

EQUATIONS DANS LE GROUPE DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER

Équations Harmoniques et Equianharmoniques

MARTIN GONZALEZ

RÉSUMÉ. Le texte qui suit consiste en un mémoire de maîtrise, dirigé par Pierre LOCHAK à l'Institut Mathématique de Jussieu, et reprends les constructions classiques du groupe profini de Grothendieck-Teichmüller présentes dans le programme Drinfel'd/Grothendieck et les articule dans l'étude de deux équations qui apparaissent naturellement lors de l'étude de certains 1-cocycles dans l'image de la paramétrisation $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{GT}$. De cette manière, et en suivant l'article de Nakamura-Tsunogai [NT03], ceci nous donnera des informations géométriques supplémentaires sur $G_{\mathbb{Q}}$ et on pourra présenter ces 1-cocycles directement en fonction du paramètre f du complété profini \hat{F}_2 tout en proposant une technique calculatoire adaptée à ce besoin. L'objectif est d'exprimer des informations supplémentaire sur l'image de cette paramétrisation dans l'espoir de pouvoir établir une éventuelle bijection $G_{\mathbb{Q}} \simeq \widehat{GT}$, conjecture encore ouverte à présent.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Rappels préliminaires	3
2.1. Quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires	3
2.2. Catégories tensorielles tressées	7
2.2.1. La catégorie tensorielle tressée pure des arbres trivalents	10
2.3. Complétions et complétions profinies de groupes	11
2.4. Groupoïdes fondamentaux	12
2.5. Surfaces de Riemann et espaces de modules de courbes	13
3. Groupoïdes fondamentaux des espaces de modules en genre 0 et catégories tensorielles tressées	14
3.1. Espaces et groupes de Teichmüller	15
3.1.1. Marquages des surfaces de Riemann	16
3.1.2. Groupe de Teichmüller modulaire $\Gamma_{g,n}$	16
3.2. Dégénérescence de surfaces de Riemann et voisinages à l'infini de $\mathcal{M}_{0,n}$	17
3.2.1. Etude des espaces de modules de courbes en genre zéro	17

Date: Juin 2012

3.3. Groupes de tresses et groupes modulaires	18
3.3.1. Groupoïdes profinis de Teichmüller	18
3.3.2. Relations entre le groupe de tresses et la catégorie des arbres	21
3.3.3. Groupoïde de Teichmüller et catégories tensorielles tressées	21
3.4. Les groupes de Grothendieck-Teichmüller k -pro-unipotent et profini	22
3.4.1. Version k -pro-unipotente $\widehat{\text{GT}}(K)$	24
3.4.2. La version profinie du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\text{GT}}$	25
3.5. Actions de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\hat{T}(0, n)$	27
3.5.1. L'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $X(\mathbb{Q})$	27
3.5.2. Action de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\hat{T}(0, n)$	27
4. Une interprétation cohomologique du groupe de Grothendieck-Teichmüller.	28
4.1. Cohomologie non-abélienne : $H^1(\langle \theta \rangle, \hat{F}_2)$ et $H^1(\langle w \rangle, \hat{F}_2)$	28
4.2. Introduction des paramètres $g, h: \widehat{\text{GT}} \rightarrow \hat{F}_2'$	29
5. Equations harmonique et équianharmonique dans $\widehat{\text{GT}}$	30
5.1. Introduction et énoncés	30
5.2. Configuration de base	33
5.3. Recouvrement de Legendre-Jacobi et démonstrations	35
5.3.1. Démonstration de (GF_0)	36
5.3.2. Démonstration de (GF_1)	38
5.3.3. Démonstration de (HF_0)	40
6. Conclusions	43
Bibliographie	44

1. INTRODUCTION

Il est ici question de comprendre quelque chose à propos de la structure du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ où $\overline{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique de \mathbb{Q} . Pour cela on va suivre le programme de A. GROTHENDIECK et de V. DRINFEL'D.

En 1991 V. DRINFEL'D introduit le groupe^{1.1}, noté $\widehat{\text{GT}}$, des déformations d'une quasi-algèbre de Hopf qui modifie l'associativité et la commutativité sans modifier le reste de ses relations. Le sens sous-jacent de cette considération est d'utiliser les liens entre les catégories tensorielles tressées, qui sont les catégories de représentations de telles quasi-algèbres, avec l'espace des modules des courbes en genre 0 pour avoir des informations de caractère géométrique et combinatoire sur le groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Tout d'abord, en partant des relations entre les quasi-algèbres de Hopf et le groupe de tresses d'Artin, noté \mathcal{B}_n , on aura que $\widehat{\text{GT}}$ agit sur le complété profini de \mathcal{B}_n , noté $\widehat{\mathcal{B}}_n$, en étant son groupe d'automorphismes. En particulier, l'action de $\widehat{\text{GT}}$ passe au

