p dx.$$

En utilisant la pseudo-inégalité de Poincaré (3.4) avec $s = 0$ dans l'intégrale de droite on obtient :

$$|B_\alpha| \leq C\, \alpha^{-p}\, t_\alpha^{p/2} \int_{\mathbb{G}} |\nabla f_\alpha|^p dx$$

Rappelons que le choix de t_α fixé auparavant donne $t_\alpha^{p/2} = \alpha^{p-q}$, d'où

$$|B_\alpha| \leq C\, \alpha^{-q} \int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx$$

Nous intégrons à présent l'expression précédente par rapport à $d(\alpha^q)$:

$$I_1 \leq C \int_0^\infty \alpha^{-q} \left(\int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx \right) d(\alpha^q) = C\, q \int_{\mathbb{G}} |\nabla f|^p \left(\int_{\frac{|f|}{M}}^{|f|} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) dx$$

Il vient

$$I_1 \leq C\, q\, \log(M) \|\nabla f\|_p^p$$

On obtient la majoration souhaitée pour cette première intégrale.

■

Lemme 3.3.5 *Pour la deuxième intégrale de (3.22) on a le résultat suivant :*

$$I_2 = \int_0^\infty |C_\alpha|\, d(\alpha^q) \leq \frac{q}{q-1}\, \frac{1}{M^{q-1}} \|f\|_q^q \tag{3.24}$$

Pour la preuve de ce lemme, on pose :

$$|f - f_\alpha| = |f - f_\alpha|\mathbb{1}_{\{|f|\leq M\alpha\}} + |f - f_\alpha|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}.$$

Comme la distance entre f et f_α est inférieure à α sur l'ensemble $\{|f| \leq M\alpha\}$, on a l'inégalité

$$|f - f_\alpha| \leq \alpha + |f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}$$

En appliquant le semi-groupe de la chaleur des deux côtés de cette inégalité nous obtenons

$$H_{t_\alpha}(|f - f_\alpha|) \leq \alpha + H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}).$$

Nous avons alors l'inclusion d'ensembles suivante

$$C_\alpha \subset \left\{H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}) > \alpha\right\}.$$

Donc, en considérant la mesure de ces ensembles puis en intégrant par rapport à $d(\alpha^q)$, il vient

$$I_2 = \int_0^\infty |C_\alpha|\, d(\alpha^q) \leq \int_0^\infty \left|\{H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}) > \alpha\}\right| d(\alpha^q)$$

On obtient maintenant, en appliquant l'inégalité de Tchebytchev, l'estimation

$$I_2 \leq \int_0^\infty \alpha^{-1}\left(\int_{\mathbb{G}} H_{t_\alpha}\left(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}\right) dx\right) d(\alpha^q)$$

puis en utilisant le théorème de Fubini nous avons l'estimation

$$I_2 \leq q\int_{\mathbb{G}} |f|\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}\alpha^{q-2}d\alpha\right)dx = \frac{q}{q-1}\int_{\mathbb{G}} |f|\frac{|f|^{q-1}}{M^{q-1}}dx$$

D'où, finalement :

$$I_2 \leq \frac{q}{q-1}\frac{1}{M^{q-1}}\|f\|_q^q$$

Et la preuve de ce lemme est achevée.

■

Nous terminons la démonstration de la proposition en recollant ces deux lemmes, qui correspondent à nos deux intégrales, on a donc la majoration suivante :

$$\frac{1}{5^q}\|f\|_q^q \leq Cq\,\log(M)\|\nabla f\|_p^p + \frac{q}{q-1}\frac{1}{M^{q-1}}\|f\|_q^q$$

Rappelons que nous avons supposé toutes les normes finies et que $M >> 1$, alors il vient :

$$\left(\frac{1}{5^q} - \frac{q}{q-1}\frac{1}{M^{q-1}}\right)\|f\|_q^q \leq Cq\,\log(M)\|\nabla f\|_p^p$$

Ce qui montre l'inégalité forte (3.19).

■

La preuve du théorème 3.3.1 n'est pas encore totalement terminée. La dernière étape est fournie par la

Proposition 3.3.4 *Dans la proposition 3.3.3 il est possible de ne considérer que les deux hypothèses $\nabla f \in L^p$ et $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$.*

Rappelons que l'on a les relations suivantes entre les paramètres p, q, θ et β : $1 \leq p < q$, $\beta = \theta/(1-\theta)$ et $\theta = p/q$.

Pour la démonstration de cette proposition nous allons construire une approximation de f en écrivant :

$$f_j = S_j(f) - S_{-j}(f) = \left(\int_0^\infty \big(\varphi(2^{-2j}\lambda) - \varphi(2^{2j}\lambda)\big)\, dE_\lambda\right)(f) \tag{3.25}$$

où $\varphi = 1$ sur $]0, 1/4[$ et $\varphi = 0$ sur $[1, +\infty[$ est la fonction utilisée dans la décomposition de Littlewood-Paley p. 63.
Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 3.3.6 *Si $q > p$ et si $\nabla f \in L^p$, alors $f_j \in L^q$.*

Le point de départ pour la démonstration de ce lemme est donné par la relation qui suit :

$$f_j = \left(\int_0^\infty m(2^{-2j}\lambda)\, dE_\lambda\right) 2^{-2j}\mathcal{J}(f), \tag{3.26}$$

où nous avons noté

$$m(2^{-2j}\lambda) = \frac{\varphi(2^{-2j}\lambda) - \varphi(2^{2j}\lambda)}{2^{-2j}\lambda}.$$

Cette relation (3.26) a bien un sens car cette fonction m s'annule au voisinage de l'origine. Elle satisfait en outre les hypothèses du corollaire 2.3.1.

Nous obtenons alors l'identité suivante où $M_j \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$ est le noyau de l'opérateur $m(2^{-2j}\mathcal{J})$:

$$f_j = 2^{-2j}\mathcal{J}f * M_j = 2^{-2j}\nabla f * \tilde{\nabla} M_j.$$

On a écrit $\tilde{\nabla}$ le gradient formé des champs de vecteurs invariants à droite et on a utilisé la propriété (2.23) p. 50.

Calculons à présent la norme L^q dans l'identité précédente, il vient :

$$\|f_j\|_q = \|2^{-2j}\nabla f * \tilde{\nabla} M_j\|_q \leq 2^{-2j}\|\nabla f\|_p \|\tilde{\nabla} M_j\|_r.$$

La majoration de droite provient des inégalités de Young avec $1/r = 1 + 1/q - 1/p$. Finalement, par un changement de variable nous obtenons :

$$\|f_j\|_q \leq C\, 2^{j(N(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1)}\|\nabla f\|_p.$$

■

Grâce à cette estimation, on peut appliquer la proposition 3.3.3 à f_j dont la norme L^q est bornée, et l'on obtient :

$$\|f_j\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}.$$

Maintenant, parce que $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$, nous avons $f_j \rightharpoonup f$ au sens des distributions.

Il en résulte :

$$\|f\|_q \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_q \leq C\|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}.$$

Nous nous sommes alors restreint aux deux hypothèses initiales, à savoir $\nabla f \in L^p$ et $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$. Le théorème est maintenant complètement démontré pour les groupes stratifiés.

■

3.4 Inégalités à Poids

3.4.1 Définition et caractérisations

L'étude des poids de Muckenhoupt est très liée à celle des fonctions maximales. Nous faisons alors une petite digression pour exposer rapidement quelques unes des principales propriétés de ces fonctions.

Fonctions Maximales

Il existe plusieurs façons de définir les fonctions maximales dans les groupes de Lie stratifiés. Dans cette thèse on travaillera particulièrement avec les deux fonctions définies ci-dessous.

Définition 3.4.1 *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{G})$ et soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$.*
On définit la fonction maximale (non-tangentielle) avec l'expression suivante

$$\mathcal{M}_\varphi f(x) = \sup_{\substack{|x^{-1}\cdot y|<t \\ 0<t<\infty}} \{|f * \varphi_t(y)|\} \tag{3.27}$$

où nous avons posé $\varphi_t(x) = t^{-N/2}\varphi(t^{-1/2}x)$.

Nous définissons une autre fonction maximale par

$$\mathcal{M}_\varphi^0 f(x) = \sup_{0<t<\infty} \{|f * \varphi_t(x)|\} \tag{3.28}$$

Observons que ces définitions ont encore un sens si f et φ sont deux distributions telles que $(x,t) \longmapsto f * \varphi_t(x)$ soit une fonction continue définie sur $\mathbb{G}\times]0,\infty[$: par exemple, si $f \in L^p$ et $\varphi \in L^q$ où $1 \leq p \leq \infty$ et $1/p + 1/q = 1$.

Remarquons aussi que ponctuellement on a pour tout f et φ : $\mathcal{M}_\varphi^0 f \leq \mathcal{M}_\varphi f$.

Nous savons que ces fonctions maximales vérifient les propriétés explicitées par la proposition suivante (cf. [31]) :

Proposition 3.4.1 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié, alors :*

(a) Les fonctions maximales $\mathcal{M}_\varphi^0 f$ et $\mathcal{M}_\varphi f$ sont des fonctions mesurables de $\mathbb{G}$ dans $[0;\infty[$,

(b) Soit $\sigma > N$ et soit φ une fonction mesurable telle que $|\varphi(x)| \leq (1+|x|)^{-\sigma}$ (on a donc $\varphi \in L^q$ pour $1 \leq q \leq \infty$). Alors

i) pour tout $f \in L^1$ et $\alpha > 0$ on a : $|\{x : \mathcal{M}_\varphi f(x) > \alpha\}| \leq C_\sigma \, \alpha^{-1} \|f\|_1$;

ii) pour tout $f \in L^p$ avec $1 < p < \infty$: $\|\mathcal{M}_\varphi f\|_p \leq C_{\sigma,p} \|f\|_p$.

Un cas important est donné par la fonction de Hardy-Littlewood qui consiste à prendre comme fonction φ la fonction indicatrice de la boule unité :

$$\mathcal{M}_B f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Lemme 3.4.1 *Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{G}$ vérifiant $|\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-N-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors nous avons l'estimation suivante :*

$$\mathcal{M}_\varphi^0 f(x) \leq C \mathcal{M}_B f(x). \tag{3.29}$$

Nous utiliserons cette propriété par la suite et nous prions le lecteur de consulter la preuve dans [31].

Le lecteur peut consulter [31], [41] et [37] pour une étude plus détaillée de ces importantes fonctions. Pour notre part, nous allons nous intéresser aux liens existant entre la définition de ces fonctions et les poids de la section qui suit.

Poids de Muckenhoupt

Un *poids* est, d'une façon très générale, une fonction localement intégrable sur $\mathbb{G}$ à valeurs dans $]0,\infty[$. On utilise alors, étant donné un poids ω et un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{G}$, la notation suivante :

$$\omega(E) = \int_E \omega(x) dx. \tag{3.30}$$

On définira ainsi, pour $1 \leq p < \infty$, les espaces de Lebesgue à poids par :

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{G}} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} \tag{3.31}$$

Historiquement, la caractérisation de ces poids provient du problème suivant : on fixe $p \in]1, \infty[$ et on veut savoir pour quelles fonctions ω on dispose de l'estimation forte :

$$\int_{\mathbb{G}} \mathcal{M}_B f(x)^p \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{G}} |f(x)|^p \omega(x) dx \qquad (f \in L^p(\omega)). \tag{3.32}$$

Il s'en suit la condition suivante établie par Muckenhoupt et redémontrée par Coifman et Fefferman (cf. [41]) :

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < +\infty. \tag{3.33}$$

Nous avons alors la

Définition 3.4.2 *Soit $1 < p < \infty$. Nous dirons qu'un poids ω appartient à la classe des poids de Muckenhoupt A_p s'il vérifie la condition (3.33) .*

Nous allons de plus définir les poids dans la classe A_1 par la propriété :

$$\mathcal{M}_B\, \omega(x) \leq C\, \omega(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{G}). \tag{3.34}$$

Voici quelques exemples classiques :

- Le poids trivial $\omega(x) \equiv 1$ pour tout $x \in \mathbb{G}$.

- Soit la fonction $|x|^\alpha$, on peut alors voir facilement que cette fonction est dans A_p si et seulement si l'on a $-N < \alpha < N(p-1)$, où N est la dimension homogène du groupe. Pour le cas $p = 1$, la fonction $|x|^\alpha$ appartient à A_1 si et seulement si $-N < \alpha \leq 0$.

Indiquons finalement que nous disposons de l'inclusion suivante

Proposition 3.4.2 *Soit $1 < p < q < \infty$, alors*

$$A_1 \subset A_p \subset A_q \tag{3.35}$$

Nous prions le lecteur de consulter la preuve de ce résultat dans [37].

Espaces à poids

Nous allons maintenant introduire ces objets dans les définitions des espaces fonctionnels qui interviennent dans les inégalités de Sobolev précisées.

On déjà vu comment définir les espaces de Lebesgue à poids avec la formule (3.31). Remarquons que l'on dispose aussi d'une caractérisation avec la fonction de distribution

$$\|f\|^p_{L^p(\omega)} = \int_0^\infty p\sigma^{p-1}\omega(\{x : |f| > \sigma\})d\sigma. \tag{3.36}$$

Quant aux espaces L^p-faible, on posera :

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\omega)} = \sup_{\alpha>0}\{\alpha\ \omega(\{x : |f| > \alpha\})^{1/p}\}. \tag{3.37}$$

Pour les espaces de Sobolev et de Besov homogènes nous écrivons pour $\omega \in A_p$:

$$\|f\|_{\dot W^{s,p}(\omega)} = \|\mathcal{J}^{s/2} f\|_{L^p(\omega)} \qquad (1 < p < \infty) \qquad \text{et} \tag{3.38}$$

$$\|f\|_{\dot B^{s,q}_p(\omega)} = \left[\int_0^\infty t^{(m-s/2)q} \left\|\frac{\partial^m H_t f}{\partial t^m}(\cdot)\right\|^q_{L^p(\omega)} \frac{dt}{t}\right]^{1/q} \tag{3.39}$$

pour $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ et m un entier tel que $m > s/2$.

Remarque 3.2 Lorsque $p = \infty$ nous ne considérerons pas les poids de Muckenhoupt puisque dans ce cas, les espaces à poids $X^\infty(\omega)$ coïncident avec les espaces classiques X^∞ où X représente un espace de Lebesgue, de Sobolev ou de Besov (cf. [67]).

3.4.2 Résultats

Dans le cas des poids de Muckenhoupt appartenant à A_p, pour $p > 1$, il nous est possible de donner directement un résultat utilisant la théorie générale des estimations à poids (cf. [37]).

Voici de quoi il s'agit :

Théorème 3.4.1 *Soit $1 < p < q < \infty$ et soit ω un poids appartenant à la classe A_p. On considère s, s_1 et β des réels tels que $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ où $\theta = p/q < 1$ (rappelons que $-\beta < s < s_1$).*

Alors, pour toute fonction f telle que $f \in \dot W^{s_1,p}(\omega)$ et $f \in \dot B^{-\beta,\infty}_\infty$, nous avons la majoration

$$\|f\|_{\dot W^{s,q}(\omega)} \leq C\|f\|^\theta_{\dot W^{s_1,p}(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot B^{-\beta,\infty}_\infty} \tag{3.40}$$

Notre point de départ pour la démonstration de ce théorème est la décomposition de Littlewood-Paley. Nous pouvons alors utiliser le lemme 1.2.1 et l'appliquer aux blocs dyadiques pour obtenir l'estimation ponctuelle :

$$\|2^{js}\Delta_j(f)\|_{\ell^2} \leq C\|2^{js_1}\Delta_j(f)\|^\theta_{\ell^2}\|2^{-j\beta}\Delta_j(f)\|^{1-\theta}_{\ell^\infty}.$$

On multiplie cette inégalité par un poids ω appartenant à la fois à A_p et à A_q avant d'appliquer l'inégalité de Hölder, il vient

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\omega^2(x)|\Delta_j(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_q \leq C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js_1}\omega^2(x)|\Delta_j(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_p^\theta \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\beta j}\|\Delta_j(f)\|_\infty\right)^{(1-\theta)}$$

Ces quantités correspondent aux normes des espaces de Sobolev à poids $\dot{W}^{s,q}(\omega)$, $\dot{W}^{s_1,p}(\omega)$ et de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$.

Nous prions le lecteur de se référer au livre [37] pour voir la preuve de l'équivalence entre les caractérisations (3.38) et celles données ci-dessus par une décomposition de Littlewood-Paley.

Observons pour conclure qu'il suffit de supposer que ω appartienne à la classe A_p. En effet, lorsque $p < q$ nous disposons du fait remarquable $A_p \subset A_q$ donné par la proposition 3.4.2.

■

Remarque 3.3 Cette preuve s'applique telle quelle au cas où $\omega \equiv 1$, ce qui démontre le théorème 3.3.1.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le cas $p = 1$. Voici le résultat que l'on obtient :

Théorème 3.4.2 *Soit $\omega \in A_1$. Alors, pour toute fonction f telle que $\nabla f \in L^1(\omega)$ et $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$, nous avons la majoration*

$$\|f\|_{L^q(\omega)} \leq C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}$$

où $\theta = 1/q$ et $\beta = 1/(q-1)$.

De plus, si $0 < s < \frac{1}{q} < 1$ nous avons l'inégalité faible suivante :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}_{\infty}(\omega)} \leq C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}$$

avec $\beta = \frac{1-sq}{q-1} > 0$, $\theta = 1/q$ et C est une constante qui dépend de s, q et du groupe $\mathbb{G}$.

Bien évidemment on ne peut pas utiliser ici les fonctions de Littlewood-Paley et une autre approche est nécessaire. Il nous faut alors, pour démontrer ce théorème, une version "à poids" de la pseudo-inégalité de Poincaré. Cette estimation est traitée dans le résultat suivant :

Théorème 3.4.3 *Soit $\omega \in A_1$ et soit $\nabla f \in L^1(\omega)$. Nous avons alors l'estimation suivante pour $0 \leq s < 1$ et pour $t > 0$:*

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f\|_{L^1(\omega)} \leq C\, t^{\frac{1-s}{2}}\|\nabla f\|_{L^1(\omega)}. \tag{3.41}$$

Nous nous plaçons, pour plus de simplicité, dans le cas où le paramètre s vaut zéro.

La démonstration reprend essentiellement les mêmes arguments exposés dans la preuve du théorème 3.3.2. Le point de départ est la formule suivante

$$(f - H_t f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} m(t\lambda)dE_\lambda\right) t\mathcal{J}f(x) \tag{3.42}$$

où nous avons noté

$$m(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0. \tag{3.43}$$

Observons que m est une fonction bornée qui tend vers 0 à l'infini.

Nous décomposons cette fonction en écrivant :

$$m(\lambda) = m_0(\lambda) + m_1(\lambda) = m(\lambda)\theta_0(\lambda) + m(\lambda)\theta_1(\lambda) \tag{3.44}$$

où nous avons choisi encore une fois $\theta_0(\lambda), \theta_1(\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ définies par :

- $\theta_0(\lambda) = 1 \quad \text{sur} \quad]0, 1/2] \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sur} \quad]1, \infty[,$
- $\theta_1(\lambda) = 0 \quad \text{sur} \quad]0, 1/2] \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{sur} \quad]1, \infty[,$

de sorte que $\theta_0(\lambda) + \theta_1(\lambda) \equiv 1$.

Nous obtenons ainsi la formule :

$$(f - H_t f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} m_0(t\lambda) dE_\lambda\right) t\mathcal{J}f(x) + \left(\int_0^{+\infty} m_1(t\lambda) dE_\lambda\right) t\mathcal{J}f(x)$$

On note $M_t^{(i)}$ le noyau de l'opérateur déterminé par $\int_0^{+\infty} m_i(t\lambda) dE_\lambda$ pour $i = 0, 1$, nous avons alors :

$$(f - H_t f)(x) = t\mathcal{J}f * M_t^{(0)}(x) + t\mathcal{J}f * M_t^{(1)}(x) \tag{3.45}$$

On multiplie l'égalité ci-dessus par le poids ω et l'on obtient l'estimation

$$\int_{\mathbb{G}} |f(x) - H_t f(x)|\, \omega(x) dx \le \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J}f * M_t^{(0)}(x) \right| \omega(x) dx + \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J}f * M_t^{(1)}(x) \right| \omega(x) dx \tag{3.46}$$

Nous allons majorer les deux termes de droite de (3.46) par les deux propositions suivantes :

Proposition 3.4.3 *Nous avons la majoration ci-dessous pour la deuxième intégrale de (3.46) :*

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J}f * M_t^{(0)}(x) \right| \omega(x) dx \le C t^{1/2} \|\nabla f\|_{L^1(\omega)} \tag{3.47}$$

La fonction m_0 est la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction appartenant à la classe de Schwartz. Nous sommes dans les hypothèses du corollaire 2.3.1 que nous appliquons après avoir remarqué l'identité :

$$I = \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J}f * M_t^{(0)}(x) \right| \omega(x) dx = \int_{\mathbb{G}} \left| t\nabla f(x) * \tilde{\nabla} M_t^{(0)} \right| \omega(x) dx$$

où nous avons noté $\tilde{\nabla}$ le gradient formé des champs de vecteurs $(Y_j)_{1 \le j \le m}$.

Il vient alors :

$$I \leq \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} t|\nabla f(y)||\tilde{\nabla} M_t^{(0)}(y^{-1}\cdot x)|\omega(x)dxdy.$$

Par le corollaire 2.3.1, on a $M_t^{(0)} \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$ et, puisque $M_t^{(0)}(x) = t^{-N/2}M^{(0)}(t^{-1/2}x)$, nous pouvons écrire

$$K_t(x) = t^{1/2}|\tilde{\nabla} M_t^{(0)}(x^{-1})| \in L^1(\mathbb{G}).$$

On obtient ainsi :

$$I \leq \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} t^{1/2}|\nabla f(y)|\, K_t(x\cdot y^{-1})\omega(x)dxdy = \int_{\mathbb{G}} t^{1/2}|\nabla f(y)|\, \omega * K_t(y)dy.$$

Etant donné que nous avons, par la définition des fonctions maximales et par l'estimation (3.29) du lemme 3.4.1, l'inégalité :

$$\sup_{t>0} \omega * K_t(y) \leq C\ (\mathcal{M}_B\, \omega)\,(y),$$

il vient :

$$I \leq Ct^{1/2} \int_{\mathbb{G}} |\nabla f(y)| \mathcal{M}_B\, \omega(y)dy.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que, par hypothèse, $\omega \in A_1$ si et seulement si

$$(\mathcal{M}_B\, \omega)(\cdot) \leq C\ \omega(\cdot).$$

On obtient ainsi la majoration :

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(0)}(x)\right| \omega(x)dx \leq Ct^{1/2} \int_{\mathbb{G}} |\nabla f(y)|\omega(y)dy.$$

■

Proposition 3.4.4 *L'inégalité suivante a lieu pour la troisième intégrale de (3.46) :*

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(1)}(x)\right| \omega(x)dx \leq Ct^{1/2}\|\nabla f\|_{L^1(\omega)} \tag{3.48}$$

Ici, il est nécessaire une étape supplémentaire. On découpe alors la fonction m_1 de la façon suivante :

$$m_1(\lambda) = \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)\theta_1(\lambda) = m_a(\lambda) - m_b(\lambda) \tag{3.49}$$

où l'on a posé : $m_a(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\theta_1(\lambda)$ et $m_b(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\theta_1(\lambda)$.

On note $M_t^{(a)}$ et $M_t^{(b)}$ les noyaux associés à ces deux fonctions. Nous obtenons ainsi l'estimation

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(1)}(x)\right| \omega(x)dx \leq \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(a)}(x)\right| \omega(x)dx + \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(b)}(x)\right| \omega(x)dx \tag{3.50}$$

Remarquons que $m_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et qu'alors $M_t^{(b)} \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$. Nous avons le

Lemme 3.4.2

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(b)}(x) \right| \omega(x) dx \leq C t^{1/2} \|\nabla f\|_{L^1(\omega)} \tag{3.51}$$

La preuve est directe et suit les mêmes étapes que celles de la proposition précédente.

■

Nous traitons l'autre partie de (3.50) par le lemme suivant :

Lemme 3.4.3

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(a)}(x) \right| \omega(x) dx \leq C t^{1/2} \|\nabla f\|_{L^1(\omega)} \tag{3.52}$$

Pour la preuve de ce lemme nous considérons une fonction auxiliaire

$$\psi(\lambda) = \theta_0(\lambda/2) - \theta_0(\lambda) = \theta_1(\lambda) - \theta_1(\lambda/2)$$

de sorte que l'on ait l'identité

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^{-j}\lambda) = \theta_1(\lambda).$$

Ainsi nous avons

$$m_a(t\lambda) = \frac{1}{t\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^{-j} t\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \tilde{\psi}(2^{-j} t\lambda)$$

où $\tilde{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$ est une fonction $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Par le corollaire 2.3.1, le noyau $\tilde{K}$ de l'opérateur associé à la fonction $\tilde{\psi}$ appartient à $\mathcal{S}_0(\mathbb{G}) \subset L^1$.

Alors, du point de vue des opérateurs on a :

$$M_t^{(a)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \tilde{K}_{j,t}(x) \tag{3.53}$$

où $\tilde{K}_{j,t}(x) = 2^{N/2} t^{-N/2} \tilde{K}(2^{j/2} t^{-1/2} x)$.

Avec la formule (3.53) nous revenons à la partie de gauche de (3.52) :

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(a)}(x) \right| \omega(x) dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * \tilde{K}_{j,t}(x) \right| \omega(x) dx.$$

En utilisant la définition du Laplacien et les propriétés des champs de vecteurs, il vient :

$$\int_{\mathbb{G}} \left| t\mathcal{J} f * M_t^{(a)}(x) \right| \omega(x) dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} |\nabla f(y)| \tilde{\nabla} \tilde{K}_{j,t}(y^{-1} \cdot x)| \omega(x) dx dy.$$

On note cette fois-ci

$$K_{j,t}(x) = 2^{-j/2}t^{1/2}|\tilde{\nabla}\tilde{K}_{j,k}(x^{-1})|$$

pour obtenir, pour la partie de droite de l'expression précédente, la formule

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2}t^{1/2}\int_{\mathbb{G}}\int_{\mathbb{G}}|\nabla f(y)|K_{j,t}(x\cdot y^{-1})\omega(x)dxdy = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2}t^{1/2}\int_{\mathbb{G}}|\nabla f(y)|\,\omega * K_{j,t}(y)dy.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les mêmes arguments utilisés dans la proposition 3.4.3, à savoir l'hypothèse $\omega \in A_1$ et que pour $K_{j,t}$ on a

$$\sup_{j,t>0} \omega * K_{j,t}(y) \leq C\,(\mathcal{M}_B\,\omega)(y) \leq C\,\omega(y).$$

Il vient alors :

$$\int_{\mathbb{G}}\left|t\mathcal{J}f * M_t^{(a)}(x)\right|\omega(x)dx \leq C\,t^{1/2}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-j/2}\int_{\mathbb{G}}|\nabla f|(y)\omega(y)dy = C\,t^{1/2}\|\nabla f\|_{L^1(\omega)}.$$

■

Maintenant, nous mettons bout à bout ces résultats pour obtenir la conclusion du théorème 3.4.3 lorsque $s = 0$.

Si l'on veut traiter le cas où $0 < s < 1$, il suffit de considérer, au lieu la formule (3.42), l'expression :

$$(\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} m(t\lambda)dE_\lambda\right)t^{1-s/2}\mathcal{J}f(x)$$

où nous avons noté cette fois-ci

$$m(\lambda) = \lambda^{s/2-1}(1-e^{-\lambda}).$$

Le raisonnement est alors identique et suit les mêmes étapes déjà exposées.

■

Une fois que l'on dispose du théorème 3.4.3, la démonstration des inégalités de Sobolev précisées pour le cas $p = 1$ est identique à celle exposée précédemment dans les sections 3.3.2 et 3.3.3. Nous laissons les vérifications au lecteur.

Chapitre 4

Espace des fonctions à variation bornée sur les groupes stratifiés

Les motivations pour étudier cet espace sont multiples, que ce soit d'un point de vue théorique, avec des propriétés très intéressantes et des liens avec d'autres théories mathématiques (la théorie de la mesure géométrique notamment) ; que d'un point de vue appliqué où on le retrouve en particulier pour la modélisation de signaux réguliers par morceaux dans le traitement d'images [64].

Cet espace est composé des fonctions dont les dérivées, prises au sens des distributions, sont des mesures bornées et c'est dans ce sens que l'on parle de fonctions à **variation bornée** (BV pour *bounded variations*).

Les propriétés qu'il possède sont nombreuses et parfois surprenantes, voire déroutantes : bien qu'il se comporte de façon homogène par rapport aux dilatations, que sa norme soit invariante par translation et qu'elle admette plusieures caractérisations possibles, qu'il existe des inclusions continues dans des espaces bien connus (L^p par exemple) ; l'espace BV ne possède pas de base inconditionnelle (cf. [58]).

Ceci exclut, a priori, l'utilisation des ondelettes pour obtenir des estimations caractérisant cet espace de fonctions. Nous verrons cependant, au chapitre suivant, comment et dans quel sens contourner cet obstacle.

Puisque la démonstration que nous avons donnée des inégalités de Sobolev précisées nous permet de considérer le cas $p = 1$ et que la norme de l'espace des fonctions à variations bornées peut être caractérisée d'une certaine façon (que nous préciserons) par la norme L^1 du gradient ; il nous est possible de traiter ici quelques résultats intéressants, et ce dans le cadre des groupes stratifiés.

Nous traitons donc dans une première partie les définitions et propriétés (analytiques et géométriques) de cet espace de fonctions pour ensuite exposer nos résultats dans la section 4.3.

4.1 Introduction

Nous présentons dans les lignes qui suivent quelques résultats classiques bien connus de l'espace BV dans les groupes stratifiés. Nous utiliserons pour cela toutes les définitions, notations et propriétés des chapitres précédents.

Nous invitons toutefois le lecteur à consulter [4], [32], [33] et [60] pour plus de détails concernant cet espace.

Rappelons très rapidement notre cadre de travail : soit $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot, \delta)$ un groupe de Lie stratifié de dimension topologique n et de dimension homogène N. On notera $\mathfrak{g} = \bigoplus E_i$ son algèbre de Lie et on considérera $\{X_j\}_{1\leq j\leq m}$ une base de E_1.

Ces champs de vecteurs sont donc de degré homogène 1 et nous les utilisons pour définir un gradient et un Laplacien comme dans la section **2.1.3** du chapitre 2.

4.1.1 Espaces de Hölder

Nous avons souhaité de présenter ici ces espaces fonctionnels en dehors du cadre des espaces de Besov $B^{\alpha,\infty}_{\infty}$ étudiés[1] au chapitre 2. Ce choix correspond à un souci de commodité : quelques uns des arguments qui nous sont nécessaires pour le traitement des fonctions à variation bornée apparaissent assez naturellement lorsqu'on étudie les espaces de Hölder.

Venons-en à leur définition :

Définition 4.1.1 *Pour $0 < \alpha < 1$ on définit les espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{G})$ par la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|f(x\cdot y) - f(x)|}{|y|^\alpha} \tag{4.1}$$

Pour traiter le cas $\alpha = 1$ nous écrivons :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|f(x\cdot y) + f(x\cdot y^{-1}) - 2f(x)|}{|y|}$$

Finalement, si nous souhaitons considérer le cas $\alpha > 1$, on fixe un entier naturel k tel que $\alpha = k + \alpha'$ avec $0 < \alpha' < 1$ et nous dirons qu'une fonction f appartient à $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{G})$ si $X^I f \in \mathcal{C}^{\alpha'}(\mathbb{G})$ où $I = (i_1, ..., i_m)$ tel que $|I| \leq k$.

On munit alors cet espace de la norme suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|f\|_{\alpha'} + \sum_{|I|\leq k} \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha'}}.$$

[1]Rappelons que l'on a $B^{\alpha,\infty}_{\infty} = \mathcal{C}^\alpha$, pour $\alpha > 0$. Le lecteur peut trouver une démonstration de ce fait dans [69].

Observons que pour tout $\alpha > 0$, l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{G})$ est un espace de Banach avec la norme qui correspond à chacune des valeurs de α. Insistons finalement que ces espaces sont invariants à gauche.

Nous allons présenter très rapidement la version homogène de ces espaces lorsque $0 < \alpha < 1$. On définit alors l'espace $\dot{\mathcal{C}}^\alpha$ par :

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \sup_{x,y} \frac{|f(x \cdot y) - f(x)|}{|y|^\alpha}.$$

Donnons à présent un exemple d'une fonction appartenant à cet espace. Nous reprenons pour cela la fonction de la page 60 : $f_\alpha = |x|^\alpha$.

Il est alors immédiat de vérifier que l'on a $f_\alpha \in \dot{\mathcal{C}}^\alpha$. En effet, nous avons de façon évidente la majoration

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq ||x| - |y||^\alpha$$

car $t \to t^\alpha$ est hölderienne sur $[0, \infty[$. Enfin $||x| - |y|| \leq d(x,y)$, ce qui nous permet de conclure.

Nous exposons dans les lignes qui suivent quelques résultats des espaces de Hölder dont l'esprit nous sera utile par la suite.

Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 *Il existe une constante $C > 0$ et un entier k tels que tout $x \in \mathbb{G}$ peut être écrit $x = \Pi_{i=1}^k x_i$ avec $x_i \in \exp(E_1)$ et $|x_i| \leq A|x|$ pour $1 \leq i \leq k$.*

Nous prions le lecteur de consulter [29] pour une démonstration.

Muni de ce lemme, nous énonçons le résultat

Théorème 4.1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, si $X_j f \in L^p$ pour tout $1 \leq j \leq m$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :*

$$\|f(x \cdot y) - f(x)\|_p \leq C|y| \sum_{j=1}^m \|X_j f\|_p. \tag{4.2}$$

Pour la preuve de ce théorème nous suivons [69].

Supposons $y = \exp(Y)$ où $Y \in E_1$, alors

$$f(x \cdot y) - f(x) = \int_0^1 Y f(x \cdot \exp(tY))dt,$$

de telle sorte que l'on a

$$\|f(x \cdot y) - f(x)\|_p \leq \|Yf\|_p \leq |y| \sum_{j=1}^m \|X_j f\|_p.$$

Etant donné que tout élément y de $\mathbb{G}$ peut s'écrire comme $y = \Pi_{i=1}^{k} y_i$ avec $y_i \in exp(E_1)$ et que, par le lemme 4.1.1 on a $|y_i| \leq C|y|$, $i = 1, ..., k$; on obtient alors la décomposition suivante

$$f(x \cdot y) - f(x) = [f(xy_1...y_k) - f(xy_1...y_{k-1})] + ... + [f(xy_1y_2) - f(xy_1)] + [f(xy_1) - f(x)],$$

de sorte que :

$$\|f(x \cdot y) - f(x)\|_p \leq C \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i| \right) \left(\sum_{1}^{m} \|X_j f\|_p \right) \leq C|y| \sum_{1}^{m} \|X_j f\|_p.$$

■

Remarque 4.1 La majoration exprimée par la formule (4.2) avec $p = 1$ permet d'obtenir comme annoncé en fin de la section 3.3.1 du chapitre précédent, et de la même façon que dans le cas euclidien, la pseudo-inégalité de Poincaré sur les groupes de Lie stratifiés.

4.1.2 Définition de BV

Plusieurs auteurs ont étudié cet espace de fonctions pour une famille donnée de champs de vecteurs (cf. [38], [33]).

Nous suivons donc ici cette approche classique en fixant la famille de champs de vecteurs $X = \{X_1, ..., X_m\}$ décrite dans la page 90.

On utilise pour cela les fonctions auxiliaires m-vectorielles définies sur $\mathbb{G}$:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{G}, \mathbb{R}^m).$$

Nous considérons alors l'ensemble de fonctions

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{G}, \mathbb{R}^m) / \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

où ici on a posé $\|\varphi\|_\infty = \|(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2)^{1/2}\|_\infty$. Voici une première caractérisation de cet espace :

Définition 4.1.2 *On dira qu'une distribution tempérée f est à variation bornée (par rapport à la famille de champs de vecteurs X) si et seulement si les dérivées prises au sens des distributions $X_1 f$,...,$X_m f$, sont des mesures μ_1,...,μ_m de masse totale fine. On a alors :*

$$\|f\|_{BV} = \|\mu_1\| + ... + \|\mu_m\|. \tag{4.3}$$

Une définition équivalente est donnée ci-dessous :

$$\|f\|_{BV} = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \left\{ \int_{\mathbb{G}} f(x) \sum_{j=1}^{m} X_j^* \varphi_j(x) dx \right\} < +\infty \tag{4.4}$$

où X_j^* est l'opérateur adjoint à X_j dans L^2.

Remarque 4.2 Le lecteur attentif observera que cette définition n'est pas canonique. Il n'y a pas d'invariance par changement de base. C'est pourquoi on note souvent dans la littérature $BV_X(\mathbb{G})$ pour indiquer la dépendance de cet espace vis-à-vis de la famille de champs de vecteurs. Dans notre travail, nous fixons la famille X de la page 90 et nous conservons la notation utilisée dans la formule (4.3).

Exposons tout de suite deux propriétés évidentes : on considère d'abord la dilatée $f_\alpha = f(\alpha x)$ de f $(\alpha > 0)$ pour obtenir l'identité homogène suivante

$$\|f_\alpha\|_{BV} = \alpha^{1-N}\|f\|_{BV}.$$

Observons ensuite que si $f \in \dot{W}^{1,1}(\mathbb{G})$ on a, par une intégration par parties dans (4.4), l'égalité :

$$\|f\|_{BV} = \|\nabla f\|_1. \tag{4.5}$$

Nous avons alors l'inclusion d'espaces $\dot{W}^{1,1} \subset BV$.

Avant de passer à la suite nous donnons un exemple de fonction à variation bornée sur le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}$.

Rappelons que le gradient est donné par $\nabla = (X_1, X_2)$ où $X_1 = \partial_{x_1} - \frac{1}{2}x_2\partial_{x_3}$ et $X_2 = \partial_{x_2} - \frac{1}{2}x_1\partial_{x_3}$ et que la norme $|\cdot|$ est définie par la formule :

$$|x| = \left[(x_1^2 + x_2^2)^2 + 16x_3^2\right]^{1/4}.$$

Considérons maintenant un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction suffisamment régulière définie par $f(x) = 1/|x|^{4\alpha}$ si $|x| \leq C$ et à décroissance rapide à l'infini.

Nous nous intéressons donc au comportement de la fonction au voisinage de l'origine.

En appliquant les champs de vecteurs X_1 et X_2 à la fonction f nous obtenons :

$$X_1 f(x) = \frac{4\alpha}{[(x_1^2 + x_2^2)^2 + 16x_3^2]^{\alpha+1}}[4x_2x_3 - x_1(x_1^2 + x_2^2)]$$

et

$$X_2 f(x) = \frac{-4\alpha}{[(x_1^2 + x_2^2)^2 + 16x_3^2]^{\alpha+1}}[4x_1x_3 + x_2(x_1^2 + x_2^2)].$$

Il est alors facile de vérifier que $X_1 f$ et $X_2 f$ appartiennent à $L^1_{loc}(\mathbb{H})$ si et seulement si $\alpha < 3/4$ et on conclut que cette fonction appartient à l'espace BV.

Observons finalement que, pour ces valeurs de α, la fonction f appartient à l'espace $L^{4/3}$ et que cet exemple illustre l'inclusion $BV \subset L^{4/3}$. Nous reviendrons à ce type d'inclusions dans la section 4.3.

Une deuxième caractérisation de l'espace des fonctions à variation bornée est donné par la définition qui suit.

Définition 4.1.3 *Une fonction f appartient à $BV(\mathbb{G})$ si elle s'annule au sens faible à l'infini et s'il existe une constante C telle que l'on ait pour tout $y \in \mathbb{G}$:*

$$\int_{\mathbb{G}} |f(x \cdot y) - f(x)| dx \leq C|y| \tag{4.6}$$

Remarquons toutefois que cette caractérisation est *équivalente* et ne fournit pas la même norme que celle exprimée précédemment.

Montrons tout d'abord que (4.6) implique (4.4).

Pour cela, nous allons tester (4.6) sur $y = e_\alpha = (\alpha, 0, ..., 0)$ dont la norme $|y|$ vaut α. On obtient :

$$\frac{1}{\alpha}[f(x \cdot e_\alpha) - f(x)] \rightharpoonup X_1 f.$$

Le lemme de Fatou entraîne alors $\|X_1 f\|_1 \leq C$. On procède de la même manière pour les autres champs de vecteurs X_j.

L'implication (4.4) $\Rightarrow$(4.6) se déduit quant à elle du théorème 4.1.1.

Nous venons de vérifier le

Théorème 4.1.2 *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\|f(x \cdot y) - f(x)\|_1 \leq C|y|$

(b) $X_j f$ *sont des mesures de masse totale finie si* $1 \leq j \leq m$.

Il est important de remarquer ici que l'espace définit par (4.6) est différent de celui caractérisé par la condition suivante :

$$\int_{\mathbb{G}} |f(y \cdot x) - f(x)| dx \leq C|y|. \tag{4.7}$$

De façon équivalente, l'espace caractérisé par les champs de vecteurs invariant à gauche (4.4) est différent de celui définit par les champs de vecteurs invariants à droite $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq m}$.

Nous illustrons cette remarque par un contre exemple dans le groupe de Heisenberg[2].

On note BV_g l'espace définit par (4.6) ou (4.4) et BV_d l'espace définit par la condition :

$$Y_j f \text{ sont des mesures de masse totale finie si } 1 \leq j \leq m.$$

Pour voir que ces espaces ne sont pas les mêmes, on fixe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ et l'on écrit $\psi_a(x) = \psi(a^{-1} \cdot x)$ pour $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{H}$. Le lecteur peut vérifier par lui-même que

[2]Les notations sont celles du chapitre 2.

l'on a bien $\psi_a \in BV_g(\mathbb{H})$.

Cependant, si l'on considère l'espace invariant à droite les calculs sont différents. Détaillons-les :

$$\psi(a^{-1}\cdot x) = \psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right)$$

On évalue alors $Y_1 = \partial/\partial x_1 + \frac{1}{2}x_2\partial/\partial x_3$:

$$Y_1\psi_a(x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right)$$

$$+\frac{1}{2}(x_2 + a_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right).$$

Nous écrivons à présent :

$$Y_1\psi_a(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right)$$

$$+\left(\frac{x_2 - a_2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right)$$

$$+a_2\frac{\partial}{\partial x_3}\psi\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3 + \frac{1}{2}[a_2x_1 - a_1x_2]\right).$$

Lorsqu'on calcule la norme L^1 de ces termes, après un changement de variable, nous retrouvons $\|\frac{\partial}{\partial x_1}\psi\|_1$ et $\|x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\psi\|_1$, qui sont bien des quantités bornées, mais la partie $|a_2|\,\|\frac{\partial}{\partial x_3}\psi\|_1$ dépend de a_2.

En raisonnant de façon similaire pour Y_2 on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.1.2 *Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ un élément de $\mathbb{H}$ avec $a_1, a_2 \neq 0$. Alors la norme dans $BV_d(\mathbb{H})$ de ψ_a tend vers $+\infty$ quand $|a| \to \infty$ tandis que la norme dans $BV_g(\mathbb{H})$ de ces fonctions est constante.*

Cette distinction sépare ces espaces de fonctions selon leur invariance par translations à droite ou à gauche. Ceci étant dit nous fixons notre choix sur les espaces invariants par translations à gauche.

4.2 Principales propriétés

4.2.1 Propriétés analytiques

Nous exposons dans les deux lemmes ci-dessous les résultats dont nous aurons besoin pour les démonstrations des sections suivantes.

Lemme 4.2.1 *Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $BV(\mathbb{G})$ et si cette suite converge vers f au sens des distributions, alors f appartient à $BV(\mathbb{G})$ et on a la majoration*

$$\|f\|_{BV} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{BV}. \tag{4.8}$$

Pour une preuve de ce lemme on renvoie le lecteur à [4], [32].

Le résultat qui suit nous permet d'approcher les fonctions de BV par des fonctions différentiables :

Lemme 4.2.2 *Soit f une fonction à variations bornées sur $\mathbb{G}$, il existe alors une suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in BV(\mathbb{G}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$ telle que :*

- $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_{BV} = \|f\|_{BV}$.

Voir une démonstration dans [32].

Grâce à ce lemme, nous pouvons réduire quelques unes de nos vérifications aux fonctions différentiables pour lesquelles on a la propriété (4.5).

4.2.2 Propriétés géométriques

Nous commençons cette section par la définition :

Définition 4.2.1 *Soit $E \subset \mathbb{G}$ un ensemble mesurable. Nous dirons qu'un tel ensemble est à périmètre fini si*

$$P_{BV}(E) = \|\mathbb{1}_E\|_{BV} < +\infty. \tag{4.9}$$

La propriété qui nous intéresse le plus est la formule de *co-aire* qui nous permet de calculer la norme BV à partir des périmètres des ensembles de niveaux.

Fixons tout d'abord une notation :

Définition 4.2.2 *Soit $f \in BV(\mathbb{G})$ à valeurs réelles. Pour $t \in \mathbb{R}$ on définit l'ensemble de niveau par*

$$E_t = \{f(x) > t\}. \tag{4.10}$$

Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *Soit f une fonction à variation bornée définie sur $\mathbb{G}$. Nous avons :*

(a) Les ensembles de niveau sont presque tous à périmètre fini :

$$P_{BV}(E_t) < +\infty \qquad p.p.t. \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) La formule de co-aire est donnée par

$$\|f\|_{BV} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{BV}(E_t)\, dt. \tag{4.11}$$

Nous prions le lecteur de consulter une démonstration de ce résultat dans [38].

Il existe bien sûr d'autres propriétés géométriques importantes de ces espaces mais nous les passons sous silence pour ne pas alourdir notre exposé. Nous reprendrons une partie de cette discusion au chapitre prochain.

Le lecteur peut toutefois consulter [60] et [38] pour une étude plus détaillée de ces propriétés (qu'elles soient géométriques ou analytiques) sur les groupes stratifiés.

4.3 Quelques inégalités pour l'espace BV

Nous divisons notre étude en deux étapes où l'on reprend les idées des chapitres précédents pour les appliquer aux fonctions à variation bornée.

4.3.1 Résultats classiques

Nous commençons cette première partie par les relations bien connues entre l'espace BV et les espaces de Lebesgue, en particulier nous avons la

Proposition 4.3.1 *Soit $f \in BV(\mathbb{G})$ et soit N la dimension homogène du groupe $\mathbb{G}$, on a alors l'inégalité suivante :*

$$\|f\|_{N/(N-1)} \leq C\|f\|_{BV}. \tag{4.12}$$

Remarquons, avant d'attaquer la démonstration, que cette inégalité est invariante par rapport aux dilatations.

En effet, en posant $f_\alpha(x) = f(\delta_\alpha[x])$ pour $\alpha > 0$, on obtient par un calcul évident :

$$\|f_\alpha\|_{N/(N-1)} \leq C\|f_\alpha\|_{BV} \iff \alpha^{-(N-1)}\|f\|_{N/(N-1)} \leq \alpha^{1-N}C\|f\|_{BV}.$$

Passons maintenant à la preuve de la proposition 4.3.1.

Supposons d'abord que $f \in BV \cap \dot{W}^{1,1}$. L'estimation fondamentale (4.12) résulte alors du théorème 3.3.1 à condition de savoir que

$$L^{N/(N-1)} \subset \dot{B}_\infty^{-(N-1),\infty}. \tag{4.13}$$

Cette dernière inclusion se démontre en appliquant la définition *thermique* de l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{-(N-1),\infty}$:

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-(N-1),\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{N-1}{2}}\|H_t f\|_\infty.$$

Ainsi, si $f \in L^{N/(N-1)}$, nous avons la majoration suivante

$$\|H_t f\|_\infty \leq \|h_t\|_N \|f\|_{N/(N-1)};$$

qui nous permet d'obtenir l'inculsion (4.13) puisque l'on a $\|h_t\|_N = C(t^{1/2})^{(1-N)}$ (cf. chapitre 2).

Avec ce résultat, un simple passage à la limite nous permet d'obtenir le cas général.

■

Voici maintenant une première amélioration de (4.12) :

Théorème 4.3.1 *Soit f une fonction appartenant à $BV(\mathbb{G})$, alors la norme de f dans l'espace de Lorentz $L^{N/(N-1),1}$ est majorée par la norme de f dans BV :*

$$\|f\|_{N/(N-1),1} \leq C\|f\|_{BV}. \tag{4.14}$$

Pour la preuve de ce théorème nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *Soit $f \in BV \cap \mathcal{C}^\infty$ et soit $f_t = \mathbb{1}_{\{f(x)>t\}}$. Alors :*

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f_t \, dt \right\|_{N/(N-1),1} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_t\|_{N/(N-1),1} \, dt.$$

Voir une démonstration de ce lemme dans [84].

Remarquons à présent que, pour une fonction indicatrice d'ensemble, les normes L^p et $L^{p,1}$ sont égales.

Il suffit alors d'appliquer l'estimation fondamentale (4.12) à ces fonctions indicatrices et d'utiliser la formule de la co-aire (4.11) explicitée par le théorème 4.2.1, pour conclure avec un argument d'approximation.

■

Présentons finalement un exemple sur le groupe de Heisenberg qui illustre cette inclusion.

$$\text{Soit} \quad f(x) = \frac{1}{|x|^3 |\log|x||^\beta}, \quad \text{où } \beta > 0.$$

Alors, en suivant les calculs de la page 93, on a que $f \in BV$ si et seulement si $\beta > 1$. Dans ce cas nous avons aussi $f \in L^{4/3,1}$.