^{1.1.} Il s'agit ici plus spécifiquement du complété profini de ce groupe, comme on le verra dans la suite.

quotient en une action sur $\widehat{\mathcal{B}}_3$ modulo son centre qui est isomorphe à $\widehat{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{Z})$, le complété profini du groupe modulaire. On construira alors les tours de Teichmüller, en particulier celle en genre 0, et on analysera l'action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur la tour de façon convenable pour remarquer que la structure de ses éléments est remarquablement similaire à celle des catégories tensorielles tressées. Comme on connaît l'action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur ces catégories, on conclura que $\widehat{\mathrm{GT}}$ est le groupe complet d'automorphismes de la tour de Teichmüller. Par un théorème dû à Belyi, on verra alors que l'homomorphisme $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$ est injectif. Ensuite, on souhaite avoir des informations sur l'image de $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$. A partir des travaux de Y. Ihara dans [Iha94] puis de Pierre Lochak et Leila Schneps dans [LS97], on pourra déterminer cette injection en considérant de manière géométrique les éléments de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On se limitera dans ce mémoire aux différents cas en genre 0. Finalement, on ajoutera aux équations venant de [LS97] quatre nouvelles équations satisfaites par l'image de $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$ et on développera ici des techniques de calculs explicites pour démontrer ces équations. Ces techniques auront à elles seules grand intérêt dans cette théorie.

2. RAPPELS PRÉLIMINAIRES

2.1. Quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires. On introduit de manière rapide un dictionnaire des notions algébriques pour arriver à la notion de quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire. Soit A un anneau commutatif, qu'on suppose toujours unitaire. On a ainsi les définitions suivantes.

Définition 2.1. Une ***A**-Algèbre* est un quadruplet $(X, +_X, *, \times_X)$ où

- i. $(X, +_X, *)$ est un A -module ;
- ii. $\times_X : X \times X \rightarrow X$ est une application bilinéaire, appelée **produit**.

Une ***A**-Algèbre associative* est un quadruplet $(X, +_X, *, \times_X)$ où

- i. $(X, +_X, *)$ est un A -module ;
- ii. $\forall a \in A, \forall x, y \in X$ on a :

$$a*(x \times_X y) = x \times_X (a*y) = (a*x) \times_X y,$$

- iii. $(X, +_X, \times_X)$ un pseudo-anneau.

Une ***A**-Algèbre associative unitaire* est une A -Algèbre associative où $(X, +_X, \times_X)$ est en plus un anneau (unitaire).

Passons maintenant à la définition de produit tensoriel qui nous donne un autre point de vue^{2.1} sur la définition de A -algèbre associative.

Définition 2.2. Soient X et Y deux A -modules. Il existe une application A -bilinéaire qu'on note :

$$\otimes : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$$

2.1. Qui est, bien sûr, équivalent à celui proposé auparavant.

et qu'on appelle **produit tensoriel de X et Y** , telle que, pour toute application A -bilineaire $f: X \times Y \rightarrow P$, il existe une unique application A -linéaire $\varphi: X \otimes Y \rightarrow P$ telle que $f = \varphi \circ \otimes$ i.e. telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\otimes} & X \otimes Y \\ & \searrow f & \swarrow \varphi \\ & & P \end{array}$$

Une **A -Algèbre associative** est un triplet (X, μ, η) où :

- i. X est un A -module ;
- ii. (**Multiplication**) $\mu: X \otimes X \rightarrow X$ est une application linéaire telle que :

$$\mu(1 \otimes \mu) = \mu(\mu \otimes 1)$$

i.e. telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes \mu} & X \otimes X \\ \mu \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ X \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

- iii. (**Unité**) $\eta: A \rightarrow X$ est une application linéaire telle que :

$$\mu(1 \otimes \eta) = \mu(\eta \otimes 1) = 1$$

i.e. telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & A \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & A & & \end{array}$$

On note dans la suite xy l'image de $x \otimes y$ par μ et 1 l'image de 1 par η . Soit K un corps. On a les définitions suivantes.

Définition 2.3. On appelle **Coalgèbre** sur K un triplet (C, Δ, ε) où :

- i. C est un K -espace vectoriel ;
- ii. $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon: C \rightarrow K$ sont des applications linéaires, appelées respectivement **Coproduit** et **Counité**, telles que :

$$(\text{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \text{id}_C) \circ \Delta \quad (\text{Coassociativité}) \quad (2.1)$$

$$(\text{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \text{id}_C) \circ \Delta = \text{id}_C \quad (\text{Counitarité}) \quad (2.2)$$

On appelle **Bialgèbre** la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ où :

- i. (C, μ, η) est une K -algèbre ;
- ii. (C, Δ, ϵ) est une coalgèbre ;
- iii. Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres ;
- iv. μ et η sont des morphismes de coalgèbres.