Observons qu'avec ces résultats nous avons la suite d'inclusions suivante :

$$\dot{B}^{1,1}_1 \subset \dot{W}^{1,1} \subset BV \subset L^{N/(N-1),1} \subset L^{\frac{N}{N-1}} \subset \dot{B}^{-1,\infty}_\infty$$

On se propose d'améliorer dans la section suivante les estimations classiques (4.12). Etant donné que cet espace n'admet pas caractérisation équivalente en fonction des blocs dyadiques, nous nous tournons vers l'approche exposée dans la section 3.3 du chapitre précédent.

4.3.2 Inégalités Précisées pour l'espace BV

Une fois que nous avons à notre disposition des estimations précisées faisant intervenir l'espace de Sobolev $\dot{W}^{1,1}$; nous pouvons déduire, grâce à un argument d'approximation, le théorème suivant :

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction définie sur un groupe de Lie stratifié $\mathbb{G}$ appartenant à l'espace BV et à l'espace de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$ où $\beta = 1/(q-1)$. On a alors, pour $1 < q < \infty$, l'inégalité suivante :*

$$\|f\|_q \leq C\|f\|_{BV}^{1/q}\|f\|^{1-1/q}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{4.15}$$

Il suffit en effet de prendre $f \in BV \cap \dot{W}^{1,1}$ pour obtenir cette estimation grâce au théorème 3.3.1. Le cas général s'obtient par un passage à la limite.

Nous exposons quelques corollaires importants.

Corollaire 4.3.1 *En posant, dans le théorème ci-dessus, $q = 2$; on obtient l'inégalité fondamentale suivante :*

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}} \tag{4.16}$$

Remarquons que ce résultat a premièrement été démontré dans le cadre euclidien par une méthode faisant intervenir (même si cela paraît surprenant) des coefficients d'ondelettes (cf. [19]). Ensuite des améliorations ont été proposée toujours en adoptant cette démarche. Nous ferons une discussion de tout ces aspects au chapitre suivant.

Ecrivons pour finir deux autres conséquences du théorème 4.3.2.

Corollaire 4.3.2 *Soit n la dimension topologique du groupe, on a alors, en posant cette fois-ci $q = \frac{n}{n-1}$, l'estimation :*

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq C\|f\|_{BV}^{1-1/n}\|f\|^{1/n}_{\dot{B}^{-(n-1),\infty}_{\infty}} \tag{4.17}$$

Corollaire 4.3.3 *Si maintenant $q = \frac{N}{N-1}$, où N est la dimension homogène du groupe, on a aussi :*

$$\|f\|_{N/(N-1)} \leq C\|f\|_{BV}^{1-1/N}\|f\|^{1/N}_{\dot{B}^{-(N-1),\infty}_{\infty}} \tag{4.18}$$

4.3.3 Résultats faibles

Nous avons vu au chapitre 3 qu'il était possible de considérer un espace de Sobolev dans la partie de gauche de l'inégalité (4.15). Toutefois, nos résultats étaient de type faible :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}_{\infty}} \leq C\|\nabla f\|_p^{\theta}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}$$

où $1 \leq p < q < \infty$ et le paramètre β est fixé pour préserver l'homogénéité de l'inégalité par rapport aux dilatations.

En utilisant un argument d'approximation dans le théorème 3.3.3 nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 4.3.4 *Soit $1 < q < \infty$ et soit f une fonction à variation bornée appartenant à l'espace de Besov $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ avec $\beta = \frac{1-qs}{q-1}$. Nous avons alors l'inégalité,*

$$\|f\|_{\dot{W}_{\infty}^{s,q}} \leq C\|f\|_{BV}^{1/q}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-1/q} \tag{4.19}$$

pour $0 \leq s < 1/q$.

Observons que nous ne savons pas comment obtenir des estimations fortes, à partir des inégalités (4.19), en utilisant les méthodes que nous avons décrites dans les chapitres précédents.

Est-il possible dans ce cas de contourner cette difficulté ? Une réponse est donnée (du moins dans le cadre euclidien) dans le chapitre qui suit.

Chapitre 5

Retour aux ondelettes

Oublions pour un instant les groupes de Lie stratifiés où nous avons exploré les possibilités et les avantages que nous offrait les variantes de la pseudo-inégalité de Poincaré. Nous avons vu aux chapitres précédents que, bien que l'on puisse traiter directement certains résultats, notre étude se heurtait à de sérieuses limitations ; en particulier pour le passage des inégalités faibles aux inégalités fortes.

Il est cependant possible, dans le cadre euclidien et en utilisant une toute autre approche, de donner une *presque* caractérisation de l'espace BV en terme de coefficients d'ondelettes qui permet d'obtenir des inégalités précisées fortes. De prime abord cette assertion semble dénuée de sens : l'espace des fonctions à variations bornées n'a pas de base inconditionnelle !

Précisons un peu nos propos. Tout espace fonctionnel se caractérise par une certaine propriété des coefficients d'ondelettes des fonctions de cet espace. Mais il y a deux cas possibles : soit cette propriété ne porte que sur les modules des coefficients (c'est ce qui définit les bases inconditionnelles), soit elle implique aussi les phases de ces coefficients (pas seulement les modules) et alors la propriété est inexploitable.

Ce que nous pouvons faire alors pour l'espace des fonctions à variation bornée, c'est d'*encadrer* la norme dans cet espace par une expression du type suivant

$$C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_{BV} \leq C_2\|\cdot\|_{**} \tag{5.1}$$

où les termes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_{**}$ font intervenir uniquement les modules des coefficients d'ondelettes.

On avait déjà souligné que l'on disposait de l'inclusion $\dot{B}_1^{1,1} \subsetneq BV$ et ce résultat constitue la première partie (celle de droite) de l'encadrement annoncé.

La deuxième partie découle quant à elle d'une estimation faible des coefficients d'ondelettes indexés sur les cubes dyadiques.

Nous allons détailler dans la section 5.1 cette estimation en utilisant comme cadre ambiant $\mathbb{R}^n$. Nous verrons par la suite que la généralisation aux groupes stratifiés présente quelques difficultés.

5.1 Le cas Euclidien

Une des premières applications de la théorie des ondelettes pour encadrer la norme de l'espace des fonctions à variation bornée peut se trouver dans l'article [19] où l'on trouve déjà l'essentiel des méthodes que nous exposons ici.

Cette approche consiste à utiliser une base d'ondelettes à support compact, en particulier la base de Haar et les cubes dyadiques, pour minorer avec des coefficients d'ondelettes la norme de l'espace BV. Quelque temps plus tard, une partie de ces auteurs ont amélioré ce procédé dans [20]. La conclusion de ces démarches est alors le théorème suivant qui donne des estimations fortes faisant intervenir les espaces BV, de Besov et de Sobolev :

Théorème 5.1.1 *Soit f une fonction à variation bornée définie sur $\mathbb{R}^n$. Soit $1 < q \leq 2$ et $0 \leq s < 1/q$, on fixe $\beta = \frac{1-qs}{q-1}$. Si de plus $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors nous avons l'estimation*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{BV}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}. \tag{5.2}$$

Observons que par cette méthode nous obtenons une version forte des inégalités exposées dans la section 4.3.3 du chapitre précédent.

Nous allons parcourir rapidement la démonstration de ce résultat. Le lecteur souhaitant voir tous les détails peut consulter [20] ou [58].

Pour cela, nous décomposons la preuve de ce théorème en trois parties : nous expliquons d'abord le travail préalable de renormalisation nécessaire, nous vérifions ensuite une estimation faible qui complète l'encadrement (5.1) pour finalement obtenir, avec un argument d'interpolation, la conclusion recherchée.

5.1.1 Renormalisation

Le point essentiel de ce paragraphe est la caractérisation des espaces fonctionnels intervenants dans l'inégalité (5.2) par les espaces de suites donnés par la définition 5.1.1.

Avant d'énoncer les résultats, il est nécessaire de renormaliser les ondelettes de façon différente. Nous commençons alors notre étude en considérant deux ondelettes ψ^0 et ψ^1 définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et à support compact. Pour $\epsilon \in V = \{0,1\}^n \setminus \{0,...,0\}$ on définit alors la fonction

$$\psi^\epsilon(x) = \psi^{\epsilon_1}(x_1)\cdots\psi^{\epsilon_n}(x_n).$$

Soit maintenant $\mathcal{D}$ l'ensemble des cubes dyadiques construit à partir du cube unité $Q = [0,1[^n$ par dilation et translation. En particulier, pour tout cube $I = 2^{-j}(k + [0,1[^n)$

dans $\mathcal{D}$, nous avons la formule suivante pour son volume : $|I| = 2^{-jn}$.

De plus, pour tout $\epsilon \in V$, nous définissons l'ondelette :

$$\psi_I^\epsilon(x) = 2^{j(n-1)}\psi^\epsilon(2^j x - k). \tag{5.3}$$

Observons qu'ici la normalisation des ondelettes est faite par rapport à l'espace BV et non plus par rapport à l'espace de référence L^2 : il existe alors deux constantes C_1 et C_2, dépendant uniquement des normes dans BV des fonctions ψ^1 et ψ^0, telles que

$$C_1 \leq \|\psi_I^\epsilon\|_{BV} \leq C_2.$$

Nous savons par la théorie générale des ondelettes que les fonctions $(\psi_I^\epsilon)_{I\in\mathcal{D},\epsilon\in V}$ forment un système orthogonal complet dans L^2.

Soit à présent f une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$, la décomposition par ondelettes de f est alors formellement définie par

$$f = \sum_{\epsilon,I} f_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \quad \text{où} \quad f_I^\epsilon = \langle f, \psi_I^\epsilon\rangle. \tag{5.4}$$

Nous passons maintenant aux définitions des espaces ℓ_γ^p qui nous permettrons de caractériser les espaces de Sobolev et de Besov dont nous avons besoin.

Définition 5.1.1 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et soit $1 \leq p \leq \infty$. On considère l'ensemble de suites $(m_I)_{I\in\mathcal{D}}$ indexées par les cubes dyadiques.*

1. *L'espace $\ell_\gamma^p(\mathcal{D})$ est défini par :*

$$\|(m_I)_{I\in\mathcal{D}}\|_{\ell_\gamma^p} = \left[\sum_{I\in\mathcal{D}} |I|^{(1-p)\gamma}|m_I|^p\right]^{1/p} \tag{5.5}$$

2. *L'espace $\ell_\gamma^{p,\infty}(\mathcal{D})$ est, quant à lui, défini par :*

$$\|(m_I)_{I\in\mathcal{D}}\|_{\ell_\gamma^{p,\infty}} = \sup_{\sigma>0} \sigma^p \sum_{|m_I|>\sigma|I|^\gamma} |I|^\gamma \tag{5.6}$$

Remarquons que, lorsque $\gamma = 0$, ces caractérisations correspondent aux espaces ℓ^p et ℓ^p-faible classiques.

De plus, si $p = 1$, on a l'égalité, pour tout γ, entre ℓ^1 et ℓ_γ^1.

En revanche, il faut noter qu'il n'y a pas d'inclusion naturelle pour les espaces $\ell_\gamma^{1,\infty}$ et les espaces ℓ^1-faible lorsque γ varie.

Nous allons maintenant caractériser les espaces de Besov $\dot{B}_p^{\sigma,p}$ avec des coefficients d'ondelettes f_I indexés sur les cubes dyadiques[1] de sorte à pouvoir utiliser les nouvelles définitions données ci-dessus.

Lemme 5.1.1 *Soit p' l'exposant conjugué de $1 < p \leq \infty$. Pour $\gamma = 1 + (\sigma - 1)p'/n$ on a la norme équivalente*

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\sigma,p}} \simeq \|f_I\|_{\ell_\gamma^p(\mathcal{D})}. \tag{5.7}$$

Nous observons que cette caractérisation est bien en accord avec celle des espaces de Besov par coefficients d'ondelettes, la différence réside dans l'usage des normes à poids ℓ_γ^p.
En effet, la définition usuelle est donnée par des ondelettes normalisées sur L^p,

$$\psi_{I,p} = |I|^{1/p' - 1/n} \psi_I,$$

avec leurs coefficients correspondants $f_{I,p}$. On obtient donc :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\sigma,p}} \simeq \|(|I|^{-\sigma/n} |f_{I_p}|)\|_{\ell^p(\mathcal{D})}. \tag{5.8}$$

Le lien entre les caractérisations (5.7) et (5.8) est alors donné par la formule

$$f_{I,p} = |I|^{1/n - 1/p'} f_I.$$

Plus particulièrement, pour les espaces de Besov qui entrent en jeu dans les inégalités (5.2) nous avons la relation :

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{\sigma,\infty}} = \|f_I\|_{\ell_\gamma^\infty(\mathcal{D})} \qquad \text{si } \gamma = 1 - \frac{\sigma - 1}{n}. \tag{5.9}$$

Etant donné que, pour $1 < p \leq \infty$, on a l'égalité d'espaces $L^p = \dot{B}_p^{0,p}$; nous sommes en mesure de donner une autre caractérisation des espaces de Lebesgue :

$$\|f\|_{L^p} = \|f_I\|_{\ell_\gamma^p(\mathcal{D})} \qquad \text{si } \gamma = 1 - \frac{p'}{n}. \tag{5.10}$$

Remarquons que cette approche ne permet pas de traiter les espaces de Besov du type $\dot{B}_p^{\sigma,q}$: il faut que les indices p et q soient égaux.

5.1.2 Caractérisation de BV

Nous allons donner, grâce au travail qui vient d'être présenté, un encadrement de la norme de BV par des termes faisant intervenir les espaces ℓ_γ^1 et $\ell_\gamma^{1,\infty}$.

Voyons cela un peu plus en détail.

Par la normalisation des ondelettes, si l'on a $(f_I)_{I \in \mathcal{D}} \in \ell^1(\mathcal{D})$, alors la fonction définie par $f = \sum_{I \in D} f_I \psi_I$ appartient à l'espace BV et vérifie :

[1] Nous omettons ici, par un abus de langage évident, la sommation sur le paramètre ε dans la formule (5.4)

$$\|f\|_{BV} \leq C\|(f_I)\|_{\ell^1(\mathcal{D})} \tag{5.11}$$

Avec cette majoration nous avons la première partie de l'encadrement recherché.

L'estimation de gauche de (5.1) est plus délicate à obtenir (cf. [20]) et fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 5.1.2 *Soit $\gamma < 1-1/n$ et soit $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Alors, la suite $(f_I)_{I\in\mathcal{D}}$ appartient à l'espace $\ell^{1,\infty}_\gamma(\mathcal{D})$. Plus précisément, il existe une constante $C = C(\gamma)$ telle que, pour toute fonction $f \in BV$ et pour tout $\epsilon > 0$ on ait :*

$$\sum_{|f_I|>\epsilon|I|^\gamma} |I|^\gamma \leq C\,\epsilon^{-1}\|f\|_{BV}. \tag{5.12}$$

Si l'on note par $bv(\mathcal{D})$ l'espace des coefficients d'ondelettes (indexés sur les cubes dyadiques) des fonctions de BV, on a l'inclusion : $bv(\mathcal{D}) \subset \ell^{1,\infty}_\gamma(\mathcal{D})$.

La preuve dans le cas du système de Haar apparaît pour la première fois dans [19]. Comme nous allons le voir, cette preuve ne fonctionne que pour le système de Haar. Mais le théorème 5.1.2 est également vrai pour des ondelettes régulières à support compact. Dans ce cas, la preuve est indirecte. Elle sera rappelée dans ce qui suit.

Cette estimation faible nous donne l'injection de bv dans $\ell^{1,\infty}_\gamma$. Nous obtenons *presque* une caractérisation de l'espace BV en termes d'ondelettes :

$$\ell^1_\gamma \subset bv(\mathcal{D}) \subset \ell^{1,\infty}_\gamma. \tag{5.13}$$

Nous allons commenter rapidement la démonstration de ce théorème pour mettre en lumière quelques points dont l'importance sera explicitée dans la section 5.3.

• La première étape utilise principalement les propriétés d'arborescence des cubes dyadiques. Introduisons quelques notations :

Définition 5.1.2 *Soit $f \in BV \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et soit g une fonction L^∞ supportée par $]0,1[^n$ telle que $\int g dx = 0$. Pour $I = 2^{-j}(]0,1[^n + k)$ un cube dyadique dans $\mathcal{D}$ on note $g_I = 2^j g(2^j \cdot -k)$.*

Nous définissons alors les quantités :

- $c_I(f) = |\langle f, g_I\rangle|$,
- $r_I(f) = |I|^{-1/n}\|f - m_I(f)\|_{L^1(I)}$,
- $\omega_I(f) = |I|^{-1-1/n}\int_I\int_I |f(x) - f(y)|dxdy$.

Observons que l'on a les relations suivantes entre ces objets

$$c_I(f) \leq \|g\|_\infty r_I(f) \quad et \quad r_I(f) \leq \omega_I(f). \tag{5.14}$$

On va étudier et donner des éléments de démonstration d'une inégalité légèrement différente de celle donnée par (5.12) :

$$\sum_{|c_I(f)|>\epsilon|I|^\gamma} |I|^\gamma \leq C\,\epsilon^{-1}\|f\|_{BV}. \tag{5.15}$$

Remarquons que cette estimation suffit dans le cas du système de Haar. Mais, dans les autres cas et si l'on dispose de la majoration ci-dessus, on ne peut pas remplacer tout simplement les coefficients $c_I(f)$ par les coefficients d'ondelettes f_I. Il existe toutefois une solution technique due à Yves Meyer [58] qui nous permet de faire le passage des quantités $c_I(f)$ à f_I.

Ceci étant dit, nous allons nous concentrer sur la preuve de (5.15) avec le

Lemme 5.1.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 5.1.2 nous avons*

$$\sum_{I\in\Lambda_\epsilon} |I|^\gamma \leq C\epsilon^{-1}\|f\|_{BV}, \tag{5.16}$$

où $\Lambda_\epsilon = \{I \in \mathcal{D}/\omega_I(f) > \epsilon|I|^\gamma\}$ *(nous utilisons le fait suivant* $c_I(f) \leq \omega_I(f)$*).*

Toujours en suivant [20], il est possible de voir qu'avec des décompositions très particulières de l'ensemble Λ_ϵ (qui utilisent les propriétés des cubes dyadiques ainsi que les relations (5.14)), nous pouvons réduire la vérification de l'estimation faible (5.16) à une majoration forte du type :

$$\sum_{I\in\mathcal{R}} \omega_I(f) \leq C\|f\|_{BV}, \tag{5.17}$$

où $\mathcal{R}$ est un "bon" sous-ensemble de Λ_ϵ.

Il suffit à présent de raisonner par convexité, car il s'agit maintenant d'une estimation dans un espace vectoriel normé. On utilise alors la formule de co-aire et on se limite aux fonctions indicatrices d'ensembles rectifiables.

Nous supposons sans perte de généralité (cf. [20]) que $f = \mathbb{1}_E \in BV$ où E est un ensemble à bord régulier tel que l'on ait soit $|E| < \infty$, soit $|E^c| < \infty$.

• L'étape suivante utilise les propriétés géométriques de l'espace BV :
Tout d'abord une définition :

Définition 5.1.3 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert. Nous dirons que* Ω *est une domaine d'isopérimétrie si, pour tout ensemble* E *à périmètre fini et à bord régulier, on a l'estimation :*

$$\min\{|E\cap\Omega|; |E^c\cap\Omega|\}^{1-1/n} \leq C\mathcal{H}^{n-1}(\Omega\cap\partial E). \tag{5.18}$$

où $\mathcal{H}^{n-1}$ *est la mesure de Hausdorff* $n-1$ *dimensionelle.*

Observons que les cubes euclidiens au même titre que les boules euclidiennes sont des domaines d'isopérimétrie.

Maintenant, avec l'inégalité (5.18) et en sommant sur tous les cubes qui intersectent le bord ∂E, on obtient :

$$\sum_{I\in\mathcal{R}^*}\omega_I(f)\leq C\mathcal{H}^{n-1}(\partial E),$$

où $\mathcal{R}^*=\{I\in\mathcal{R}:\min\{|E\cap I|;|E^c\cap I|\}>0\}$.

Nous utilisons à présent le fait $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)=\|\mathbb{1}_E\|_{BV}$ pour obtenir la majoration (5.17).

Etant donné que $\ell^1=\ell^1_\gamma\subset\ell^{1,\infty}_\gamma$, le lemme 5.1.2 implique l'inégalité (5.15) ce qui nous permet de conclure.

Le lecteur peut consulter tous les détails de la démonstration dans [20].

5.1.3 Applications aux inégalités

Notre point de départ pour utiliser les inclusions (5.13) dans les inégalités que nous nous proposons de vérifier est donné par le fait suivant (cf. [9]) :

Pour tout exposant $\gamma\in\mathbb{R}$ et pour $1<p\leq\infty$ nous avons le résultat d'interpolation

$$\ell^q_\gamma=\left(\ell^p_\gamma,\ell^1_\gamma\right)_{\theta,q}=\left(\ell^p_\gamma,\ell^{1,\infty}_\gamma\right)_{\theta,q} \tag{5.19}$$

si $0<\theta<1$ et si

$$\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p}+\theta.$$

Muni de cette égalité (5.19) nous obtenons l'estimation :

$$\|(\lambda_I)\|_{\ell^q_\gamma}\leq C\|(\lambda_I)\|^\theta_{\ell^{1,\infty}_\gamma}\|(\lambda_I)\|^{1-\theta}_{\ell^p_\gamma}, \tag{5.20}$$

où $(\lambda_I)_{I\in\mathcal{D}}$ est une suite de réels indexée par les cubes dyadiques.

Si maintenant les λ_I représentent les coefficients d'ondelettes f_I, en faisant l'identification de ces coefficients avec les espaces fonctionnels comme dans la section 5.1.1, nous obtenons le résultat suivant (cf. [20]) :

Théorème 5.1.3 *Supposons que $\gamma<1-1/n$ et soit (σ,p) tels que $\gamma=1+(\sigma-1)p'/n$ pour un certain $1<p\leq\infty$. Alors, pour tout $0<\theta<1$ on a :*

$$\dot{B}^{s,q}_q(\mathbb{R}^n)=\left(\dot{B}^{\sigma,p}_p(\mathbb{R}^n),BV(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \tag{5.21}$$

$$\textit{avec les valeurs}\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p}+\theta\quad \textit{et}\quad s=(1-\theta)\sigma+\theta.$$

Ceci nous permet d'obtenir un type d'inégalité donné par le corollaire qui suit

Corollaire 5.1.1 *Avec les mêmes notations précédentes nous avons :*

$$\|f\|_{\dot{B}_q^{s,q}} \leq C\|f\|_{BV}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_p^{\sigma,p}}^{1-\theta} \tag{5.22}$$

Remarquons qu'ici le paramètre σ appartient à l'intervalle $]-\infty, 1/p[$ et que $s \leq \frac{1-\theta}{p} + \theta$ pour vérifier les hypothèses du théorème.

En utilisant la proposition 1.1.1 nous savons que $\dot{W}^{s,2} = \dot{B}_2^{s,2}$ et nous disposons alors d'une inégalité qui fait intervenir les espaces de Sobolev (avec $\theta = 1/2$) :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,2}}^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{2s-1,\infty}} \tag{5.23}$$

Avec le théorème ci-dessus et avec cette identification d'espaces, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 5.1.4 *Si $\theta = 1/q$ et si $p = \infty$ on a*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{BV}^{1/q}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-1/q} \tag{5.24}$$

avec $0 \leq s < 1/q$, $1 < q \leq 2$ et $\beta = \frac{1-sq}{q-1}$.

Venons-en à la preuve. Nous utilisons l'inclusion $\dot{B}_q^{s,q} \subset \dot{W}^{s,q}$ pour $1 < q \leq 2$ et nous l'appliquons à la partie de gauche des inégalités (5.22). Insistons toutefois sur le fait que cette démonstration utilise toute la force du théorème 5.1.2 : sans cette estimation faible, rien de ce qui précède subsiste en dehors des résultats exposés au chapitre précédent.

On ne peut donc que rapprocher cette inégalité avec celle trouvée dans le corollaire 4.3.4 p. 100. Nous remarquons qu'ici nous avons des inégalités fortes.

Cependant, si dans cette majoration nous avons bien une estimation plus forte, elle n'est valable que si $1 < q \leq 2$, tandis que dans (4.19) on a plus de liberté puisque le paramètre q est dans l'intervalle $]1, \infty[$.

5.2 Contre exemples

Dans tout ce paragraphe nous nous plaçons dans l'espace euclidien et nous considérons encore une fois l'inégalité :

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \tag{5.25}$$

que nous avons démontrée au chapitre 4 en utilisant la méthode de M. Ledoux.

Nous avons vu également comment une minoration de la norme de l'espace BV par une norme ℓ^1-faible nous permettait d'obtenir cette même estimation (5.25).

Grâce au traitement expliqué dans les sections ci-dessus, cette inégalité se réécrit en terme de coefficients d'ondelettes comme

$$\|f_I\|_{\ell^2_\gamma}^2 \leq C\|f_I\|_{bv}\|f_I\|_{\ell^\infty_\gamma} \qquad (\gamma = 1 - 2/n) \tag{5.26}$$

Dans cette section, nous souhaitons savoir s'il est possible de combiner ce résultat particulier, qui se démontre sans ondelettes, avec le fait général suivant

$$\|x\|_{\ell^2}^2 \leq C\|x\|_*\|x\|_{\ell^\infty} \Longrightarrow \|x\|_{\ell^{1,\infty}} \leq C\|x\|_*$$

pour obtenir une nouvelle preuve du théorème 5.1.4.

Autrement dit, l'approche proposée par M. Ledoux fournit-elle une nouvelle preuve du théorème A. Cohen ?

Ou encore, en termes plus généraux, si l'on dispose d'une certaine norme $\|\cdot\|_*$ sur un espace de suites vérifiant l'estimation

$$\|x\|_{\ell^2}^2 \leq C\|x\|_*\|x\|_{\ell^\infty}, \tag{5.27}$$

pouvons-nous obtenir la majoration

$$\|x\|_{\ell^{1,\infty}} \leq C\|x\|_* \quad ? \tag{5.28}$$

L'intérêt de cette démarche réside dans le fait que si (5.27) implique (5.28) on serait alors en mesure d'en déduire toutes les inégalités étudiées dans la section 5.1.3 en suivant le même procédé d'interpolation.

Nous souhaitons appliquer cette démarche au groupe de Heisenberg où l'on dispose de l'inégalité fondamentale (5.25) grâce aux résultats du chapitre précédent.

Malheureusement l'implication (5.27) $\Longrightarrow$ (5.28) est fausse : nous pouvons exhiber des normes telles que (5.27) soit vraie, mais pour lesquelles la propriété (5.28) est mise en défaut.

Nous nous proposons, dans les pages suivantes, de construire diverses normes $\|\cdot\|_*$ qui soient définies sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui illustrent que cette implication n'a pas lieu. Cette étude fera donc l'objet des théorèmes suivants où l'on notera par commodité $\|\cdot\|_q$ au lieu de $\|\cdot\|_{\ell^q}$ et $\|\cdot\|_{1,\infty}$ pour $\|\cdot\|_{\ell^{1,\infty}}$.

Voici notre premier théorème :

Théorème 5.2.1 *Il existe un espace de Banach E de suites $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant :*

(a) $\ell^1(\mathbb{N}) \subset E$ *et la codimension de* $\ell^1(\mathbb{N})$ *dans* E *est infinie.*

(b) $\|x\|_2^2 \leq C\|x\|_E\|x\|_\infty$

(c) il n'existe pas de constante telle que l'on ait, pour toute suite $x \in \ell^1$

$$\|x\|_{1,\infty} \leq C\|x\|_E$$

au sens où, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \, Card\{n \in \mathbb{N};\ |x_n| > \lambda\} \leq C\|x\|_E.$$

Pour la démonstration de ce théorème nous commençons par la construction d'une nouvelle norme sur $\mathbb{R}^N$, où N est un entier fixé. On considère le vecteur $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ que nous décomposons de façon optimale en

$$x_n = y_n + \lambda n^{-2/3} \qquad (1 \leq n \leq N \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}) \tag{5.29}$$

afin de minimiser, sur l'ensemble de ces décompositions, la fonctionnelle :

$$\omega(y) = \sum_{n=1}^{N} |y_n| + |\lambda|. \tag{5.30}$$

On définit alors la norme

$$\|x\|_* = \inf \omega(y) \tag{5.31}$$

où la borne inférieure est calculée sur l'ensemble de toutes les décompositions (5.29).

Nous obtenons la

Proposition 5.2.1 *Il existe une constante absolue C telle que l'on ait, pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, la majoration*

$$\|x\|_2^2 \leq C\|x\|_*\|x\|_\infty \tag{5.32}$$

On pose $\epsilon = \|x\|_\infty$ et l'on appelle $\lambda = \lambda(x)$ la valeur optimale de λ telle que

$$\|x\|_* = \sum_{n=1}^{N} |y_n| + |\lambda|. \tag{5.33}$$

Pour vérifier (5.32), on commence par considérer le cas $|\lambda| \geq 10\epsilon$. On traitera ensuite le cas $|\lambda| < 10\epsilon$.

Si $|\lambda| \geq 10\epsilon$:

Dans ce premier cas, on définit un entier N_0 par la relation

$$N_0 \leq \left(\frac{|\lambda|}{2\epsilon}\right)^{3/2} < N_0 + 1.$$

- On suppose d'abord que $N \geq N_0$ et on écrit alors :

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^2}_{1} + 2 \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{N} |y_n|^2}_{2} + 2 \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{N} \lambda^2 n^{-4/3}}_{3} \tag{5.34}$$

Nous allons majorer ces trois termes par trois lemmes différents.

Lemme 5.2.1 *Nous nous intéressons au premier terme de la somme. On a alors l'estimation*

$$\sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^2 \leq \epsilon \|x\|_* \tag{5.35}$$

En effet, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^2 \leq \epsilon^2 N_0 = \epsilon(N_0\epsilon)$$

par une première majoration (nous avons utilisé $\epsilon = \|x\|_\infty$).

Or si $1 \leq n \leq N_0$ on a, par définition de N_0 : $|\lambda| n^{-2/3} \geq 2\epsilon$.

Alors, comme $x_n = y_n + \lambda n^{-2/3}$, nous avons

$$|y_n| \geq |\lambda| n^{-2/3} - |x_n| \geq \epsilon$$

et donc $\|x\|_* \geq \epsilon N_0$.

Ainsi, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^2 \leq \epsilon(N_0\epsilon) \leq \epsilon \sum_{n=1}^{N_0} |y_n| \leq \epsilon \|x\|_*$$

d'où le résultat.

■

Remarque 5.1 On a, par définition de N_0, la majoration $N_0\epsilon \leq \sum_1^{N_0} |y_n| \leq \|x\|_*$.

Cette observation nous sera utile par la suite. Nous passons à la deuxième somme avec le

Lemme 5.2.2 *On dispose de la majoration suivante*

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} |y_n|^2 \leq 3\epsilon \|x\|_* \tag{5.36}$$

Maintenant nous sommes dans le cas où $N_0 + 1 \leq n \leq N$.

Alors, toujours par la définition de N_0, on a l'estimation : $|\lambda| n^{-2/3} \leq 2\epsilon$.

Donc nous avons l'inégalité $|y_n| \leq |x_n| + |\lambda| n^{-2/3} \leq 3\epsilon$ et alors :

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} |y_n|^2 \leq 3\epsilon \sum_{n=N_0+1}^{N} |y_n| \leq 3\epsilon \|x\|_*.$$

■

Enfin, la troisième somme est majorée par le

Lemme 5.2.3

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \lambda^2 n^{-4/3} \leq 12\epsilon\|x\|_* \tag{5.37}$$

Nous avons l'estimation

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \lambda^2 n^{-4/3} = |\lambda|^2 \sum_{n=N_0+1}^{N} n^{-4/3} \leq |\lambda|^2 \int_{N_0}^{\infty} x^{-4/3} dx = 3|\lambda|^2 N_0^{-1/3}$$

Etant donné que l'on a $\epsilon = \frac{|\lambda|}{2} N_0^{-2/3}$, il vient : $|\lambda|^2 N_0^{-1/3} = 4N_0\epsilon^2$ et, par le fait que $N_0\epsilon \leq \|x\|_*$ (cf. Remarque 5.1), nous avons :

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \lambda^2 n^{-4/3} \leq 12\epsilon\|x\|_*$$

■

Nous rassemblons tous ces résultats (5.35)-(5.37) pour obtenir la majoration de (5.34) :

$$\sum_{n=1}^{N} |x|^2 \leq C\epsilon\|x\|_*$$

et nous avons fini l'étude du cas $N_0 \leq N$.

- Pour $N_0 > N$ on procède tout simplement comme suit :

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{N_0} |x|^2 \leq \epsilon\|x\|_*$$

et cette estimation découle directement du Lemme 5.2.1.

■

<u>Si $|\lambda| < 10\epsilon$</u> :

Ici, nous pouvons majorer brutalement la somme pour obtenir deux termes

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq 2\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2}_{1} + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |\lambda|^2 n^{-4/3}}_{2}$$

- Pour le premier terme, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$|y_n| \leq |x_n| + |\lambda| n^{-2/3} \leq \epsilon + 10\epsilon$$

et alors

$$\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2 \leq 11\epsilon \sum_{n=1}^{N} |y_n| \leq 11\epsilon \|x\|_*.$$

• Pour le deuxième terme on utilise la majoration suivante

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda|^2 n^{-4/3} \leq 10|\lambda|^2\epsilon \sum_{n=1}^{N} n^{-4/3} \leq 10|\lambda|^2\epsilon \int_1^N x^{-4/3}dx \leq 30\epsilon|\lambda|^2 \leq 30\epsilon\|x\|_*.$$

Et il ne reste plus qu'à regrouper les deux sommes pour obtenir ce deuxième cas.

■

Remarque 5.2 Cette proposition reste valable si l'on considère une intégrale au lieu d'une somme dans l'inégalité (5.27) : nous ne sommes pas limité par l'aspect discret de cette problématique et l'on retrouve le même résultat avec l'espace $L^1([1, \infty[)$.

Le rôle du paramètre 2/3 dans la définition (5.29) peut sembler arbitraire, il est en fait choisi pour que le contre exemple fonctionne et peut être remplacé par n'importe quel réel α vérifiant $1/2 < \alpha < 1$.

Nous allons maintenant utiliser la définition de la norme $\| \cdot \|_*$ pour terminer la démonstration du théorème 5.2.1.

On pose alors $N_j = 2^j$, $j \geq 0$ et l'on définit E comme la somme ℓ^1 d'espaces E_j de dimension finie 2^j. Ces espaces E_j sont réalisés comme des espaces de suites x_n avec $2^j \leq n \leq 2^{j+1}$.

Plus précisément, E_j est l'espace du théorème précédent, à ceci près que l'indice n de la décomposition (5.29) est maintenant $n - 2^j + 1$.

Un vecteur $x \in E_j$ s'écrit donc $(x_n)_{2^j \leq n < 2^{j+1}}$ où

$$x_n = y_n + \lambda(n - 2^j + 1)^{-2/3}. \tag{5.38}$$

La norme $\|x\|_{E_j}$ sera alors définie par

$$\inf \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} |y_n| + |\lambda|$$

où la borne inférieure est étendue à toutes les décompositions (5.38) de $x_n \in E_j$.

Ceci étant, $x = (x_n)_{n \geq 1}$ appartient à E si et seulement si $(x_n)_{2^j \leq n < 2^{j+1}} = x^{(j)}$ vérifie

$$\|x\|_E = \sum_{0}^{\infty} \|x^{(j)}\|_{E_j} < \infty.$$

Montrons que l'espace de Banach E possède la propriété (b).

En fait nous avons $\|x\|_2^2 = \sum_0^\infty \|x^{(j)}\|_2^2$ et l'on a grâce à la proposition 5.2.1, l'inégalité

$$\|x^{(j)}\|_2^2 \leq C\|x^{(j)}\|_{E_j}\|x^{(j)}\|_\infty. \tag{5.39}$$

On a aussi $\|x\|_\infty = \sup_{j\geq 0}\|x^{(j)}\|_\infty$ et $\|x\|_E = \sum_0^\infty \|x^{(j)}\|_{E_j}$.

Ainsi (b) s'obtient en ajoutant terme à terme les estimations (5.39).

Enfin (c) s'obtient en étudiant les suites particulières $u^{(j)} \in E$ qui valent 0 si $n \leq 2^j$ ou $n \leq 2^{j+1}$ et $(n - 2^j + 1)^{-2/3}$ sinon.

En effet, la norme de $u^{(j)}$ dans E ne dépasse pas 1 par définition, mais sa norme dans ℓ^1-faible est supérieure à $2^{(j-1)/3}$ car $u^{(j)} \geq 2^{-2/3(j-1)}$ si $2^j < n < 2^j + 2^{j-1}$; et le nombre de ces n est 2^{j-1}.

■

Remarque 5.3 On pourrait, dès la proposition 5.2.1, ne pas se limiter à la dimension finie et considérer l'espace de Banach B des suites $x_n = y_n + \lambda n^{-2/3}$, $n \geq 1$ où $y_n \in \ell^1(\mathbb{N})$. Mais contrairement à ce qui se passe pour la dimension finie, la décomposition est maintenant unique parce que $n^{-2/3} \notin \ell^1(\mathbb{N})$. Il en résulte que $B = \ell^1 \oplus \mathbb{C}$ est en fait isomorphe à ℓ^1 (on attribue à λ l'indice 0 en posant $x_0 = \lambda$).

Cette remarque implique la conséquence suivante. Pour le théorème 5.2.1, nous pouvons considérer directement l'espace E de suites $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, défini par $E = \ell^1 \oplus \lambda(n^{-2/3})_{n\geq 1}$ et les vérifications sont les mêmes que celles exposées ci-dessus.

Dans la problématique exposée à la page 109, nous avons considéré une norme arbitraire $\|\cdot\|_*$ sans aucune propriété particulière, or celle que nous avons en tête n'est pas n'importe quelle norme : c'est la norme des fonctions à variation bornée.

Quelles restrictions pouvons nous imposer à cette norme $\|\cdot\|_*$ pour essayer d'obtenir un résultat positif ?

Remarquons tout de suite que, si la base canonique de l'espace E est une base inconditionnelle, notre problème admet une solution comme nous l'indique le théorème suivant :

Théorème 5.2.2 *Si E est un espace de Banach de suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et si, $x \in E$ et $|y_n| \leq |x_n|$ entraînent $y \in E$, alors*

$$\|x\|_2^2 \leq C\|x\|_E\|x\|_\infty \Longrightarrow \|x\|_{1,\infty} \leq C'\|x\|_E$$

pour $x \in \ell^1$.

Pour le voir, on commence par évaluer la norme $\|x\|_E$ pour $x = (x_n)_{n\geq 1}$ donnée par $x_n = 0$ si $x \notin F$ et $1 \leq |x_n| \leq 2$ si $n \in F$ (F est un ensemble fini).

Nous obtenons alors, grâce à $\|x\|_2^2 \leq C\|x\|_E\|x\|_\infty$

$$\mathrm{Card}(F) \leq 2C\|x\|_E.$$

Considérons alors une suite arbitraire $x \in \ell^1$ et soit $F_j = \{n/2^{-j} \leq |x_n| < 2^{-j+1}\}$.

Définissons la suite y_j par $y_j(n) = x(n)$ si $n \in F_j$ et $y_j(n) = 0$ sinon.

Alors $\|y_j\|_E \leq C\|x\|_E$, mais $\|y_j\|_E \geq \frac{2^{-j}}{2C}\mathrm{Card}(F_j)$. Il vient

$$\mathrm{Card}(F_j) \leq C2^j\|x\|_E.$$

■

Nous voyons que l'on peut obtenir une majoration de la norme ℓ^1-faible, il suffit pour cela que l'espace admette une base inconditionnelle. Mais ce n'est justement pas le cas pour l'espace des fonctions à variations bornées.

On peut se demander quelles sont les propriétés dont dispose la norme BV qui pourraient faire qu'une approche comme celle-ci fonctionne.

Nous savons que la norme BV est invariante par translation ; or les normes explicitées ci-dessus ne le sont pas. Cependant, et même en exigeant cette propriété, la démarche proposée rencontre des difficultés. Voyons pourquoi :

Théorème 5.2.3 *On note $\|\cdot\|$ une norme sur un sous-espace vectoriel dense de $\ell^2(\mathbb{Z})$ ayant les trois propriétés :*

(i) Invariance par translation.

(ii) Si $y_j = \varepsilon_j x_j$, où $\varepsilon_j = \pm 1$, alors $\|y\| = \|x\|$.

(iii) $\|x\|_2^2 \leq \|x\|\,\|x\|_\infty$ $(x \in \ell^2(\mathbb{Z}))$.

Alors $\|x\| \geq \|x\|_1$.

Voici la démonstration : nous appelons S le simplexe $x(j) \geq 0$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j) = 1$.

Si l'on prouve que le fait d'appartenir à S implique que $\|x\| \geq 1$, cela suffira compte tenu de (ii).

On désigne pour cela ω_N la suite $\omega_N(k) = \frac{1}{N}$ si $0 \leq k \leq N-1$; $\omega_N(k) = 0$ sinon. Nous formons $x * \omega_N$ et l'on a

Lemme 5.2.4 *Si $x \in S$, alors $\|x * \omega_N\|_2^2 \sim \frac{1}{N}$ lorsque $N \to +\infty$.*

Admettons pour un instant ce lemme.

Ce résultat suffit pour conclure, car $\|x * \omega_N\|_\infty \leq \|x\|_1 \|\omega_N\|_\infty = \frac{1}{N}$ et (iii) entraîne $\|x * \omega_N\| \geq 1 - \epsilon_N$ où $\epsilon_N \to 0$.

Mais $\|x * \omega_N\| \leq \|x\| \|\omega_N\|_1$, grâce à (i) et $\|\omega_N\|_1 = 1$; ce qui nous permet de conclure.

La preuve du lemme utilise la transformation de Fourier. On pose $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{int}$ et $K_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_N(n)e^{int}$.

Nous avons alors :

$$\|x * \omega_N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)|^2 |f(t)|^2 dt.$$

Mais $K_N(t) = \frac{1}{N} \frac{e^{iNt-1}}{e^{it}-1}$ et $|K_N(t)|^2 = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 Nt/2}{\sin^2 t/2}$.

Puisque f est continue et $f(0) = 1$, nous avons $\frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)|^2 |f(t)|^2 dt \to 1$. En fait, $\frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)|^2 dt = 1$ par Plancherel et $\frac{N}{2\pi} |K_N(t)|^2$ est une approximation de l'identité.

■

On considère maintenant le théorème 5.2.3 et l'on supprime (ii). Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 5.2.4 *Pour tout entier $q \geq 1$ (aussi grand soit-il), il existe une norme, notée $\|\cdot\|_*$, définie sur ℓ^1 et ayant les propriétés suivantes :*

(a) $\|\cdot\|_*$ est invariante par translation.

(b) $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_* \|x\|_\infty \quad (x \in \ell^1(\mathbb{Z}))$

(c) il existe x_q tel que $\|x_q\|_* = 1$ tandis que la "norme" $\ell^{1,\infty}$ de x_q dépasse q.

Bien entendu, la norme ainsi construite dépendra de q. On pourrait demander l'existence d'une norme faisant à la fois tout cela pour tout $q \geq 1$. Nous ne sommes pas arrivés à construire une telle norme.

Pour la démonstration de ce théorème, on désigne par $A(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'algèbre de Wiener qui se définit comme l'ensemble des fonctions continues, 2π-périodiques, dont la série de Fourier $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ est absolument convergente :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| = \|f\|_A.$$

La construction de la norme $\|\cdot\|_*$ part du lemme suivant :

Lemme 5.2.5 *Pour presque tout choix des* ± 1 *la fonction* $g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-3/4} \cos(n\theta)$ *est continue et* $g_N(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \pm n^{-3/4} \cos(n\theta)$ *converge uniformément vers* $g(\theta)$.

Le lecteur trouvera une démonstration de ce lemme dans [49]. On fixe alors une de ces suite de ± 1 telle que les conclusions de ce lemme soient satisfaites et l'on pose

$$m_N(\theta) = \frac{2}{1 + \beta g_N(\theta)}$$

où $\beta > 0$ est assez petit pour que $1 \leq m_N(\theta)$. On choisit $N = (2q)^4$;

A toute suite $x(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on associe la série de Fourier correspondante

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{in\theta}.$$

Nous écrivons $\|f\|_A = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|$ et l'on définit alors $\|x\|_* = \|m_N f\|_A < \infty$.

L'invariance par translation est alors évidente : si $x(n) \in \mathbb{Z}$ est translatée de 1, $f(\theta)$ est multipliée par $e^{i\theta}$ et il en est de même pour $m_N(\theta) f(\theta)$. Finalement la norme dans l'algèbre de Wiener n'a pas changé.

La formule de Plancherel s'applique et l'on a :

$$\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_N(\theta) f(\theta) \bar{f}(\theta) d\theta = \langle M(x), x \rangle$$

où $M(x)$ a pour série de Fourier $m_N(\theta) f(\theta)$. Observons que l'on a :

$$\|x\|_2^2 \leq \|M(x)\|_1 \|x\|_\infty = \|x\|_* \|x\|_\infty.$$

En ce qui concerne la dernière propriété, on choisit $f_q(\theta) = \frac{1}{m_N(\theta)}$. Alors, de façon évidente il vient $\|x_q\|_* = 1$.

Par ailleurs $x_q = (\pm n^{-3/4})_{1 \leq n \leq N}$ dont la "norme" $\ell^{1,\infty}$ dépasse $\frac{1}{2} N^{1/4} = q$.

■

5.3 Le groupe de Heisenberg

Nous revenons aux questions traitées en début de chapitre mais cette fois-ci dans le cadre du groupe de Heisenberg.

On a vu notamment dans la première section que la preuve de l'estimation faible concernant les coefficients d'ondelettes et la norme de l'espace BV pouvait se faire en utilisant la base de Haar, i.e. des fonctions indicatrices des cubes dyadiques.

On dispose depuis longtemps de base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés [52]. Cependant la construction d'une base de Haar, et donc d'ondelettes à support compact, est plus délicate que dans le cas euclidien.

En effet, il ne suffit pas de considérer un cube unité $Q = [0,1[\times[0,1[\times[0,1[$ (rappelons que topologiquement on a $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$), de le dilater (cette fois-ci avec les dilatations anisotropes) et de le translater (avec la loi de groupe) pour obtenir un pavage de $\mathbb{H}$. Il existe toutefois une méthode pour obtenir un pavage du groupe que nous expliquons ci-dessous.

5.3.1 Cubes dyadiques

Les cubes dyadiques dans le cas du groupe de Heisenberg ont été étudiés par Strichartz [77] et présentent quelques propriétés remarquables. Nous rappelons la structure de groupe avec, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, une légère modification par rapport à la définition exposée au chapitre 2.

On a alors, pour (z,t) et $(z',t') \in \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la loi de groupe

$$(z,t) \cdot (z',t') = (z + z', t + t' + S(z,z')) \tag{5.40}$$

où $S(z,z') = 2Im(z\bar{z}')$. De même, pour $(z,t) \in \mathbb{H}$, on fixe la dilatation dyadique par $\delta_2(z,t) = (2z, 2^2 t)$.

Si l'on considère plutôt $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, la loi (5.40) devient tout simplement

$$(x,y,t) \cdot (x',y',t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(yx' - xy')). \tag{5.41}$$

On fixe maintenant le réseau

$$\Gamma = \{(m,n,l) \in \mathbb{H}/m,n \in \mathbb{Z}^2; l \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.42}$$

La modification de la loi de groupe vient du fait que l'on souhaite avoir, pour γ_1 et $\gamma_2 \in \Gamma$, la propriété $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \Gamma$; ce qui ne serait pas le cas si l'on conservait les notations utilisées initialement. Observons que l'on a aussi $\delta_2(\Gamma) \subset \Gamma$.

Remarquons qu'alors les champs de vecteurs, ainsi que la norme, doivent être redéfinis à un coefficient près pour avoir la cohérence d'ensemble nécessaire.

On considérera alors

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}.$$

La norme prend maintenant la forme suivante

$$|x| = \left((x^2 + y^2)^2 + t^2\right)^{1/4} \tag{5.43}$$

avec la distance associée $d(x,y) = |y^{-1} \cdot x|$.

Après ces considérations, nous définissons le cube fondamental sur le groupe de Heisenberg comme l'ensemble

$$T = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}/0 \leq x, y < 1; 0 \leq t - F(x, y) < 1\} \tag{5.44}$$

où la fonction $F(x, y)$ est donnée par :

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} S([2^n(x, y)]mod2; \langle 2^n(x, y)\rangle). \tag{5.45}$$

Nous avons noté $\langle (x, y)\rangle = (x, y) - [(x, y)]$, $[\cdot]$ la partie entière et $S(\cdot, \cdot)$ est la forme symplectique du groupe.

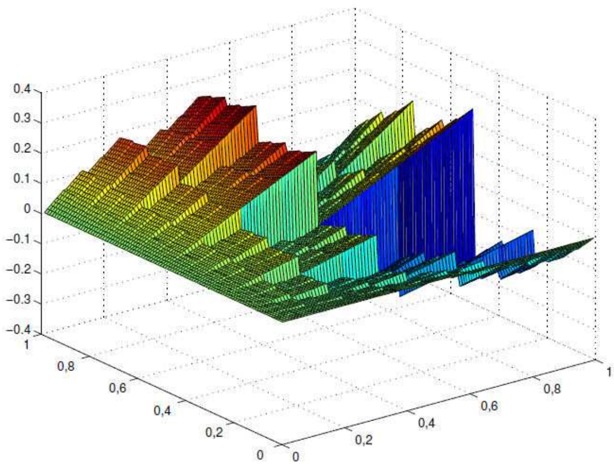

FIG. 5.1 – Le graphe de la fonction $F(x, y)$.

Cette figure réprésente le 'sol' (ou le 'toit') du cube fondamental qui par définition est délimité (en haut et en bas) par une telle surface.