Remarque 2.4. On remarque que les conditions iii. et iv. ci-dessus sont équivalentes.

Définition 2.5. Soit K un corps de caractéristique nulle. On appelle **Quasi-bialgèbre** la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, \Phi)$ où :

- i. (C, μ, η) est une K -algèbre associative unitaire ;
- ii. $\Delta: C \longrightarrow C \otimes C$ et $\epsilon: C \longrightarrow K$ sont des morphismes d'algèbres et $\Phi \in C \otimes C \otimes C$ est un élément inversible tels que pour tout $a \in C$ on ait :

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1} \quad (2.3)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1) \quad (2.4)$$

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta \quad (2.5)$$

$$(\text{id} \otimes \epsilon \otimes \text{id})(\Phi) = 1. \quad (2.6)$$

Remarque 2.6. Notons que dans cette définition, le coproduit n'est plus coassociatif.

Soit K un corps de caractéristique nulle. On a les définitions suivantes.

Définition 2.7. Une **Algèbre de Hopf** est la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ où :

- i. $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est une bialgèbre ;
- ii. $S: C \longrightarrow C$ est une application K -linéaire, appelée **Antipode**, qui vérifie :

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta. \quad (2.7)$$

Une **Quasi-algèbre de Hopf** est la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, \Phi, S)$ où :

- i. $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, \Phi)$ est une quasi-bialgèbre ;
- ii. Pour $\Phi = 1$, S existe et est bijective. On appelle ce cas le **cas de Hopf**.

Une **Algèbre de Hopf quasi-triangulaire** est la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, R)$ où :

- i. $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ est une algèbre de Hopf ;
- ii. $R \in C \otimes C$ est un élément inversible, appelé **R-Matrice**, qui vérifie :

$$(\sigma \circ \Delta)(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad (2.8)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = \Phi^{312}R^{13}(\Phi^{132})^{-1}R^{23}\Phi \quad (2.9)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1}R^{13}\Phi^{213}R^{12}\Phi^{-1} \quad (2.10)$$

où l'on note :

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} \sigma: C \otimes C & \longrightarrow & C \otimes C \\ x \otimes y & \longmapsto & y \otimes x \end{array} \text{ la commutativité ;}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow R &= \sum_i a_i \otimes b_i, R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i \text{ et } R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i ; \\ \rightarrow \Phi &= \sum_j x_j \otimes y_j \otimes z_j, \Phi^{312} = \sum_j y_j \otimes z_j \otimes x_j \text{ et on procède de même pour les autres} \\ &\text{éléments.} \end{aligned}$$

Une **Quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire** est la donnée de $(C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ où :

- i. $(C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ est une quasi-algèbre de Hopf ;
- ii. $(C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$ est une algèbre de Hopf quasi-triangulaire.

On dit qu'elle est **triangulaire** si on impose en plus $R^{21}R^{12} = 1$.

Remarque 2.8. On se permettra de ne pas préciser l'antipode S dans la pratique. Noter que R est une solution de l'équation de Yang-Baxter par :

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}.$$

De cette manière, chaque module de C peut être utilisé pour déterminer des quasi-invariants des tresses et des noeuds.

Soit C une quasi-bialgèbre, on construit une autre quasi-bialgèbre de la manière suivante. On admet la proposition suivante.

Proposition 2.9. Soit $F \in C \otimes C$ un élément inversible tel que :

$$(\varepsilon \otimes \text{id})(F) = (\text{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1.$$

Ainsi, si on pose :

$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{\Delta}(a) &= F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1} ; \\ \rightarrow \tilde{\Phi} &= F^{23} \cdot (\text{id} \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1} ; \\ \rightarrow \tilde{R} &= F \cdot R \cdot F^{-1}. \end{aligned}$$

Alors on obtient une nouvelle quasi-bialgèbre de Hopf $(C, \mu, \eta, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$ que l'on appelle **twisting via F** , ou encore **twist**.

2.2. Catégories tensorielles tressées. On introduit maintenant les bases en Théorie des Catégories qui nous serviront tout le long du mémoire.

Définition 2.10. Une **catégorie tensorielle** (ou **monoïdale**) est une catégorie \mathcal{C} munie :

$$\rightarrow D' \text{un produit tensoriel au sens catégoriel}^{2.2} ;$$

^{2.2.} C'est un produit tensoriel $\otimes: X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ comme celui défini ci-dessus mais où $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

- D'une **contrainte d'associativité**, notée $a_{U,V,W}$ pour chaque triplet d'objets U, V, W de \mathcal{C} , qui est une collection d'isomorphismes :

$$a_{U,V,W}: (U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

qui font chacun commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes V) \otimes X & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) \\ (f \otimes g) \otimes h \downarrow & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (U' \otimes V') \otimes W' & \xrightarrow{a_{U',V',W'}} & U' \otimes (V' \otimes W') \end{array}$$

pour tous morphismes f, g, h de \mathcal{C} où $D(f) = U, D(g) = V, D(h) = W$ et $A(f) = U', A(g) = V', A(h) = W'$ ^{2.3}.