Nous définissons à présent, pour $\gamma = (m, n, l) \in \Gamma$, l'ensemble

$$\gamma T = \{(m, n, l) \cdot (x, y, t)/(x, y, t) \in T\}$$

et de même pour la dilatation :

$$\delta_2 T = \{\delta_2(x, y, t)/(x, y, t) \in T\}.$$

Nous avons les propriétés suivantes du cube fondamental :

- $\delta_2 T = \cup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma T$, avec union disjointe et

$$\Gamma_0 = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{H}/ \quad \text{avec} \quad \gamma_1, \gamma_2 = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } \gamma_3 = 0, 1, 2 \text{ ou } 3\}.$$

- $T = \cup_{\gamma \in \Gamma_0} \delta_{1/2} \gamma T$, avec union disjointe.

On dispose alors du pavage suivant :

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma T. \tag{5.46}$$

Nous prions le lecteur de consulter [77] pour une vérification de ces propriétés.

Définition 5.3.1 *On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des cubes dyadiques qui se déduisent à partir du cube fondamental T par translations et dilatations.*

5.3.2 Base de Haar

A partir de ces cubes dyadiques, il est possible de construire une base de Haar pour $L^2(\mathbb{H})$ (cf. [66]), pour cela nous allons introduire une analyse multi-résolution adaptée à la loi de groupe ainsi qu'à sa dilatation.

Considérons le réseau Γ défini par la formule (5.42) et notons $\Gamma_0^0 = \Gamma_0/(0,0,0)$. Nous remarquons que l'action du sous groupe discret Γ sur $L^2(\mathbb{H})$ est donnée par

$$U_\gamma f(x,y,t) = U_{m,n,l} f(x,y,t) = f(\gamma^{-1}\cdot(x,y,t)) = f(x-m, y-n, t-l+2(my-nx)). \tag{5.47}$$

L'action de la dilation $\delta = \delta_2$ sur $L^2(\mathbb{H})$ est quant à elle donnée de la façon suivante :

$$Df(x,y,t) = 2^{N/2} f(\delta(x,y,t)) = 2^{N/2} f(2x, 2y, 2^2 t), \tag{5.48}$$

où $N = 4$ est la dimension homogène du groupe.

Ces deux actions ne commutent pas, mais on a l'identité :

$$U_{\delta(\gamma)} D = D U_\gamma.$$

Nous pouvons maintenant nous attaquer à la notion d'analyse multi-résolution sur le groupe de Heisenberg :

Définition 5.3.2 *Une analyse multi-résolution sur $\mathbb{H}$ est une suite croissante $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{H})$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ *et* $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{H})$ *;*
2. $f(\cdot) \in V_j$ *si et seulement si* $f(\delta_2 \cdot) \in V_{j+1}$ *;*
3. $f \in V_0$ *si et seulement si* $U_\gamma f \in V_0$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *;*
4. *Il existe une fonction* $\phi \in V_0$ *telle que* $\{U_\gamma \phi\}_{\gamma\in\Gamma}$ *soit une base orthonormée de* V_0.

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant démontré dans [66].

Théorème 5.3.1 *Pour une analyse multi-résolution donnée, il existe $2^N - 1$ fonctions $\{\psi^\epsilon\}$, $\epsilon \in \Gamma_0^0$, telles que :*

$$V_1 = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{\epsilon \in \Gamma_0^0} W_0^\epsilon \right), \tag{5.49}$$

$\{U_\gamma \psi^\epsilon\}_{\gamma \in \Gamma}$ forme une base orthonormée pour W_0^ϵ, et $\{D^j U_\gamma \psi^\epsilon\}_{\epsilon \in \Gamma_0^0, \gamma \in \Gamma, j \in \mathbb{Z}}$ forme un base d'ondelettes orthonormées pour $L^2(\mathbb{H})$.

La base de Haar sur le groupe de Heisenberg est alors donnée par la famille de fonctions

$$\left\{ \psi_{j,\gamma}^\varepsilon(x) = 2^{Nj/2} \psi^\varepsilon(\gamma^{-1} \cdot \delta_{2^j}(x)) \;/\quad \varepsilon \in \Gamma_0^0; \gamma \in \Gamma, j \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{5.50}$$

où les fonctions ψ^ϵ se construisent à partir de la fonction indicatrice du cube fondamental T (cf. [66]).

On obtient ainsi la formule de reconstruction :

$$f = \sum_{\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{j,\gamma}^\varepsilon \psi_{j,\gamma}^\varepsilon \tag{5.51}$$

où $f_{j,\gamma}^\varepsilon = \langle f, \psi_{j,\gamma}^\varepsilon \rangle$.

Les propriétés des cubes dyadiques ainsi que les résultats présentés ci-dessus, nous conduisent à essayer de prouver les théorèmes 5.1.3 et 5.1.4 lorsque les ondelettes sont définies par le théorème 5.3.1.

En effet, la partie de la démonstration correspondant aux propriétés des ondelettes à support sur les cubes dyadiques peut se retranscrire au cadre du groupe de Heisenberg sans problème.

En fait, les difficultés apparaissent à cause de la nature géométrique du cube fondamental.

5.3.3 Problèmes géométriques

Le lecteur peut se rendre compte très rapidement avec la figure (5.1) que la nature géométrique du cube fondamental est assez différente de celle de son homologue euclidien. Il convient donc de faire un analyse plus détaillée des propriétés géométriques de cet objet.

Nous regroupons dans la proposition qui suit quelques remarques concernant le graphe de la fonction $F(x, y)$ qui délimite le cube fondamental.

Proposition 5.3.1 *1. Le cube T possède une surface fractale irrégulière notée Λ.*

2. La fonction $(x, y, t) \longmapsto F(x, y)$ est une fonction à variation bornée.

3. *Rappelons que la dimension de Hausdorff du groupe de Heisenberg est $N = 4$. Soit $A \subset \Lambda$ la partie fractale de la surface du cube fondamental. Nous avons alors $dim_{\mathbb{H}}(A) = 2$ et la mesure de Hausdorff $(N-2)$-dimensionnelle de A est finie et positive.*

Nous invitons le lecteur à trouver une démonstration de cette proposition dans [77].

Il est intéressant de voir comment on construit la surface qui délimite ce cube fondamental. On note pour cela

$$F_k(x,y) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4^n} S([2^n(x,y)]mod2; \langle 2^n(x,y)\rangle)$$

de telle sorte que $F(x,y) = \lim\limits_{k\to\infty} F_k(x,y)$.

Nous remarquons que les discontinuités des fonctions $F_k(x,y)$ sont concentrées sur une "grille" de pas 2^{-k}. On obtient ainsi une suite de surfaces Λ_k qui délimitent (en haut et en bas) des approximations T_k du cube fondamental.

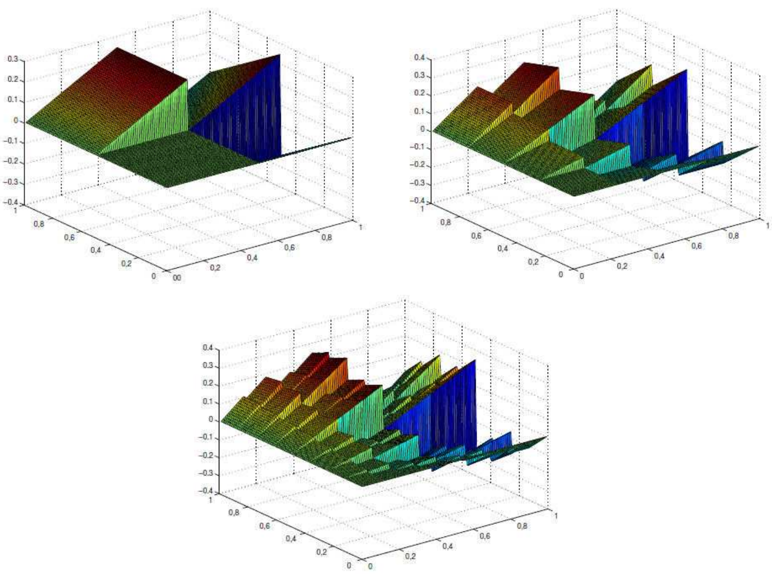

FIG. 5.2 – Les graphes des fonctions $F_k(x,y)$ pour $k = 1, 2, 3$.

Au début de ce chapitre nous avons exposé très brièvement les arguments les plus importants qui permettaient d'obtenir une minoration de la norme de l'espace BV par une norme faible faisant intervenir des coefficients d'ondelettes à support compact.

Dans le groupe de Heisenberg nous souhaitons utiliser la base de Haar. Avec la section précédente, où on a vu les propriétés de pavage des cubes dyadiques, il ne reste plus qu'à adapter la deuxième partie du raisonnement : savoir si le cube fondamental est un domaine d'isopérimétrie au sens de la définition suivante (qui reprend celle donnée dans $\mathbb{R}^n$ par la définition 5.1.3).

Définition 5.3.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{H}$ un ensemble ouvert. Nous dirons que Ω est un domaine d'isopérimétrie si, pour tout ensemble E à périmètre fini et à bord régulier, on a l'estimation :*

$$\min\{|E \cap \Omega|; |E^c \cap \Omega|\}^{1-1/N} \leq C\mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E). \qquad (5.52)$$

où $\mathcal{H}^{N-1}$ est la mesure de Hausdorff $N-1$ dimensionelle.

En suivant les auteurs de l'article [38], nous disposons du résultat ci-dessous pour le groupe de Heisenberg :

Proposition 5.3.2 *Si Ω est un domaine de John, alors l'ensemble Ω est un domaine d'isopérimétrie.*

Rappelons rapidement qu'un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{H}$ est un domaine de John s'il existe une constante $C > 0$ et un point $x_0 \in \Omega$ tels que pour tout $x \in \Omega$ il y ait une courbe $\gamma : [0,1] \to \Omega$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = x_0$, de sorte que pour tout $z \in \{\gamma\}$ on ait :

$$d(z, \partial\Omega) \geq C^{-1} d(z, x). \qquad (5.53)$$

Pour plus de détails concernant ces notions sur $\mathbb{H}$ et, plus généralement, sur les groupes de Lie stratifiés, nous prions de lecteur de consulter [38] et [60].

Cette proposition nous donne une grande classe de domaines pour lesquels on a la propriété d'isopérimétrie. Indiquons toutefois que le fait de trouver des exemples explicites et non triviaux de domaines de John est une tâche généralement difficile.

Voici un exemple d'un ensemble sur $\mathbb{H}$ qui n'est pas un domaine de John (contrairement au cas euclidien) :

Soit le tronc de cône déterminé par le domaine

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 - x_3, \ x_3 > 0 \right\}.$$

En effet, considérons le point $x = (0, 0, 1)$ que nous relions au point $x_0 = (0, 0, 0)$. Soit maintenant le point $z = (0, 0, 1-h)$ de sorte que $d(z, x) = h^{1/2}$.

La distance du point z au bord $\partial\Omega$ peut être calculée en prenant le point $y = (h, 0, 1-h)$. Il vient alors que $d(z, y) = h$ et la propriété (5.53) est mise en défaut.

Pour le cube fondamental, nous ne sommes pas capables de présenter une vérification de cette propriété. Nous ne savons donc pas si l'inégalité isopérimétrique est applicable : la deuxième partie de la démonstration ne peut s'adapter sans cette vérification préalable.

Pour le groupe de Heisenberg, ainsi que pour les autres groupes de Lie stratifiés, on ne dispose donc que des inégalités de type faible présentées au chapitre 4.

Chapitre 6

Les groupes p-adiques

6.1 Introduction

Notre étude portait jusqu'à présent sur des groupes de Lie stratifiés. Nous avons pu voir alors comment les espaces fonctionnels y étaient définis et comment on pouvait obtenir, moyennant quelques adaptations, des inégalités de Sobolev précisées.

Dans ce chapitre, on étudiera ce qui se passe si l'on prend en compte des groupes ayant certaines propriétés topologiques particulières. Nous allons pour cela cibler nos propos sur les groupes p-adiques.

De façon plutôt surprenante, on verra comment ces inégalités dépendent de la structure de groupe puisqu'il sera possible d'exhiber quelques contre exemples intéressants.

Avant de présenter ces résultats, nous imposons au lecteur quelques brefs rappels sur les groupes p-adiques qui seront de grande utilité pour la bonne compréhension des sections suivantes.

Pour une meilleure présentation, on traitera d'abord le corps $\mathbb{Q}_p$ pour ensuite nous occuper de l'anneau $\mathbb{Z}_2$ où l'on énoncera la plupart de nos résultats (cf. section 6.3).

On définira alors sur cet anneau les éléments qui nous permettrons d'introduire une décomposition de Littlewood-Paley pour la caractérisation des espaces fonctionnels.

Nous privilégierons cette approche puisque, contrairement au cas euclidien, toute caractérisation de type infinitésimale est à exclure car ces groupes sont totalement discontinus. Nous illustrerons ce fait en considérant, par exemple, l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ p. 132.

Pour une étude plus approfondie sur les groupes p-adiques nous renvoyons le lecteur aux livres [5], [50] et [83].

6.1.1 Généralités

La présentation des groupes p-adiques peut se faire de plusieurs façons différentes ; toutefois, la notion importante sous-jacente est celle de norme *non archimédienne* qui détermine les caractéristiques les plus particulières de ce type de groupe.

Nous allons donc, dans un premier temps, définir un outil qui nous permettra de mieux comprendre les propriétés de ces normes.

Valuation et norme p-adiques

Rappelons tout d'abord que $a|b$ signifie a divise b ou que b est multiple de a.
Nous avons alors la

Définition 6.1.1 *Soit p un nombre premier, pour $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ on définit la valuation p-adique de x par*

$$\gamma_p(x) = \max\{r : p^r|x\} \geq 0. \tag{6.1}$$

Pour tout nombre rationnel $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, nous définissons la valuation p-adique de x en écrivant :

$$\gamma_p(x) = \gamma_p(a) - \gamma_p(b). \tag{6.2}$$

On notera par convention $\gamma_p(0) = +\infty$.

Si $x, y \in \mathbb{Q}$, il est facile de voir que la valuation p-adique possède les propriétés suivantes :

- $\gamma_p(x) = +\infty \iff x = 0$;
- $\gamma_p(xy) = \gamma_p(x) + \gamma_p(y)$;
- $\gamma_p(x + y) \geq \min\{\gamma_p(x), \gamma_p(y)\}$, avec égalité si $\gamma_p(x) \neq \gamma_p(y)$.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous écrirons par un abus de langage γ au lieu de $\gamma_p(x)$.

Puisque notre premier souci est de construire une norme avec certaines caractéristiques bien particulières, il est utile de rappeler que, de façon générale, une norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{Q}$ est donnée par les trois conditions classiques :

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Il est possible à l'aide de la valuation p-adique de construire une norme qui vérifie une propriété plus forte que l'inégalité triangulaire :

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q}) \qquad |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|. \tag{6.3}$$

On dira alors pour une norme qui satisfait cette inégalité qu'elle est *non-archimédienne*. Par opposition, une norme qui ne vérifie pas cette majoration (6.3) mais seulement l'inégalité triangulaire usuelle sera *archimédienne*.

Tout ceci nous conduit à la définition qui suit :

Définition 6.1.2 *Pour $x \in \mathbb{Q}$ et p un nombre premier on définit une norme par*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma} & si \quad x \neq 0 \\ \\ p^{-\infty} = 0 & si \quad x = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Nous avons alors la proposition suivante qui est le point de départ de notre présentation des groupes p-adiques.

Proposition 6.1.1 *Soit p un nombre premier. La fonction $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ est une norme non-archimédienne puisqu'on a :*

a) $|x|_p \geq 0$, *et* $|x|_p = 0 \iff x = 0$ *;*

b) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ *;*

c) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, *avec égalité si* $|x|_p \neq |y|_p$.

Nous renvoyons le lecteur à [5], [50] ou encore à [83] pour une vérification de cette proposition.

On adoptera finalement la notation $|\cdot|_\infty$ pour désigner la valeur absolue usuelle. Ces normes jouent un rôle fondamental et leur importance est mise en valeur par le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 (Ostrowski) *Toute norme non triviale $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à $|\cdot|_p$ pour une certaine valeur de p, p étant un nombre premier ou $p = \infty$.*

Rappelons qu'une norme est dite triviale si elle est donnée par les deux conditions $\|0\| = 0$ et $\|x\| = 1$ pour $x \neq 0$.

Venons-en à la définition du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. De la même façon que $\mathbb{R}$ est obtenu par complétion de $\mathbb{Q}$ avec la valeur absolue usuelle ; *on déterminera $\mathbb{Q}_p$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$, mais en utilisant cette fois-ci la norme $|\cdot|_p$.*

Ceci nous donne une première approche pour comprendre cet objet, le paragraphe suivant nous permettra de visualiser plus clairement les éléments de $\mathbb{Q}_p$.

Représentation canonique et structure de groupe

Tout nombre p-adique $x \neq 0$ est uniquement représenté par :

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...), \tag{6.5}$$

où $\gamma = \gamma_p(x)$ est la valuation p-adique de x et les x_j sont des entiers tels que $x_0 > 0$ et $0 \leq x_j \leq p-1$ pour $j = 1, 2, ...$

On remarque que cette série converge par rapport à la norme $|\cdot|_p$; ainsi, si $x \in \mathbb{Q}_p$ est représenté par la formule (6.5), nous avons l'identité $|x|_p = p^{-\gamma}$.

Nous avons déjà exprimé, dans la page précédente, le fait que $\mathbb{Q}_p$ est un corps. Voyons très brièvement pourquoi. Nous définissons pour cela les quatres opérations en utilisant la représentation exprimée par (6.5) :

Soient $x, y \in \mathbb{Q}_p$ représentés par leur forme canonique, la somme est alors définie par la formule suivante

$$x + y = p^{\gamma(x+y)}(c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ...) \quad 0 \leq c_j \leq p-1; c_0 > 0, \tag{6.6}$$

où les quantités $\gamma(x+y)$ et c_j sont déterminées de façon unique par la résolution de l'équation :

$$p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...) + p^{\gamma(y)}(y_0 + y_1 p + y_2 p^2 + ...) = p^{\gamma(x+y)}(c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ...).$$

De plus, pour $a, x \in \mathbb{Q}_p$, l'équation $a + x = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{Q}_p$ qui est $x = -a$.

De même, l'équation $ax = 1$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{Q}_p$: $x = 1/a$.

Nous pouvons donc considérer sans problèmes l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ; ce qui fait de $\mathbb{Q}_p$ un corps.

Présentons maintenant l'espace sur lequel on travaillera dans les sections 6.2.1, 6.2.2 et 6.3.

Définition 6.1.3 *Soit p un nombre premier. Nous définissons l'ensemble des entiers p-adiques par :*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p / |x|_p \leq 1\}. \tag{6.7}$$

6.1.2 Quelques propriétés

En utilisant la norme (6.4) il est possible de définir une distance en considérant la formule

$$d(x, y) = |x - y|_p \tag{6.8}$$

Cette distance possède un comportement particulier par rapport à l'inégalité triangulaire. En effet, on obtient comme conséquence des propriétés de la norme $|\cdot|_p$, l'inégalité suivante

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} \leq |x|_p + |y|_p.$$

On parlera alors de distance *ultra-métrique*.

Avec cette distance nous définissons les boules de centre $x \in \mathbb{Q}_p$ et de rayon p^γ par

$$B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p / d(x,y) \leq p^\gamma\} \qquad (\gamma \in \mathbb{Z}).$$

Nous considérerons aussi les "sphères" en écrivant :

$$S_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p / d(x,y) = p^\gamma\}.$$

Remarquons que l'on a la relation suivante entre ces deux objets :

$$S_\gamma(x) = B_\gamma(x) \setminus B_{\gamma-1}(x). \tag{6.9}$$

Nous regroupons dans la proposition qui suit quelques propriétés de ces boules :

Proposition 6.1.2 *Soit γ un entier. On a alors :*

1. *La boule $B_\gamma(x)$ est à la fois un fermé et un ouvert pour la topologie induite par la distance (6.8).*

2. *Tout point de la boule $B_\gamma(x)$ est son centre.*

Le théorème suivant présente des résultats généraux bien connus :

Théorème 6.1.2 *Soit p un nombre premier.*

a) $\mathbb{Q}_p$ muni de la distance (6.8) est un espace métrique complet.

b) $\mathbb{Q}_p$ est un espace de Hausdorff.

c) L'espace $\mathbb{Q}_p$ est localement compact et de dimension $n = 0$.

d) Le groupe p-adique $\mathbb{Q}_p$ est un espace totalement discontinu.

Pour une démonstration de ces assertions, et pour bien d'autres propriétés, le lecteur peut consulter [83].

6.2 Espaces Fonctionnels

Comme dans le cas des groupes stratifiés, il est possible de définir ici la plupart des espaces fonctionnels qui interviennent dans les inégalités de Sobolev précisées.

Il faut toutefois, et le lecteur peut bien s'en douter, faire quelques modifications et adaptations des définitions des normes qui caractérisent ces espaces de fonctions.

L'analyse de Littlewood-Paley nous sera très utile dans ce cadre et nous verrons que c'est cette approche qu'il faut privilégier pour pouvoir mener à bien notre étude. Toutes les fonctions que nous étudierons seront définies sur un groupe p-adique $\mathbb{Q}_p$ (plus particulièrement sur $\mathbb{Z}_2$) et à valeurs réelles.

Voyons tout d'abord les espaces utilisant uniquement la notion de mesure :

Espaces de Lebesgue

Etant donné que $\mathbb{Q}_p$ est un groupe commutatif localement compact par rapport à l'addition, on a l'existence d'une mesure de Haar dx invariante par rapport aux translations *i.e.* :

$$d(x+a) = dx.$$

Remarquons aussi que l'on a la formule suivante pour $a \in \mathbb{Q}_p^*$:

$$d(xa) = |a|_p dx. \tag{6.10}$$

Nous normalisons cette mesure en exigeant la condition

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Sous ces contraintes il est possible de voir que la mesure dx est unique (cf. [83]) et l'on notera $|E|$ la mesure de Lebesgue pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{Q}_p$.

Examinons à présent un exemple :

Soit $f(x) = \mathbb{1}_{B_\gamma}$ pour γ un entier. Nous avons alors

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \int_{|x|_p \leq p^\gamma} dx = \int_{|y|_p \leq 1} d(p^{-\gamma} y) = |p^{-\gamma}|_p \int_{B_1} dy = p^\gamma.$$

Soit maintenant $f(x) = \mathbb{1}_{S_\gamma}$. Si nous utilisons la relation (6.9), on obtient :

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \int_{S_\gamma} dx = \int_{B_\gamma} dx - \int_{B_{\gamma-1}} dx = p^\gamma - p^{\gamma-1}.$$

Ceci est remarquable puisque pour ces groupes "l'aire" d'un cercle est positive.

Venons-en maintenant aux espaces de Lebesgue. Une fois que nous disposons de cette mesure, les espaces $L^q(\mathbb{Q}_p)$ se définissent de façon usuelle pour les fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$, à savoir

$$\|f\|_q = \left(\int_{\mathbb{Q}_p} |f|^q dx \right)^{1/q} \qquad (1 \leq q < \infty),$$

avec les modifications nécessaires pour $q = \infty$.

6.2.1 Analyse de Littlewood-Paley

Nous nous plaçons dorénavant sur le groupe $\mathbb{Z}_2$ donné par la définition 6.1.3 :

$$\mathbb{Z}_2 = \{x \in \mathbb{Q}_2 / |x|_2 \leq 1\}.$$

On va utiliser, pour la construction de l'analyse de Littlewood-Paley, une approche par martingales : on désigne alors par $\mathcal{F}_j$ l'algèbre de Boole des classes d'équivalence $E \subset \mathbb{Z}_2$ modulo le sous-groupe $2^j\mathbb{Z}_2$.

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{Z}_2)$, on appelle $S_j(f)$ l'espérance conditionnelle de f par rapport à $\mathcal{F}_j$. Précisons la façon dont se calcule cette quantité :

$$S_j(f)(x) = \frac{1}{|B_j(x)|} \int_{B_j(x)} f(y)dy.$$

On définit maintenant les blocs dyadiques en écrivant

$$\Delta_j(f) = S_{j+1}(f) - S_j(f).$$

La décomposition de Littlewood-Paley de f est alors donnée par la formule

$$f = S_0(f) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j(f) \tag{6.11}$$

où nous avons noté $S_0(f) = \int_{\mathbb{Z}_2} f(x)dx$.

Nous allons utiliser, dans les sections ci-dessous, les ensembles suivants :

$$Q_{j,k} = \left\{k + 2^j\mathbb{Z}_2\right\}, \tag{6.12}$$

avec $j \in \mathbb{N}$ et $k = \{0, 1, ..., 2^j - 1\}$.

Le lien de ces ensembles avec $\mathcal{F}_j$ est donné par l'identification $\mathcal{F}_j = \underset{0\leq k<2^j}{\cup} Q_{j,k}$.

Voici quelques propriétés élémentaires que nous utiliserons par la suite :

Proposition 6.2.1 *Ces ensembles $Q_{j,k}$ sont deux à deux disjoints. Du point de vue de la mesure on a $|Q_{j,k}| = 2^{-j}$ pour tout k et sur chacun de ces ensembles $Q_{j,k}$ la valuation $2-$adique est constante.*

La vérification étant immédiate, nous la laissons au lecteur.

Normes équivalentes

Une fois que l'on dispose de la décomposition de Littlewood-Paley pour le groupe $\mathbb{Z}_2$, nous pouvons donner des normes équivalentes pour les espaces fonctionnels dont nous avons besoin. Ainsi, pour les espaces de Lebesgue, avec $1 \leq p < \infty$, on a la caractérisation suivante :

$$\|f\|_p \simeq \|S_0 f\|_p + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{6.13}$$

Des précautions sont toutefois nécessaires pour les espaces qui prennent en compte la régularité des fonctions.

Voyons pour cela un exemple concret avec l'espace de Sobolev $W^{1,2}$.

On commence par essayer de définir ce qui dans le cas euclidien serait la *longueur du gradient* :

$$|\nabla f| = \lim_{\sigma\to 0} \sup_{d(x,y)<\sigma} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}. \tag{6.14}$$

Nous pouvons alors tenter de caractériser l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ par la condition

$$\|f\|_* = \|f\|_2 + \left(\int_{\mathbb{Z}_2} |\nabla f|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{6.15}$$

Considérons maintenant la décomposition de Littlewood-Paley. En suivant les définitions déjà connues données dans (1.18), il vient

$$\|f\|_{**} = \|S_0 f\|_2 + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2j} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_2. \tag{6.16}$$

Cependant, et contrairement au cas euclidien, ces deux normes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_{**}$ ne sont pas équivalentes.

Pour le voir, on considère dans (6.15) le cas particulier d'une fonction $f = c_k$ constante sur chaque $Q_{j,k} = \{k + 2^j\mathbb{Z}_2\}$ pour j fixé. Alors, il est très facile de vérifier que l'on a $|\nabla f| = 0$ identiquement. Donc, pour ces fonctions, la norme $\|\cdot\|_*$ serait égale à la norme L^2.

Ceci nous impose un choix dans la définition des espaces fonctionnels que nous allons utiliser.

En ce qui concerne les espaces de Sobolev nous utiliserons la caractérisation donnée par une analyse de Littlewood-Paley : ($s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$)

$$\|f\|_{W^{s,p}} \simeq \|S_0 f\|_p + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \tag{6.17}$$

Espaces de Besov

Nous dirons, en suivant la définition générale de ces espaces en fonction des blocs dyadiques, qu'une fonction f appartient à l'espace de Besov $B^{s,q}_p$, pour $1 \leq p, q \leq \infty$ et

$s \in \mathbb{R}$, si la quantité suivante est bornée :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} \simeq \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q} \tag{6.18}$$

Observons que ces espaces sont croissants par rapport à l'indice q. Nous avons en effet l'inclusion suivante lorsque $q_1 < q_2$:

$$B_p^{s,q_1} \subset B_p^{s,q_2}. \tag{6.19}$$

Espaces Homogènes

Nous allons définir les variantes homogènes des espaces considérés ci-dessus de la façon suivante :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \simeq \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \qquad (1 < p < \infty, s \in \mathbb{R}) \tag{6.20}$$

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \simeq \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q} \qquad (1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}) \tag{6.21}$$

Avec les modifications nécessaires pour $p, q = \infty$.

Notre étude de la section suivante portera principalement sur les espaces de Besov $\dot{B}_1^{1,\infty}$ et $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$. On présente alors quelques exemples de fonctions appartenant à ces espaces :

1) La fonction $f(x) = \log_2 |x|_2$ appartient à l'espace $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2)$.

Il s'agit de vérifier que l'on a une estimation du type suivant pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\|\Delta_j f\|_1 \leq C 2^{-j}.$$

Remarquons tout d'abord que $|x|_2 = 2^{-\gamma(x)}$, il vient $f(x) = -\gamma(x)$. Rappelons (cf. proposition 6.2.1) que sur chaque ensemble $Q_{j,k}$, la valuation $\gamma(x)$ est constante. Ceci nous est très utile pour évaluer les quantités $S_{j+1} f$ et $S_j f$: en effet, si nous fixons j un entier, nous avons :

$$S_j f(x) = \begin{cases} -j & \text{sur} \quad Q_{j,0}, \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j,1}, \\ -1 & \text{sur} \quad Q_{j,2}, \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j,3}, \\ -2 & \text{sur} \quad Q_{j,4}, \\ & \vdots \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j,2^j-1}. \end{cases} \qquad et \qquad S_{j+1} f(x) = \begin{cases} -j-1 & \text{sur} \quad Q_{j+1,0}, \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j+1,1}, \\ -1 & \text{sur} \quad Q_{j+1,2}, \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j+1,3}, \\ -2 & \text{sur} \quad Q_{j+1,4}, \\ & \vdots \\ 0 & \text{sur} \quad Q_{j+1,2^{j+1}-1}. \end{cases}$$

Le bloc dyadique $\Delta_j f$ est alors déterminé par :

$$\Delta_j f(x) = \begin{cases} -1 & \text{sur} \quad Q_{j+1,0} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ainsi, si l'on évalue la norme L^1, il vient $\|\Delta_j f\|_1 = \frac{1}{2}2^{-j}$ et on a bien $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2)$.

2) Soit maintenant $g(x) = \frac{1}{\gamma(x)+1}\log_2|x|_2$, cette fonction appartient aussi à $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2)$.

Observons que $g(x) = -\gamma(x)/(\gamma(x)+1)$ et, avec les mêmes remarques de l'exemple précédent, il est facile de voir que l'on a

$$\Delta_j g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{j^2+3j+2} & \text{sur} \quad Q_{j+1,0} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

D'où $\|\Delta_j g\|_1 = \left(\frac{1}{j^2+3j+2}\right)2^{-j}$ et donc $g \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2)$.

3) Soit $h(x) = 1/|x|_2$, nous allons voir que $h \in \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$.

Nous devons vérifier que l'on a $\sup\limits_{j\geq 0} 2^{-j}\|\Delta_j h\|_\infty < \infty$. On a par définition $h(x) = 2^{\gamma(x)}$ et puisque la valuation est constante sur chaque ensemble $Q_{j,k}$, nous avons :

$$\Delta_j h(x) = \begin{cases} 2^j & \text{sur} \quad Q_{j+1,0} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors on obtient $\|\Delta_j h\|_\infty = 2^j$ et donc $2^{-j}\|\Delta_j h\|_\infty = 1$ pour tout j, d'où $h \in \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$.

Remarque 6.1 La fonction f du premier exemple n'est pas dans $L^\infty(\mathbb{Z}_2)$ car $\gamma(0) = \infty$; cependant, on a bien $g \in L^\infty(\mathbb{Z}_2)$ pour le deuxième exemple.

Nous terminons cette section avec le résultat suivant :

Proposition 6.2.2 *Considérons le groupe $\mathbb{Z}_2$, on a alors l'inclusion d'espaces*

$$\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2) \subset BMO(\mathbb{Z}_2). \tag{6.22}$$

Rappelons que l'espace $BMO(\mathbb{Z}_2)$ est défini par la condition

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{Z}_2)} = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f - m_B(f)|dx < +\infty, \tag{6.23}$$

où nous avons noté $m_B(f) = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$.

Pour la démonstration de cette proposition nous considérons une fonction f appartenant à l'espace de Besov d'indices $(1,\infty,1)$; on doit alors estimer, avec une décomposition de Littlewood-Paley, la quantité suivante :

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\left(S_0 f + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j f\right) - m_B\left(S_0 f + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j f\right)\right| dx.$$

Supposons que l'on a $|B| = 2^{-j_0}$; puisque $\Delta_j f$ est localement constante, nous avons pour toutes les échelles plus grandes que j_0 l'égalité

$$m_B(\Delta_j f) = \Delta_j f \qquad \forall j < j_0. \tag{6.24}$$

Nous obtenons donc deux sommes en considérant cette échelle de coupure :

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\sum_{j<j_0}(\Delta_j f - m_B(\Delta_j f)) + \sum_{j\geq j_0}(\Delta_j f - m_B(\Delta_j f))\right| dx. \tag{6.25}$$

Etant donné que la première somme est nulle (on utilise (6.24)), on doit alors s'occuper de la deuxième partie de (6.25), nous avons donc :

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\sum_{j\geq j_0}(\Delta_j f - m_B(\Delta_j f))\right| dx \leq \frac{1}{|B|}\sum_{j\geq j_0}\int_B |\Delta_j f - m_B(\Delta_j f)|\, dx \tag{6.26}$$

Nous nous intéressons à l'intégrale de la partie de droite de l'estimation ci-dessus, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$\int_B |\Delta_j f - m_B(\Delta_j f)|\, dx \leq \int_B |\Delta_j f|\, dx + \int_B |m_B(\Delta_j f)|\, dx.$$

Or ce dernier terme est une constante, on a ainsi par la définition de $m_B(f)$:

$$\int_B |\Delta_j f|\, dx + m_B(\Delta_j f)|B| = \int_B |\Delta_j f|\, dx + \left|\int_B \Delta_j f\, dx\right|$$

Il vient alors :

$$\int_B |\Delta_j f - m_B(\Delta_j f)|\, dx \leq 2\|\Delta_j f\|_1$$

En revenant à la formule (6.26) et à la définition (6.23) nous avons la majoration

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - m_B(f)| dx \leq \frac{C}{|B|}\sum_{j\geq j_0}\|\Delta_j f\|_1.$$

Arrivés à ce point, nous utilisons l'hypothèse : notre fonction appartient à l'espace de Besov $\dot{B}_1^{1,\infty}$ et l'on a, pour tout $j\in\mathbb{N}$, l'estimation

$$\|\Delta_j f\|_1 \leq C\, 2^{-j}.$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité suivante

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - m_B(f)|dx \leq \frac{C}{|B|}\sum_{j\geq j_0} 2^{-j}.$$

Puisque nous avions fixé $|B| = 2^{-j_0}$, la somme précédente est bornée. Nous en déduisons alors le résultat souhaité.

■

Remarque 6.2 Ce résultat est encore valable sur $\mathbb{R}^n$ et ne dépend donc pas du caractère totalement discontinu de $\mathbb{Z}_2$. N'ayant pas trouvé cette inclusion dans la littérature, nous en présentons une preuve dans l'annexe B p. 159.

6.2.2 Espace $BV(\mathbb{Z}_2)$

Nous nous intéressons à présent à l'espace des fonctions à variation bornée. Etant donné que l'on ne dispose pas ici d'une approche infinitésimale, nous allons caractériser cet espace par la condition qui suit :

Définition 6.2.1 *Soit f une fonction définie sur le groupe $\mathbb{Z}_2$. Nous dirons qu'elle appartient à l'espace BV s'il existe une constante C telle que l'on ait*

$$\int_{\mathbb{Z}_2} |f(x+y) - f(x)|dx < C|y|_2, \quad (\forall y \in \mathbb{Z}_2). \tag{6.27}$$

Nous n'allons pas faire un traitement exhaustif des propriétés de cet espace puisqu'on a le résultat surprenant suivant

Théorème 6.2.1 *Sur le groupe $\mathbb{Z}_2$, on dispose de l'égalité d'espaces : $BV = \dot{B}^{1,\infty}_1$.*

Observons, avant de passer à la démonstration, que cette identité est fausse dans les cadres étudiés précédemment.

La preuve repose sur deux propositions que nous traitons ci-dessous

Proposition 6.2.3 *Soit f une fonction définie sur le groupe $\mathbb{Z}_2$ appartenant à l'espace de Besov $\dot{B}^{1,\infty}_1$, alors $f \in BV$. Autrement dit, nous avons l'inclusion :*

$$\dot{B}^{1,\infty}_1 \subset BV. \tag{6.28}$$

Soit $f \in \dot{B}^{1,\infty}_1(\mathbb{Z}_2)$ et fixons $|y|_2 = 2^{-m}$. Il s'agit de vérifier pour une telle fonction que l'on a l'estimation pour tout m

$$\int_{\mathbb{Z}_2} |f(x+y) - f(x)|dx \leq C\, 2^{-m}. \tag{6.29}$$

Pour la démonstration de cette majoration nous allons utiliser la décomposition de Littlewood-Paley donnée par la formule (6.11) :

$$f = S_0(f) + \sum_{j\geq 0} \Delta_j(f).$$

Nous allons donc travailler sur l'identité suivante

$$I = \left\| \left(S_0 f(x+y) + \sum_{j\geq 0} \Delta_j f(x+y) \right) - \left(S_0 f(x) + \sum_{j\geq 0} \Delta_j f(x) \right) \right\|_1 \tag{6.30}$$

Ainsi, par la définition des blocs dyadiques nous obtenons :

$$I = \left\| \big(S_m f(x+y) - S_m f(x) \big) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \big(\Delta_j f(x+y) - \Delta_j f(x) \big) \right\|_1 \tag{6.31}$$

Il vient alors :

$$I \leq \|S_m f(x+y) - S_m f(x)\|_1 + \sum_{j=m+1}^{\infty} \|\Delta_j f(x+y) - \Delta_j f(x)\|_1 . \tag{6.32}$$

Lemme 6.2.1 *Le premier terme de droite de l'estimation (6.32) est nul.*

En effet, puisqu'on avait fixé $|y|_2 = 2^{-m}$, il est facile de voir que pour $x \in Q_{m,k}$, nous avons $x + y \in Q_{m,k}$ avec $k = \{0, ..., 2^m - 1\}$.

Ainsi, si nous appliquons les opérateurs de moyenne S_m aux fonctions $f(x+y)$ et $f(x)$, nous obtenons le résultat recherché.

Le deuxième terme de (6.32) est étudié par le lemme suivant :

Lemme 6.2.2 *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.3 et pour $|y|_2 = 2^{-m}$ nous avons :*

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \|\Delta_j f(x+y) - \Delta_j f(x)\|_1 \leq C\, 2^{-m}.$$

En effet, on a :

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \|\Delta_j f(x+y) - \Delta_j f(x)\|_1 \leq 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \|\Delta_j f\|_1 .$$

Nous utilisons maintenant le fait que $\|\Delta_j f\|_1 \leq C\, 2^{-j}$ pour tout j (car $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}$ par hypothèse) pour obtenir le résultat souhaité :

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \|\Delta_j f(x+y) - \Delta_j f(x)\|_1 \leq C\, 2^{-m}.$$

On obtient ainsi, en utilisant ces deux lemmes, l'estimation :

$$I = \left\| \left(S_0 f(x+y) + \sum_{j\geq 0} \Delta_j f(x+y) \right) - \left(S_0 f(x) + \sum_{j\geq 0} \Delta_j f(x) \right) \right\|_1 \leq C\, 2^{-m}$$

Nous en déduisons l'inégalité suivante pour tout $y \in \mathbb{Z}_2$:

$$\int_{\mathbb{Z}_2} |f(x+y) - f(x)| dx \leq C\, |y|_2.$$

■

Pour finir la preuve du théorème 6.2.1, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 6.2.4 *On a l'inclusion*

$$BV(\mathbb{Z}_2) \subset \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2) \tag{6.33}$$

Remarquons que, de même que dans le cas euclidien, nous pouvons caractériser l'espace de Besov $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{Z}_2)$ par la condition

$$\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|_1 \leq C\, |y|_2.$$

Voir par exemple [74].

Pour la preuve de cette proposition nous supposons que f est une fonction appartenant à l'espace BV. On a alors :

$$\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_1 \leq C\; |y|_2.$$

En additionnant $\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1$ des deux côtés de l'inégalité précédente on obtient

$$\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_1 + \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 \leq C\; |y|_2 + \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1$$

et par l'inégalité triangulaire, le terme de gauche devient :

$$\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|_1 \leq C\; |y|_2 + \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1$$

On en déduit

$$\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|_1 \leq 2C\; |y|_2.$$

■

Cette identité entre les espaces BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$ possède quelques conséquences très remarquables que nous allons détailler dans la section suivante.

Indiquons simplement pour finir que nous avons, comme un corollaire de la proposition 6.2.2, l'inclusion suivante :

$$BV(\mathbb{Z}_2) \subset BMO(\mathbb{Z}_2).$$

6.3 Inégalités de Sobolev Précisées et espace des fonctions à variation bornée

Dans cette section nous n'allons pas faire, comme dans les chapitres précédents, un traitement systématique de ces estimations. Nons nous concentrerons essentiellement à l'étude de l'inégalité suivante sur le groupe $\mathbb{Z}_2$:

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}. \tag{6.34}$$

La question qu'on se pose ici est de savoir la validité de la majoration ci-dessus sur ce groupe p-adique.

Remarquons que ce résultat est vrai dans le cadre euclidien comme dans le cas des groupes de Lie stratifiés (cf. chapitre 4).

La grande différence avec ces groupes réside dans le fait que pour $\mathbb{Z}_2$ nous disposons du théorème 6.2.1 qui nous permet d'identifier l'espace des fonctions à variation bornée à l'espace de Besov d'indices $(1, \infty, 1)$. Ce résultat admet quelques conséquences intéressantes.

En effet, étant donné que l'on a $\|f\|_{BV} \simeq \|f\|_{\dot{B}_\infty^{1,\infty}}$ l'inégalité (6.34) devient :

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}. \tag{6.35}$$

Observons que l'estimation ci-dessus est fausse pour $\mathbb{R}^n$.

Cette remarque nous donne un élément de réponse sur la validité de (6.34) que nous développons dans le théorème suivant :

Théorème 6.3.1 *L'inégalité (6.34) est fausse dans $\mathbb{Z}_2$: il n'existe pas de constante absolue C telle que l'on ait, pour toute fonction $f \in BV \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, l'estimation :*

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}.$$

Insistons que c'est le fait d'avoir, dans le cas de $\mathbb{Z}_2$, l'équivalence $\|f\|_{BV} \simeq \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ qui rend plausible la construction d'un contre-exemple.

Pour trouver ce contre-exemple nous procédons comme suit :

Considérons d'abord α un réel positif et définissons une fonction f à l'aide des blocs dyadiques de la façon suivante :

Fixons pour cela $0 \leq j \leq j_0$ et un entier $N_j \leq 2^j$. La valeur de ces deux paramètres N_j et j_0 sera déterminée un peu plus tard. Nous écrivons alors :

$$\Delta_j f(x) = \begin{cases} \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,0}, \\ -\alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,1}, \\ \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2}, \\ -\alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,3}, \\ & \vdots \\ \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2N_j-2}, \\ -\alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2N_j-1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Une fois que nous avons construit cette fonction f, nous noterons $\beta = \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}$.

Nous pouvons à présent fixer N_j en fonction de α et de β en posant :

$$N_j = \frac{\beta}{\alpha} 2^{3j}.$$

Avec la condition de taille de N_j (rappelons que $N_j \leq 2^j$), nous avons

$$N_j = \frac{\beta}{\alpha} 2^{3j} \leq 2^j \iff 2^{2j} \leq \frac{\alpha}{\beta} = 2^{j_0}. \tag{6.36}$$

La valeur du paramètre j_0 est donc :

$$j_0 = \log_2 \frac{\alpha}{\beta}.$$

Une fois que tous ces paramètres sont fixés nous pouvons nous attaquer au calcul de la norme L^2 des blocs dyadiques :

$$\|\Delta_j f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N_j} (\alpha 2^{-j})^2 2^{-j} = \alpha^2 2^{-3j} N_j = \alpha^2 2^{-3j} \frac{\beta}{\alpha} 2^{3j} = \alpha\beta.$$

On passe à présent au calcul de la norme L^2 de cette fonction, il vient :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{j_0} \|\Delta_j f\|_2^2 = \alpha\beta \log_2 \frac{\alpha}{\beta}. \tag{6.37}$$

Venons en à la norme L^1 des blocs dyadiques, nous obtenons :

$$\|\Delta_j f\|_1 = \alpha 2^{-2j} N_j. \tag{6.38}$$

En utilisant la condition de taille de N_j nous observons que l'on a pour tout j :

$$2^j \|\Delta_j f\|_1 = \leq \alpha.$$

Nous pouvons alors estimer la norme $\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ par la quantité α.

Ainsi, en utilisant cette remarque sur α et avec la définition du paramètre β, nous obtenons avec (6.37) la formule suivante :

$$\|f\|_2^2 \simeq \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \log_2 \frac{\alpha}{\beta}.$$

On ne peut avoir l'inégalité de Sobolev précisée pour une telle fonction. En effet, en revenant à (6.35) on obtiendrait, pour une constante universelle C, l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \log_2 \frac{\alpha}{\beta} &\leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \\ \Longleftrightarrow \log_2 \frac{\alpha}{\beta} &\leq C. \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas le cas car la fonction $\log_2$ n'est pas bornée.

■

On pourrait imaginer que la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$ est trop petite pour que cette inégalité soit vraie. Nous verrons dans le prochain théorème qu'il n'en est rien : on peut considérer des normes plus grandes (par l'emboîtement des espaces de Besov) et nous pouvons encore construire de façon similaire un contre exemple.

Théorème 6.3.2 *L'inégalité suivante est fausse dans $\mathbb{Z}_2$ pour $q > 1$:*

$$\|f\|_2^2 \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,q}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \tag{6.39}$$

La démonstration de ce résultat est très semblable à celle exposée dans les lignes ci-dessus.

Soit $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$ une suite décroissante n'appartenant pas à $\ell^1(\mathbb{N})$.

Considérons des paramètres α, j_0 et N_j. On construit alors une fonction f en utilisant les blocs dyadiques :

$$\Delta_j f(x) = \begin{cases} \varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,0}, \\ -\varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,1}, \\ \varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2}, \\ -\varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,3}, \\ & \vdots \\ \varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2N_j-2}, \\ -\varepsilon_j \alpha 2^{-j} & \text{sur} \quad Q_{j+1,2N_j-1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Avec cette fonction f, on notera $\beta = \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}$.

Remarquons que l'on a $N_j \leq 2^j$, on fixe alors ce paramètre en fonction de α et de β :

$$N_j = \frac{\beta}{\alpha\varepsilon_j} 2^{3j} \leq 2^j.$$

Ainsi, il existe j_0 tel que $j_0 = \log_2 \frac{\alpha}{\beta}$.

Nous calculons maintenant la norme L^2 de ces blocs dyadiques :

$$\|\Delta_j f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N_j} (\alpha 2^{-j}\varepsilon_j)^2 2^{-j} = \alpha^2 2^{-3j} N_j \varepsilon_j^2$$

On obtient

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{j_0} \|\Delta_j f\|_2^2 = \alpha\beta \sum_{j=0}^{j_0} \varepsilon_j.$$

Evaluons pour finir la norme L^1 de ces fonctions de Littlewood-Paley, il vient :

$$\|\Delta_j f\|_1 = \varepsilon_j \alpha 2^{-2j} N_j.$$

Par la définition de N_j, nous avons :

$$\|\Delta_j f\|_1 \leq \varepsilon_j \alpha 2^{-j}.$$

Nous estimons alors la norme de l'espace de Besov $\dot{B}_1^{1,q}$ par la quantité α.
On obtient alors :

$$\|f\|_2^2 = \|f\|_{\dot{B}_\infty^{1,q}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \sum_{j=0}^{j_0} \varepsilon_j.$$

Puisque la suite $\{\varepsilon_j\} \in \ell^q$ n'appartient pas à ℓ^1, si j_0 est suffisament grand, on ne peut avoir l'inégalité annoncée par le théorème : il n'existe pas de constante absolue telle que (6.39) ait lieu.

$\blacksquare$

Chapitre 7

Généralisations possibles

Nous considérons ici deux extensions de quelques uns des résultats obtenus dans le chapitre 3. Une direction est donnée par les groupes de Lie à croissance polynômiale tandis que la deuxième, qui est en fait comprise dans la première, se situe dans le cadre des groupes de Lie nilpotents.

Nous décrivons d'abord l'environnement général dans lequel on se place pour ensuite traiter les inégalités de Sobolev classiques. Finalement, et dans chacun des deux cas précédents, on proposera une amélioration de ces estimations.

Soit alors G un groupe de Lie connexe muni de sa mesure de Haar, nous dirons qu'il est *unimodulaire* si dx est invariant à gauche et à droite sous l'action du groupe.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on fixe une famille

$$X = \{X_1, ..., X_k\} \tag{7.1}$$

de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander : l'algèbre de Lie est engendrée par les X_i pour $i = 1, ..., k$.

Rappelons que l'invariance à gauche signifie que pour tout $y \in G$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ on a $X(f(y \cdot x)) = (Xf)(y \cdot x)$.

Nous associons à cette famille X une distance, appelée dans la littérature distance de Carnot-Carathéodory[1] ou distance de contrôle, de la manière suivante :

Soit $\gamma : [0, 1] \to G$ un chemin continu. Nous dirons que γ est admissible s'il existe des fonctions mesurables $a_1, ..., a_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telles que, pour presque tout $t \in [0, 1]$, on ait $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(\gamma(t))$.

[1]Ce type de groupe est parfois désigné comme *groupes de Carnot-Carathéodory*.

Si le chemin γ est admissible, on définit la longueur de γ par la formule :

$$|\gamma| = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i(t)|^2 \right)^{1/2} dt.$$

Alors, pour tout $x, y \in G$, la distance entre x et y est l'infimum des longueurs de toutes les courbes admissibles rejoignant x à y :

$$d_c(x,y) = \inf\{|\gamma| / \ \gamma(0) = x; \ \gamma(1) = y\}. \tag{7.2}$$

Remarquons que de telles courbes existent grâce à la condition de Hörmander et que l'invariance à gauche des champs de vecteurs transmet cette propriété à la distance d_c (cf. [81] p. 39).

On note $|x|$ la distance entre le point $x \in G$ et l'élément neutre e du groupe, ainsi, la distance entre x et y est donnée par $|y^{-1} \cdot x|$.

Pour $r > 0$ et $x \in G$ on pose $B(x, r)$ la boule ouverte par rapport à la distance de Carnot-Carathéodory centrée au point x et de rayon r, $V(r)$ désigne la mesure de Haar des boules de rayon r.

Il est bien connu (cf. [81]) qu'il existe pour de tels groupes un entier positif d ainsi que deux constantes c_1 et c_2 tels que, pour tout $r \in]0, 1[$, on ait

$$c_1 r^d \leq V(r) \leq c_2 r^d. \tag{7.3}$$

Cet entier d est la dimension locale de (G, X).

Dans le cas où $r \geq 1$, nous avons seulement deux possibilités :

(i) Soit le groupe est *à croissance polynômiale*, ce qui signifie qu'il existe un entier D et deux constantes c_1' et c_2' tels que pour tout $r \geq 1$,

$$c_1' r^D \leq V(r) \leq c_2' r^D. \tag{7.4}$$

(ii) Soit le groupe est *à croissance exponentielle* : il existe $\alpha, \beta, \sigma, \delta > 0$ tels que pour tout $r \geq 1$, on a

$$\alpha e^{\beta r} \leq V(r) \leq \sigma e^{\delta r}. \tag{7.5}$$

Lorsque G est à croissance polynômiale, l'entier D de (7.4) est la dimension à l'infini de G. Remarquons que, contrairement à d, cette quantité dépend uniquement du groupe et non du choix de la famille X (cf. [81]).

Observons également que lorsqu'un groupe G vérifie (7.3) et (7.4) nous obtenons la propriété homogène de la mesure suivante : il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $r > 0$ on ait

$$V(2r) \leq K\, V(r). \tag{7.6}$$

Tous les groupes de Lie nilpotents, dont les groupes stratifiés sont un exemple particulier, sont unimodulaires à croissance polynômiale. Remarquons en plus que $d = D$ si et seulement si G est stratifié et la famille X génère la première tranche de la stratification (cf. [81]).

Voici un exemple de groupe qui n'est pas unimodulaire et à croissance exponentielle [56] :

Soit G le groupe à deux dimensions des transformations affines sur $\mathbb{R}$, $\sigma : \xi \longmapsto y\xi + x$, $(\xi \in \mathbb{R})$ avec $0 < y = e^t$ et $x, t \in \mathbb{R}$.

Ce groupe n'est pas unimodulaire car $d^r g = y^{-1} dxdy$ est la mesure de Haar à droite, tandis que $d^l g = y^{-2} dxdy$ est la mesure de Haar à gauche.

La fonction modulaire est alors $m(g) = d^r g / d^l g = y$, dont la non trivialité entraîne que G est à croissance exponentielle.

Remarquons pour finir que quelques résultats existent dans le cadre des groupes de Lie à croissance exponentielle concernant les inégalités de Sobolev (cf. [81] chapitre IX et [61]) que nous traitons pas dans cette thèse.

Avec le système de Hörmander (7.1) nous pouvons construire un sous-Laplacien en procédant de la même façon que lorsqu'on étudiait les groupes stratifiés :

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2. \tag{7.7}$$

Nous associons à cet opérateur un gradient en posant $\Delta = \nabla^* \nabla$ où $\nabla f = (X_1 f, ..., X_k f)$. On écrit en outre pour $1 \leq p < \infty$:

$$\|\nabla f\|_p = \left(\int_G |\nabla f|^p dx \right)^{1/p} \qquad et \qquad |\nabla f| = \left(\sum_{i=1}^{k} |X_i f|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.8}$$

Remarque 7.1 Dans les chapitres précédents nous avons utilisé des opérateurs Laplacien très particuliers, par exemple dans le groupe de Heisenberg on a posé

$$\mathcal{J} = -(X_1^2 + X_2^2).$$

A présent nous pouvons prendre en compte le troisième champs de vecteurs (cf. (2.14)) :

$$\Delta = -(X_1^2 + X_2^2 + T^2).$$

Le lecteur observera que ce Laplacien ne vérifie aucune propriété par rapport à la dilatation du groupe $\mathbb{H}$.

La condition de Hörmander vérifiée par la famille X est pour nous très importante puisqu'elle garantie plusieurs des propriétés essentielles du sous-Laplacien.

Nous considérons donc le semi-groupe symétrique défini par $H_t = e^{-t\Delta}$ avec son noyau de convolution :

$$H_t f(x) = \int_G f(y) h_t(y^{-1} \cdot x) dy = f * h_t(x). \tag{7.9}$$

On dispose alors des propriétés générales **(P1)-(P7)** explicitées dans l'introduction p.7.

Dans ce cadre, E.M. Stein [73] fait une étude détaillée de la théorie de Littlewood-Paley pour les espaces de Lebesgue. Nous allons suivre cette voie pour traiter les inégalités qui nous intéressent.

7.1 Groupes à croissance polynômiale

Nous traitons ici les inégalités de Sobolev classiques et nous proposons deux améliorations de ces estimations. En absence de structure de dilatation nos calculs reposeront principalement sur certaines propriétés du noyau de la chaleur.

Il est alors important de noter que dans ce cadre général nous ne disposons pas de toutes les majorations que nous avons exposé au chapitre 2. Nous verrons ci-dessous comment cela limite notre étude. Introduisons donc les notations suivantes :

Soit $I = (i_1, ..., i_\beta) \in \{1, ..., k\}^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$) un multi-indice, on pose $|I| = \beta$ et $X^I = X_{i_1} ... X_{i_\beta}$ avec la convention $X^I = Id$ si $\beta = 0$.

On dira que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G)$ est dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ si l'on a pour toutes les semi-normes

$$N_{\alpha,I}(\varphi) = \sup_{x \in G} (1 + |x|)^\alpha |X^I \varphi(x)| < \infty. \qquad (\alpha \in \mathbb{N}, I \in \bigcup_{\beta \in \mathbb{N}} \{1, ..., k\}^\beta)$$

On focalise notre attention sur le noyau de la chaleur. Remarquons que sur ces groupes de Lie, nous avons des estimations pour les dérivées partielles de ce noyau, suivant la variable de temps à tous les ordres et pour tout temps, qu'il soit petit ou grand (voir par exemple [81]).

En revanche, pour les dérivées d'espace, deux choix s'offrent à nous : soit on a besoin de dérivées à tous les ordres, et dans ce cas le temps doit être petit ($0 < t \leq 1$) ; soit on considère des majorations pour tout temps ($t > 0$) et alors nous ne disposons que de dérivées d'espace d'ordre 1 uniquement. Plus précisément on a le

Théorème 7.1.1 *Soit G un groupe de Lie à croissance polynômiale de dimension locale d. Alors :*

(1) (cf. [81] Théorème VIII.2.7) Pour $i = 1, ..., k$ et pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^m X_i h_t(x) \right| \leq C_m \, t^{-m-1/2} [V(\sqrt{t})]^{-1} e^{-|x|^2/C_m t}, \qquad x \in G, \; t > 0; \tag{7.10}$$

(2) (cf. [36] formule (7)) Si nous voulons considérer d'autres dérivées d'espace nous avons pour tout multi-indice I :

$$|X^I h_t(x)| \leq C \, t^{-\frac{d+|I|}{2}} e^{-|x|^2/Ct}, \qquad x \in G, \; 0 < t \leq 1. \tag{7.11}$$

De même que dans le cadre des groupes stratifiés, le théorème 7.1.1 implique la

Proposition 7.1.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, pour tout multi-indice I et pour tout $p \in [1, \infty]$ il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|(1 + |\cdot|)^\alpha X_i h_t(\cdot)\|_p \leq C(1 + \sqrt{t})^\alpha t^{-1/2} [V(\sqrt{t})]^{-1/p'}, \quad t > 0; \; i = 1, ..., k \tag{7.12}$$

$$\|(1 + |\cdot|)^\alpha X^I h_t(\cdot)\|_p \leq C t^{-(\frac{d}{2p'} + \frac{|I|}{2})}, \qquad 0 < t \leq 1. \tag{7.13}$$

Nous omettons la preuve de cette proposition pour éviter des répétitions fastidieuses puisqu'elle suit, mot pour mot, celle de la proposition 2.2.3 p. 55 une fois que l'on dispose des majorations (7.10) et (7.11).

Relions maintenant ces résultats avec la théorie spectrale.

En effet, le sous-Laplacien déterminé par (7.1) est un opérateur positif, autoadjoint et admet une décomposition spectrale du type :

$$\Delta = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda. \tag{7.14}$$

Nous utiliserons cette formule de la même manière que dans le chapitre 2 pour produire de nouveaux opérateurs.

Nous disposons ici des mêmes résultats exposés dans la proposition 2.3.4 et son corollaire 2.3.1 p. 63.

Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$ et m une fonction de classe $\mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^+)$ on écrit

$$\|m\|_{(\sigma)} = \sup_{\substack{1 \leq r \leq \sigma \\ \lambda > 0}} (1 + \lambda)^\sigma |m^{(r)}(\lambda)|. \tag{7.15}$$

La formule ci-dessus nous donne une condition nécessaire pour obtenir certaines propriétés des opérateurs définis par $m(t\Delta) = \int_0^\infty m(t\lambda) dE_\lambda$ comme nous l'indique le

Théorème 7.1.2 *Soient $\alpha \in \mathbb{N}$, I un multi-indice et $p \in [1, \infty]$. Il existe une constante $C > 0$ et un entier σ tels que, pour toute fonction $m \in \mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^+)$ avec $\|m\|_{(\sigma)} < \infty$, le noyau M_t de l'opérateur $m(t\Delta)$, $t > 0$, satisfait les estimations* *(a) Pour tout $t > 0$ et $i = 1, ..., k$:*

$$\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X_i M_t(\cdot)\|_p \leq C t^{-1/2}(1+\sqrt{t})^{\alpha}[V(\sqrt{t})]^{-1/p'}\|m\|_{(\sigma)} \qquad (1 \leq p \leq \infty). \quad (7.16)$$

(b) Si $0 < t < 1$, nous avons

$$\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I M_t(\cdot)\|_p \leq C t^{-(\frac{d}{2p'}+\frac{|I|}{2})}\|m\|_{(\sigma)} \qquad (1 \leq p \leq \infty). \quad (7.17)$$

En outre, si m est la restriction sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors son noyau M est dans $\mathcal{S}(G)$. Si de plus, m s'annule à tous les ordres au voisinage de l'origine, alors $M \in \mathcal{S}_0(G)$.

Nous prions le lecteur de consulter la démonstration détaillée dans [36].

Ici, on se bornera à faire quelques remarques sur la preuve de ce théorème en fonction des hypothèses que l'on dispose. Pour cela nous supposerons, pour plus de commodité, que la fonction m s'annule sur $[2, \infty[$.

Fixons à présent un $t > 0$. On considère la fonction θ définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\theta(\lambda) = e^{\lambda} m(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

en particulier on obtient $\|\theta\|_{(\sigma)} \leq C\|m\|_{(\sigma)}$.

Du point de vue des noyaux il vient : $M_t = \Theta_t * h_t$ où Θ_t est le noyau de l'opérateur $\theta(t\Delta)$. Ainsi $M_t \in \mathcal{C}^{\infty}$ avec $X^I M_t = \Theta_t * X^I h_t$. Nous avons alors, pour tout $x \in G$:

$$\begin{aligned}(1+|x|)^{\alpha}|X^I M_t(x)| \quad \leq \quad & C\left(\int_G (1+|y|)^{\alpha}|\Theta_t(y)|\,|X^I h_t(y^{-1}\cdot x)|dy + \right.\\ & \left.\int_G |\Theta_t(y)|(1+|y^{-1}\cdot x|)^{\alpha}\,|X^I h_t(y^{-1}\cdot x)|dy\right)\end{aligned}$$

En calculant la norme L^p dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I M_t(\cdot)\|_p \leq C\left(\|(1+|\cdot|)^{\alpha}\Theta_t(\cdot)\|_1\,\|X^I h_t\|_p + \|\Theta_t\|_1\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I h_t(\cdot)\|_p\right) \quad (7.18)$$

Observons que dans ce cas simplifié il suffit de vérifier que l'on a

$$\|(1+|\cdot|)^{\alpha}\Theta_t(\cdot)\|_1 \leq C(1+\sqrt{t})^{\alpha}\|m\|_{(\sigma)},$$

ce qui est vrai pour tout temps $t > 0$ (cf. [36] Proposition 6).

En revanche, pour estimer le terme $\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I h_t(\cdot)\|_p$ de la formule (7.18), nous avons le choix entre (7.12) et (7.13) selon que l'on considère des restrictions par rapport au temps t.

Inégalités de Sobolev classiques

Nous expliquons le lien existant entre ces estimations et les propriétés du noyau de la chaleur. On considérera que les espace de Sobolev sont définis comme dans la section 2.3 du chapitre 2.

Théorème 7.1.3 *Soit G un groupe de Lie à croissance polynômiale.*
On suppose que l'on a $d \leq D$, où d et D représentent la dimension locale et la dimension à l'infini du groupe.

Si le noyau de la chaleur vérifie les majorations exposées dans la première partie de la proposition 7.1.1 (pour tout $t > 0$), nous avons :

(I) Pour tout $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $n \in [d, D]$ tels que $\alpha p < n$, l'opérateur $\Delta^{-\alpha/2}$ est borné de L^p dans $L^{\frac{np}{n-\alpha p}}$, et donc :

$$\|f\|_{\frac{np}{n-\alpha p}} \leq C\|\Delta^{\alpha/2} f\|_p.$$

Si $p = 1$, nous avons l'estimation faible

$$\|f\|_{\frac{n}{n-\alpha},\infty} \leq C\|\Delta^{\alpha/2} f\|_1.$$

Si $n \in]d, D[$, alors nous disposons de l'inégalité forte :

$$\|f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq C\|\Delta^{\alpha/2} f\|_1.$$

(II) Pour tout $n \in [d, D]$ on a :

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq C\|\nabla f\|_1, \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(G))$$

Pour la démonstration de ce théorème nous suivons le livre [81] où le lecteur pourra trouver tous les détails que nous passons sous silence.

Les deux premières parties de (I) découlent directement, une fois que l'on dispose des estimations sur le noyau de la chaleur, de la théorie de l'interpolation de Marcinkiewicz (voir le théorème II.2.7 du livre cité).

Le fait que l'opérateur $\Delta^{-\alpha/2}$ soit borné de L^1 sur $L^{\frac{n}{n-\alpha}}$ provient quant à lui des estimations faibles pour $n = d$ et $n = D$.

Ce fait est très remarquable car dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans les groupes stratifiés), l'espace potentiel $\dot{\mathcal{W}}^{\alpha,1}$ ne se plonge jamais dans un espace L^p.

Pour la partie (II) nous rappelons que $H_t = e^{-t\Delta}$ et on pose $\Delta_i = \Delta^{-1} X_i$ pour $i \in \{1, ..., k\}$.

Nous avons alors les identités $\Delta^{-1} = \int_0^\infty H_t dt$ et $\Delta_i f = \int_0^\infty H_t X_i f dt$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$.

Remarquons que l'opérateur dual de H_tX_i est $-X_iH_t$ et donc, par les propriétés du semi-groupe de la chaleur, nous avons :

$$\|H_tX_i\|_{1\to 1} = \|X_iH_t\|_{\infty\to\infty} = \|X_ih_t\|_1 \leq Ct^{-1/2}, \qquad (t>0). \tag{7.19}$$

Cette dernière majoration provient de (7.12).

De plus, on a aussi, pour $t > 0$:

$$\|H_tX_i\|_{1\to\infty} = \|X_iH_t\|_{1\to\infty} = \|X_ih_t\|_\infty \leq \|X_ih_{t/2}\|_1\|h_{t/2}\|_\infty \leq Ct^{-(n+1)/2}. \tag{7.20}$$

Ici, l'estimation vient de l'action conjuguée de (7.12), des estimations sur le volume $V(\sqrt{t})$ et du fait que l'on a $d \leq n \leq D$.

Ceci étant dit, nous pouvons utiliser le lemme suivant (voir [81] remarque II.2.8 p. 12 pour une démonstration) :

Lemme 7.1.1 *Si l'on a les estimations (7.19) et (7.20), alors l'opérateur* $\Delta_i = \Delta^{-1}X_i$ *(*$i\in\{1,...,k\}$*) est de type faible (1,n/(n-1)).*

En particulier, il vient :

$$|\{|\Delta_i f| > \alpha\}| \leq C\left(\alpha^{-1}\|f\|_1\right)^{n/(n-1)}.$$

Mais étant donné que l'on a $f = -\sum_{i=1}^k \Delta_iX_if$, on obtient :

$$|\{|f| > \alpha\}| \leq C\left(\alpha^{-1}\sum_{i=1}^k \|X_if\|_1\right)^{n/(n-1)}$$

$$\iff |\{|f| > \alpha\}| \leq C\left(\alpha^{-1}\|\nabla f\|_1\right)^{n/(n-1)}. \tag{7.21}$$

C'est donc une version faible du résultat que nous souhaitons démontrer.

Pour passer à des estimations fortes, on pose :

$$f_t = \mathbb{1}_{\{x\in G/f(x)>t\}}, \qquad \text{pour} \quad f\geq 0, \quad f\in\mathcal{C}_0^\infty(G).$$

Lemme 7.1.2 *Nous avons les formules suivantes :*

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f_t\|_1 dt \qquad , \qquad \|f\|_{n/(n-1)} \leq \int_0^\infty \|f_t\|_{n/(n-1)}dt, \tag{7.22}$$

$$\textit{et} \quad \|\nabla f\|_1 \; = \; \int_0^\infty \|\nabla f_t\|_1 dt. \tag{7.23}$$

En admettant ce lemme (cf. [81]), nous pouvons appliquer, en régularisant f puis en passant à la limite, l'inégalité faible (7.21) à condition d'interpréter la norme L^1 du gradient

comme la masse totale de la mesure ∇f_t.
Il vient donc :

$$\|f_t\|_{n/(n-1)} \le |\{f_t > 1/2\}|^{(n-1)/n} \le C\|\nabla f_t\|_1, \qquad t > 0.$$

Il faut maintenant utiliser les formules (7.22) et (7.23) pour conclure :

$$\|f\|_{n/(n-1)} \le \int_0^\infty \|f_t\|_{n/(n-1)} dt \le C \int_0^\infty \|\nabla f\|_1 dt = C\|\nabla f\|_1.$$

■

Remarque 7.2 Avec la partie (II) de ce résultat nous traitons le cas $p = \alpha = 1$ du théorème 3.1.1 p. 68.

7.1.1 Inégalités de Sobolev Précisées

On se propose maintenant de raffiner les estimations données par le théorème 7.1.3. De même que dans les cas traités précédemment dans les chapitres 1 et 3, les inégalités proposées ci-dessous ne font pas intervenir la dimension, qu'elle soit locale ou à l'infini.

Introduisons à présent la norme de l'espace de Besov homogène dont nous avons besoin :

$$\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-s,\infty}} = \sup_{t>0} t^{s/2}\|H_t f\|_\infty, \tag{7.24}$$

où $s > 0$. Plus généralement, pour $1 \le p, q \le \infty$ et pour k un entier tel que $k > s/2 > 0$ on considérera la définition suivante :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{k-s/2}\|\partial_t^k H_t(f)\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}. \tag{7.25}$$

On dispose maintenant de tous les ingrédients pour énoncer nos résultats dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynômiale.

Théorème 7.1.4 *Soit $1 \le p < q < \infty$ et $\theta = p/q$. Supposons que $\nabla f \in L^p(G)$ et que $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(G)$, alors :*

(I) Si $\beta = p/(q-p)$, nous avons l'estimation :

$$\|f\|_q \le C\|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}. \tag{7.26}$$

(II) Si $0 \le s < 1/q$, on fixe $\beta = \frac{p-qs}{q-p}$. Il vient :

$$\|f\|_{\dot{W}_\infty^{s,q}} \le C\|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{7.27}$$

Nous avons vu à plusieurs reprises que ces deux résultats sont conséquence de la pseudo-inégalité de Poincaré. Nous traitons donc cette majoration avec le

Théorème 7.1.5 *(Pseudo-inégalité de Poincaré)*
Pour toute fonction f telle que $\nabla f \in L^p(G)$ et pour $0 \leq s < 1$, nous avons

$$\|\Delta^{s/2} f - H_t \Delta^{s/2} f\|_p \leq C\, t^{(1-s)/2} \|\nabla f\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty, t > 0) \tag{7.28}$$

Les preuves de ces deux théorèmes suivent les mêmes étapes déjà exposées dans les sections 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3 du chapitre 3. Les vérifications sont évidentes une fois que l'on dispose des estimations nécessaires sur le noyau de la chaleur. Elles sont laissées au lecteur.

■

7.2 Groupes de Lie nilpotents

On se propose d'améliorer le théorème 7.1.3 pour une classe de groupes que se situent à "mi-chemin" entre les groupes stratifiés que nous avons déjà vu et les groupes à croissance polynômiale dont l'étude a été faite dans la section précédente.

7.2.1 Définitions et propriétés

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie à dimension finie. On pose $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$ pour $i \geq 2$. La suite $(\mathfrak{g}_i)_{i>0}$ est une suite décroissante de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ (cf. [81]).

Une algèbre de Lie est nilpotente de rang r si l'on a $\mathfrak{g}_{r+1} = \{0\}$. Un groupe de Lie sera nilpotent de rang r si son algèbre vérifie cette propriété. Nous savons que les groupes de Lie stratifiés sont un exemple particulier de groupes nilpotents. La généralisation dans cette section provient du fait que tout groupe de Lie nilpotent n'est pas forcément muni d'une structure de dilatation (cf. [31]).

Nous supposerons dans cette section que G est un groupe de Lie nilpotent de rang r et simplement connexe. Il est alors possible de voir que l'application exponentielle est un difféomorphisme global de $\mathfrak{g}$ dans G et la mesure de Haar sur le groupe est l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ sous ce difféomorphisme (cf. [81]).

De plus, si $X = \{X_1, ..., X_k\}$ est un système de Hörmander pour un groupe nilpotent, nous lui associerons la distance de Carnot-Carathéodory d_c donnée par (7.2) ainsi que le sous-Laplacien (7.7).

Le noyau de la chaleur h_t déterminé par la famille X vérifie quelques estimations intéressantes qui ne sont pas vraies pour tout groupe à croissance polynômiale. En effet, le résultat qui suit est à rapprocher du théorème 7.1.1, mais la grande différence est que l'on dispose d'estimations valables pour tout $t > 0$.

Théorème 7.2.1 *Soit G un groupe de Lie nilpotent, soit X un système de Hörmander et h_t le noyau de la chaleur associé. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice I, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $\varepsilon > 0$:*

$$\left|X^I h_t(x)\right| \leq C\, t^{-|I|/2} [V(\sqrt{t})]^{-1} exp(-|x|^2/4(1+\varepsilon)t). \tag{7.29}$$

pour tout $x \in G$ *et pour tout temps* $t > 0$.

Le lecteur peut trouver une démonstration de ce résultat dans le livre [81] (Théorème *IV.4.2*).

Voici maintenant deux conséquences de ces estimations du noyau de la chaleur :

Corollaire 7.2.1 *Soient* $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* I *un multi-indice. Il existe alors* $C > 0$ *telle que :*

$$\left\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I h_t(\cdot)\right\|_p \leq C\, t^{-|I|/2}(1+\sqrt{t})^{\alpha}[V(\sqrt{t})]^{-1/p'}, \tag{7.30}$$

Si l'on considère la théorie spectrale, il vient :

Corollaire 7.2.2 *Soit* M_t *le noyau de l'opérateur* $m(t\Delta) = \int_0^\infty m(t\lambda)dE_\lambda$ *où la fonction* m *vérifie la condition (7.15) pour un certain* n.
Sous les hypothèses du corollaire précédent (en particulier pour tout temps $t > 0$*), il existe une constante* $C > 0$ *et un entier* n *tels que :*

$$\left\|(1+|\cdot|)^{\alpha} X^I M_t(\cdot)\right\|_p \leq C\, t^{-|I|/2}(1+\sqrt{t})^{\alpha}[V(\sqrt{t})]^{-1/p'}\|m\|_{(n)}. \tag{7.31}$$

7.2.2 Inégalités Précisées

Les techniques utilisées précédemment au chapitre 2 pour obtenir une caractérisation équivalente en terme des fonctions de Littlewood-Paley dyadiques peuvent s'appliquer sans problèmes aux groupes nilpotents.

Avec le résultat du corollaire 7.2.1 et en nous appuyant sur le théorème 7.1.2, nous pouvons construire les blocs dyadiques de la même façon que dans la section 2.3.1 du chapitre 2.

Remarque 7.3 Pour l'utilisation de la formule (7.31) dans la construction des fonctions de Littlewood-Paley, il faudra prendre en compte les estimations qu'on l'on dispose de la quantité $[V(\sqrt{t})]^{-1/p'}$.

Il y a en effet une échelle de coupure en fonction de la valeur du paramètre t. Si celui-ci est grand alors $[V(\sqrt{t})]^{-1/p'} \sim t^{-D/2p'}$, si celui-ci est petit on a $[V(\sqrt{t})]^{-1/p'} \sim t^{-d/2p'}$.

Nous avons donc les normes équivalentes suivantes en fonction de ces blocs dyadiques pour les espaces de Lebesgue, Sobolev et de Besov

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &\simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\
\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} &\simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2sj} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\
\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p} &\simeq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qsj} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les inégalités :

Théorème 7.2.2 *Soit $1 < p < q < \infty$. On fixe les réels suivants $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ avec $\theta = p/q$. Soit $f \in \dot{W}^{s_1,p}$ et $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_\infty$, alors on a*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|^\theta_{\dot{W}^{s_1,p}} \|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_\infty}. \tag{7.32}$$

Remarque 7.4 Observons finalement que l'on ne sait pas construire par cette méthode une décomposition de Littlewood-Paley homogène sur les groupes de Lie à croissance polynômiale.

Ceci est dû au fait suivant : si $t > 1$, nous sommes en dehors du domaine de validité des estimations (7.17) données par le théorème 7.1.2.

Les petites échelles ne posant pas de problèmes, les auteurs de [36] donnent alors une décomposition de Littlewood-Paley inhomogène ainsi que des normes équivalentes pour les espaces de Besov.

Annexe A

Le groupe de Heisenberg bis

Nous exposons ici deux exemples d'utilisation de l'expression explicite du noyau de la chaleur : le premier exemple consiste à vérifier "à la main" que ce noyau appartient à la classe de Schwartz tandis que le deuxième donne concrètement les noyaux des opérateurs utilisés dans la décomposition de Littlewood-Paley p. 64 du chapitre 2.

Rappelons rapidement le contexte.
Soit $\mathbb{H}$ le groupe de Heisenberg munit de la loi de groupe

$$x\cdot y=(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3+\frac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2)),$$

et de la dilatation $\delta_\alpha[x]=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha^2x_3)$ pour $\alpha>0$. Les champs de vecteurs sont donnés par :

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\,,\qquad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\,,\qquad T=\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

On conserve la notation $\mathcal{J}=-(X_1^2+X_2^2)$ pour le sous-Laplacien.

Le noyau de la chaleur est donné explicitement par la formule suivante :

$$h_t(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\lambda t)}\cos(\lambda x_3)e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda t)}d\lambda. \tag{A.1}$$

Une première formule attire notre attention, on remarque qu'en faisant le changement de variable $\lambda s=u$ dans la définition précédente, nous avons :

$$h_t(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{t^2}h_1\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}},\frac{x_2}{\sqrt{t}},\frac{x_3}{t}\right) \tag{A.2}$$

Autrement dit, $h_t(x)=t^{-N/2}h_1(\delta_{t^{-1/2}}[x])$ où $N=4$ est la dimension homogène du groupe de Heisenberg.

Cette formule nous sera très utile par la suite et une première application intervient dans la preuve de la proposition classique suivant :

Proposition A.1 *Le noyau de la chaleur $h_t(x)$ est une fonction qui appartient à la classe de Schwartz sur $\mathbb{H}$ pour tout $t > 0$.*

Grâce en effet à (A.2), il suffit de démontrer cette proposition pour $t = 1$ pour ensuite obtenir le résultat général.

On remarque d'abord que $\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} \cos(\lambda x_3)$ et $\lambda \coth(\lambda)$ comme fonctions de λ sont paires. Nous pouvons alors étendre l'intégrale (A.1) ci-dessus de la façon suivante :

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} \cos(\lambda x_3) e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda)} d\lambda$$

En transformant le cosinus on a :

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda)} e^{i\lambda x_3} d\lambda \\ &+ \frac{1}{4(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda)} e^{-i\lambda x_3} d\lambda \end{aligned}$$

puis, en posant $f(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} \exp[-\frac{\lambda}{4}(x_1^2 + x_2^2)\coth(\lambda)]$, on obtient :

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \lambda) e^{i\lambda x_3} d\lambda + c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \lambda) e^{-i\lambda x_3} d\lambda. \qquad \text{(A.3)}$$

Nous remarquons que les deux intégrales intervenant dans l'expression (A.3) sont les transformations de Fourier partielles de la même fonction $f(x_1, x_2, \lambda)$.

Il suffit alors de vérifier que cette fonction appartient à la classe de Schwartz, ainsi, puisque cette transformation est un isomorphisme on obtient que $h_1(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$.

Pour cela nous allons démontrer que $f(x_1, x_2, \lambda)$ est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

Etant donné que $\sigma \coth(\sigma) \geq 1$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on peut faire la majoration suivante :

$$f(x_1, x_2, \lambda) \leq \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}$$

Il suffit maintenant de voir que, pour tout entier K :

$$(x_1^2 + x_2|^2 + \lambda^2)^K \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} e^{-\frac{1}{4}(x_1+x_2^2)} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisqu'on a $(x_1^2 + x_2^2 + \lambda^2)^K \leq (1 + \lambda^2)^K (1 + x_1^2 + x_2^2)^K$ nous obtenons :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \lambda^2)^K \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)} e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)} \leq \underbrace{(1 + \lambda^2)^K \frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}}_{1} \underbrace{(1 + x_1^2 + x_2^2)^K e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}}_{2}$$

La croissance polynômiale du premier terme ci-dessus est controlée par la fonction $\sinh^{-1}(\lambda)$; dans le deuxième terme c'est la gaussienne qui permet la décroissance à l'infini.

De même, lors des dérivations, on garde toujours cette décroissance forte, ce qui nous assure l'appartenance de f à la classe de Schwartz et donc celle du noyau de la chaleur h_t.

$\blacksquare$

Maintenant, nous allons utiliser l'expression du noyau de la chaleur pour étudier la décomposition de Littlewood-Paley sur le groupe de Heisenberg.

Plus particulièrement, il est possible grâce à (A.1) de faire le lien entre la théorie spectrale employée au chapitre 2 et les opérateurs de convolution avec des fonctions explicites :

Proposition A.2 *Soit ψ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à support compact, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'annulant à tous les ordres près de l'origine. Alors l'opérateur défini par $\psi(\mathcal{J})$ admet un noyau de convolution K dans la classe de Schwartz dont tous les moments sont nuls.*

En effet, on a par définition du calcul symbolique :

$$\psi(\mathcal{J}) = \int_0^{+\infty} \psi(\lambda) dE_\lambda. \tag{A.4}$$

On écrit alors $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega\lambda} d\omega$ et l'on a :

$$\psi(\mathcal{J}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega\lambda} dE_\lambda \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Il vient alors :

$$\psi(\mathcal{J}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega\mathcal{J}} \frac{d\omega}{2\pi}$$

ce qui nous conduirait à une intégrale divergente. Nous allons forcer la convergence en introduisant un facteur de convergence. Pour cela on remplace (A.4) par :

$$\psi(\mathcal{J}) = e^{-\mathcal{J}} \int_0^{+\infty} e^{\lambda} \psi(\lambda) dE_\lambda.$$

On pose alors $\theta(\lambda) = e^{\lambda}\psi(\lambda) \in \mathcal{C}_0^\infty$ et l'on a

$$\psi(\mathcal{J}) = e^{-\mathcal{J}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{i\omega\lambda} dE_\lambda \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\omega\mathcal{J} - \mathcal{J})} \hat{\theta}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le noyau de l'opérateur $\psi(\lambda)$ et d'en déduire, par exemple, la propriété de moments nuls.

Le noyau de cet opérateur est alors donné par :

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) h_s(x) d\omega$$

où $s = 1 - i\omega$ et

$$h_s(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda s)} \cos(\lambda x_3) e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda s)} d\lambda.$$

Pour voir cette propriété de moments nuls, nous observons qu'il s'agit de la transformée de Fourier de la fonction paire

$$\lambda \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sinh(\lambda s)} \cos(\lambda x_3) e^{-\frac{\lambda}{4}(x_1^2+x_2^2)\coth(\lambda s)} \hat{\theta}(\omega) d\omega.$$

Calculons la transformée de Fourier en (x_1, x_2). On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\lambda s)} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda \coth(\lambda s)}} \hat{\theta}(\omega) d\omega$$

avec $s = 1 - i\omega$.

Il faut vérifier que toutes les dérivées par rapport à ξ et λ sont nulles en $\xi = \lambda = 0$. La vérification ne pose pas de difficulté car ces dérivations font apparaître des polynômes en $s = 1 - i\omega$ qui sont annulés après intégration en ω.

Nous obtenons ainsi le résultat recherché.

$\blacksquare$

Annexe B

Espace de Besov $\dot{B}_1^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et BMO

Nous revenons avec la proposition qui suit à la remarque 6.2 p. 136 et à l'inclusion existante entre ces espaces, non plus sur l'anneau $\mathbb{Z}_2$, mais dans le cas euclidien.

Proposition B.1 *Soit $n \geq 1$ et soit $f \in \dot{B}_1^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Remarquons que l'on a bien la même loi d'échelle : la transformation $f \to f(\lambda x)$, $\lambda > 0$ est isométrique pour ces deux espaces.

Supposons tout d'abord, pour la preuve de cette proposition, que l'on a

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j$$

avec $\|g_j\|_1 \leq C\, 2^{-jn}$ et $\|\nabla g_j\|_\infty \leq C\, 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$.

On considère maintenant un cube Q de côté d_Q vérifiant $2^{-m} \leq d_Q < 2^{-m+1}$. On peut alors écrire $f = u + v$ où

$$u = \sum_{-\infty}^{m} g_j \quad \text{et} \quad v = \sum_{m+1}^{\infty} g_j.$$

Nous avons les estimations $\|v\|_1 \leq C\, 2^{-mn}$ et $\|\nabla u\|_\infty \leq C\, 2^m$.

Finalement

$$\int_Q |u(x) - u_Q| dx \leq |Q| d_Q \|\nabla u\|_\infty \leq C|Q|. \tag{B.1}$$

D'autre part, on a $\int_Q |v(x)| dx \leq \|v\|_1 \leq C|Q|$ et alors f appartient à BMO.

Pour passer au cas général, il suffit d'appliquer les inégalités de Bernstein données par la proposition 2.3.5 p. 64 à la décomposition de Littlewood-Paley de f.

■

Observons que cette démonstration est très similaire à celle donnée dans le cas p-adique. Mais, puisqu'on ne dispose plus de l'égalité (6.24), il est nécessaire une étape supplémentaire fournie par l'estimation (B.1).

Annexe C

Inégalités de Sobolev précisées et fonctions maximales

Il existe une autre méthode pour démontrer les inégalités de Sobolev précisées lorsque l'indice p est strictement plus grand que 1. Nous allons voir que cette approche ne repose pas sur la manipulation des blocs dyadiques. Le résultat est le suivant :

Théorème C.1 *Pour tout $1 < p < q < \infty$ et pour toute fonction f telle que $f \in \dot{W}^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$ et telle que $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ on a :*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{s_1,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{C.1}$$

où $\theta = \frac{p}{q}$, $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ avec $\beta > 0$ et $-\beta < s < s_1$.

On réécrit (C.1) de la façon suivante :

$$\|(-\Delta)^{\frac{s-s_1}{2}} f\|_q \leq C\|f\|_p^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s_1,\infty}}^{1-\theta} \tag{C.2}$$

Pour la démonstration de cette inégalité nous nous plaçons dans le cadre de $\mathbb{R}^n$ et nous allons suivre Pierre Gilles Lemarié-Rieusset en utilisant la définition de la puissance fractionnaire du Laplacien donnée dans (2.35) :

$$(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} H_t f(x)dt \tag{C.3}$$

où nous avons noté $\alpha = s_1 - s > 0$.

Nous décomposons l'expression (C.3) en introduisant un paramètre T qui sera fixé par la suite :

$$(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^{T} t^{\frac{\alpha}{2}-1} H_t f(x)dt + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_T^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} H_t f(x)dt \tag{C.4}$$

A présent nous utilisons les majorations suivantes :

(a) $|H_t f(x)| \leq C\mathcal{M}_B f(x)$ (lemme 3.4.1)

(b) $|H_t f(x)| \leq Ct^{\frac{-\beta-s}{2}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}$ (définition thermique des espaces de Besov)

Nous appliquons ces estimations à la partie de droite de (C.4) pour obtenir

$$|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x)| \leq \frac{C_1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} T^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{M}_B f(x) + \frac{C_2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} T^{\frac{\alpha-\beta-s}{2}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}. \tag{C.5}$$

On fixe à présent

$$T = \left(\frac{\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}}{\mathcal{M}_B f(x)}\right)^{\frac{2}{\beta+s_1}},$$

il vient alors :

$$|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x)| \leq \frac{C_1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{\alpha}{\beta+s_1}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{\alpha}{\beta+s_1}} + \frac{C_2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{\alpha}{\beta+s_1}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{\alpha}{\beta+s_1}}.$$

En remarquant que $\frac{\alpha}{\beta+s_1} = 1-\theta$, nous pouvons écrire :

$$|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x)| \leq \frac{C_1+C_2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \mathcal{M}_B f(x)^{\theta} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}. \tag{C.6}$$

A partir de cette estimation ponctuelle nous obtenons (rappelons que $\theta = p/q$) :

$$\|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f\|_q \leq \frac{C_1+C_2}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \|\mathcal{M}_B f\|_p^{\theta} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}. \tag{C.7}$$

Pour conclure, on utilise le fait que la fonction maximale $\mathcal{M}_B$ est bornée de L^p dans L^p pour $p > 1$. Nous obtenons ainsi l'inégalité (C.2).

■

Remarque : Cette démonstration fonctionne encore si l'on considère des poids de Muckenhoupt et se généralise sans problème aux groupes de Lie stratifiés.

Bibliographie

[1] Robert Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1978.

[2] Georgios Alexopoulos, *Sub-Laplacians with drift on Lie groups of polynomial volume growth.* Memoirs of the AMS. Number 739, Volume 155, 2002.

[3] Serge Alinhac & Patrick Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions/Editions du CNRS, 1991.

[4] Luigi Ambrosio, Nicola Fusci & Diego Pallara, *Functions of bounded variations and free discontinuity problems.* Oxford science publications, 2000.

[5] Yvette Amice, *Les nombre p-adiques.* PUF, 1975.

[6] Hajer Bahouri, Patrick Gérard & Chao-Jiang Xu, *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg.* Journal d'Analyse Mathématique. Vol 82, (2000), p. 93-118.

[7] J.L. Basdevant & J. Dalibard, *Mécanique Quantique.* Editions de l'Ecole Polytechnique, 1999.

[8] André Bellaïche & Jean-Jacques Risler Editeurs, *Sub-Riemannian Geometry.* Progress in mathematics, 144, Birkhäuser, 1996.

[9] J. Bergh & J. Löfström, *Interpolation Spaces.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 223. Springer Verlag, 1976.

[10] Gérard Bourdaud, *Réalisations des espaces de Besov homogènes.* Revista Matemática Iberoamericana (1987) p. 41-54.

[11] Gérard Bourdaud, *Ondelettes et espaces de Besov.* Revista Matemática Iberoamericana, Vol 11, N°3, (1995).

[12] Marcin Bownik, *Anisotropic Hardy spaces and wavelets.* Memoirs of the AMS. Number 781, Volume 164, 2003.

[13] Haïm Brezis, *Analyse Fonctionnelle.* Dunod, Paris, 1999.

[14] S. Buckley & P. Koskela, *Sobolev-Poincaré implies John.* Mathematical Research Letters 2, (1995) p. 577-593.

[15] Nicolas Burq & Patrick Gérard, *Contrôle optimal des équations aux dérivées partielles.* Editions de l'Ecole Polytechnique, 2003.

[16] Luca Capogna, Donatella Danielli & Nicola Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality.* Comm. Ann. Geometry. Vol 2, 2 (1994) p. 203-215.

[17] Luca Capogna & P. Tang, *Uniform domains and quasiconformal mappings on the Heisenberg group.* Mann. Math. 86 (1995) p. 267-281.

[18] Jean-Yves Chemin & Chao-Jian Xu, *Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques.* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, T. 30, (1997), p. 719-751.

[19] Albert Cohen, Ronald De Vore, Pencho Petrushev & Hong XU, *Non linear approximation and the spaces the space $BV(\mathbb{R}^2)$.* American Journal of Mathematics 121 (1999), p. 587-628.

[20] Albert Cohen, Wolfgang Dahmen, Ingrid Daubechies & Ronald De Vore, *Harmonic Analysis of the space BV.* Rev. Mat. Iberoamericana 19, n°1, (2003), p. 235-263.

[21] R. Coifman & Guido Weiss, *Analyse Harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.* Lecture Notes in Mathematics. Vol. 242. Springer

[22] Thierry Coulhon, *Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie.* Journal of Approximation Theory, 65, (1991), p. 176-199.

[23] Jacek Cygan, *Subadditivity of homogeneous normes on certain nilpotent Lie groups.* Proc. Am. Math. Soc. 83, (1981),p. 69-70.

[24] Guy David & J. Lin Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. 120, (1984), p. 371-397.

[25] Guy David & Stephen Semmes, *Quasi-minimal surfaces of codimension 1 and John domains.* Pacific Journal of Mathematics. Vol. 183, No. 2, (1998), p. 213-277.

[26] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets.* Cambrigde tracts in Mathematics, 85. Cambridge University Press 2002.

[27] H. Federer, *Geometric measure.*Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1996.

[28] T. M. Flett, *Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces.* Proc. London Math. Soc. (3), 22 (1971), p. 385-451.

[29] Gerald Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Ark. Mat. 13 (1975), p. 161-208.

[30] Gerald Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space.* Annals of Mathematics Studies, 122, Princeton University Press, 1989.

[31] Gerald Folland & Elias M. Stein, *Hardy Spaces on homogeneous groups.* Mathematical Notes, 28, Princeton University Press, 1982.

[32] Bruno Franchi, Raul Serapioni & Francesco Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields.* Houston Journal of Mathematics, Vol. 22 , 4, (1996).

[33] Bruno Franchi, Raul Serapioni & Francesco Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group.* Math. Ann. 321, (2001), p. 479-531.

[34] Michael Frazier, Björn Jawerth & Guido Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the study of function spaces.* CBMS, 79, 1991.

[35] Giulia Furioli, Camilo Melzi & Alessandro Veneruso, *Strichartz inequalities for the wave equation with the full Laplacien on the Heisenberg group.* Preprint 2005.

[36] Giulia FURIOLI, Camilo MELZI & Alessandro VENERUSO, *Littlewood-Paley decomposition and Besov spaces on Lie groups of polynomial growth.* Preprint 2005.

[37] J. GARCÍA-CUERVA & J.L. RUBIO DE FRANCIA, *Weighted norm inequalities and related topics.* Mathematics studies 116, North Holland, 1985.

[38] Nicola GAROFALO & Duy-Minh NHIEU, *Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces.* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLIX, (1996), p. 1081-1144.

[39] G. I. GAUDRY, Adelaide S. MEDA, Povo, and R. PINI, Verona, *A heat Semigroup version of Berstein's theorem on Lie groups.* Mh. Math. 110, (1990), p. 101-114.

[40] Patrick GÉRARD, Yves MEYER & François ORU, *Inégalités de Sobolev Précisées.* Equations aux Dérivées Partielles, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, exposé n°IV (1996-1997).

[41] Loukas GRAFAKOS, *Classical and Modern Fourier Analysis.* Prentice Hall, 2004.

[42] A. GRESHNOV, *Uniform domains and NTA-domains in Carnot groups.* Siberian Math. J., Vol 12, No 5, (2001), p. 851-864.

[43] Waldemar HEBISCH & Adam SIKORA, *A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group.* Studia Mathematica, T. XCVI (1990).

[44] Sigurdur HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Graduate Studies in Mathematics,Vol 34, 2001.

[45] Lars HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Math., 119 (1967), p. 147-171.

[46] A. HULANICKI, *A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups.* Studia Mathematica T. LXXVIII, (1984).

[47] R. HUNT, *On $L^{p,q}$ spaces.* L'enseignement mathématique. 12, (1966).

[48] R. HUNT, *Semi-groups of measures on Lie groups.* Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), p. 264-293.

[49] Jean-Pierre KAHANE & Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET, *Séries de Fourier et ondelettes.* Cassini, 1998.

[50] Neal KOBLITZ, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-functions.* GTM 58. Springer Verlag, 1977.

[51] Michel LEDOUX, *On improved Sobolev embedding theorems.*

[52] Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET, *Base d'Ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés.* Bull. Soc. math. France, 117, (1989), p. 211-232.

[53] Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET, *Recent developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC, Research notes in Mathematics 431, 2002.

[54] Gian Paolo LEONARDI & Simon MASNOU, *On the isoperimetric problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$.* Preprint 2002.

[55] Pierre LÉVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale.* Dunod, Paris, 2003.

[56] Camillo MELZI, *Large time estimates for non-symmetric heat kernel on the affine group.* Annales Mathématiques Blaise Pascal, tome 9, n°1, (2002). p. 63-78.

[57] Yves MEYER, *Ondelettes et Opérateurs*. Hermann, 1990.

[58] Yves MEYER, *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations : the fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures*. CBMS, 2002.

[59] Richard MONTGOMERY, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*. American surveys and monographs, Vol. 91. AMS 2002.

[60] Roberto MONTI & Francesco SERRA CASSANO, *Surface measure in Carnot-Carathéodory spaces*. Calc. Var. 13, (2001), p. 339-376.

[61] Sami MUSTAPHA, *Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires*. Annales de l'Institut Fourier, tome 48, n°4, (1998) p. 957-966 .

[62] Louis NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13, (1959),p. 116-162.

[63] François ORU, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non-linéaire*. Thèse de Troisième Cycle. ENS Cachan, 1998.

[64] S. OSHER & L. RUDIN, *Total variation based image restoration with free local constraints*, in Proceedings of IEEE international conference on image processing, Austin, TX, 1(993), p. 31-35.

[65] Amnon PAZY, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, 1983.

[66] Lizhong PENG, *Wavelets on the Heisenberg group*. Geometry and nonlinear partial differential equations. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. Volume 29, (2002)

[67] Huy QUI BUI, *Characterizations of weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces via temperatures*. Journal of Functional Analysis, 55, (1984), p. 39-62.

[68] Walter RUDIN, Fourier Analysis on groups. Wiley Classics Library, 1990.

[69] Koichi SAKA, *Besov Spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group*. Tôhoku. Math. Journ. Vol. 31, (1979), p. 383-437.

[70] Laurent SALOFF-COSTE, *Analyse réelle sur les groupes à croissance polynômiale*. C.R.A.S. t. 309, Série I, (1989), p. 149-151.

[71] Adam SIKORA & Jacek ZIENKIEWICZ, *A note on the heat kernel on the Heisenberg group*. Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 65, (2002), p. 115-120.

[72] Leszek SKRZYPCZAK, *On Besov spaces and absolute convergence of the Fourier transform on Heisenberg groups*. Comment. Math. Univ.Carolinae 39,4 (1998), p. 755-763.

[73] Elias M. STEIN, *Topics in Harmonic analysis*. Annals of mathematics studies, 63. Princeton University Press, 1970.

[74] Elias M. STEIN, *Singular Integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.

[75] Elias M. STEIN, *Harmonic Analysis*. Princeton University Press, 1993.

[76] Robert STRICHARTZ, *L^p Harmonic Analysis and Radon Transforms on the Heisenberg Group*. Journal of functional Analysis 96, (1991), p. 350-406.

[77] Robert STRICHARTZ, *Self-similarity on Nilpotent Lie groups*. Contemporary Mathematics Volume 140, (1992), p. 123-157.

[78] Sundaram THANGAVELU, *Harmonic Analysis on the Heisenberg group*, Progress in Mathematics Vol 159, Birkhäuser, 1998.

[79] Hans TRIEBEL, *Characterizations of Besov-Hardy-Sobolev spaces via harmonic functions, temperatures and related means.* Journal Approx. Th. 35, (1982), p. 275-297.

[80] Hans TRIEBEL, *Theory of functions spaces II.* Birkhäuser, 1992.

[81] N. Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE & T. COULHON, *Analysis and geometry on groups.* Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 100. 1992.

[82] Cédric VILLANI, *Topics in Optimal Transportation.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58. AMS. 2003.

[83] V. S. VLADIMIROV, I. V. VOLOVICH & E. I. ZELENOV, *P-adic Analysis and mathematical physics.* World Scientific, 1994.

[84] K. YOSIDA *Functional Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 123, Springer, 6 ème édition, 1980.

[85] William P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, GTM 120. Springer Verlag 1989.

[86] Antoni ZYGMUND, *Trigonometric series*, Third Edition. Cambridge 2002.