- Des **contraintes à gauche et à droite par rapport à un objet unité I** , notées ℓ_V et r_V pour chaque objet V de \mathcal{C} , qui sont deux collections d'isomorphismes :

$$\ell_V: I \otimes V \longrightarrow V \text{ et } r_V: V \otimes I \longrightarrow V$$

qui font chacun commuter les diagramme suivants :

$$\begin{array}{ccc} I \otimes V & \xrightarrow{\ell_V} & V \\ \text{id}_I \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ I \otimes V' & \xrightarrow{\ell_{V'}} & V' \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} V \otimes I & \xrightarrow{r_V} & V \\ f \otimes \text{id}_I \downarrow & & \downarrow f \\ V' \otimes I & \xrightarrow{r_{V'}} & V' \end{array}$$

pour tout morphisme $f: V \longrightarrow V'$ de \mathcal{C} .

- D'une **contrainte de commutativité**, notée $c_{U,V}$ pour tout $U, V \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, qui est une collection d'isomorphismes :

$$c_{U,V}: U \otimes V \longrightarrow V \otimes U$$

qui font chacun commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \\ f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\ V' \otimes W' & \xrightarrow{c_{V',W'}} & W' \otimes V' \end{array}$$

^{2.3} On rappelle que, pour $f: U \longrightarrow U'$ flèche quelconque d'une catégorie, on définit $D(f) := U$ et $A(f) := U'$.

pour tous morphismes f, g de \mathcal{C} où $D(f) = V$, $D(g) = W$ et $A(f) = V'$, $A(g) = W'$.

→ Satisfaisant, pour tout $U, V, W, X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, aux **conditions de cohérence de MacLane** c'est-à-dire satisfaisant la commutativité du pentagone ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & \\
 a_{U \otimes V, W, X} \swarrow & & \searrow a_{U, V, W} \otimes \text{id}_X \\
 (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \\
 a_{U, V, W \otimes X} \downarrow & & \downarrow a_{U, V \otimes W, X} \\
 U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) & \xleftarrow{\text{id}_U \otimes a_{V, W, X}} & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X
 \end{array}$$

et du triangle ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & a_{V, I, W} & \\
 (V \otimes I) \otimes X & \xrightarrow{\quad} & V \otimes (I \otimes W) \\
 r_W \otimes \text{id}_W \searrow & & \swarrow \text{id}_V \otimes \ell_W \\
 & V \otimes W &
 \end{array}$$

Définition 2.11. On dit que \mathcal{C} est une **catégorie tensorielle tressée** \mathcal{C} si elle est une catégorie tensorielle satisfaisant, pour tout $U, V, W, X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, aux **conditions des deux hexagones de MacLane** c'est-à-dire satisfaisant la commutativité des deux hexagones ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & (U \otimes V) \otimes W & \\
 c_{U, V} \otimes \text{id}_W \swarrow & & \searrow a_{U, V, W} \\
 (V \otimes U) \otimes W & & U \otimes (V \otimes W) \\
 a_{V, U, W} \downarrow & & \downarrow c_{U, V \otimes W} \\
 V \otimes (U \otimes W) & & (V \otimes W) \otimes U \\
 \text{id}_V \otimes c_{U, W} \searrow & & \swarrow a_{V, W, U} \\
 & V \otimes (W \otimes U) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& U \otimes (V \otimes W) & \\
\text{id}_U \otimes c_{V,W} \swarrow & & \searrow a_{U,V,W}^{-1} \\
U \otimes (W \otimes V) & & (U \otimes V) \otimes W \\
a_{U,W,V}^{-1} \downarrow & & \downarrow c_{U \otimes V, W} \\
(U \otimes V) \otimes V & & W \otimes (U \otimes V) \\
c_{U,W} \otimes \text{id}_V \searrow & & \swarrow a_{W,U,V}^{-1} \\
& (W \otimes U) \otimes V &
\end{array}$$

Remarque 2.12. On remarque quelques phénomènes intéressants.

- La triangularité et la quasi-triangularité sont des invariants de twisting. De même, le fait, pour une quasi-bialgèbre, d'être une quasi-algèbre de Hopf, est un invariant de twisting.
- Une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire avec $\Phi = 1$ devient une algèbre de Hopf quasi-triangulaire.
- La catégorie des représentations d'une algèbre de Hopf quasi-triangulaire est une catégorie monoïdale mais comme en général $R^{21} \neq R^{-1}$, alors l'isomorphisme de commutativité n'est pas en général une involution.
- La catégorie des A -modules représentant une A -algèbre de Hopf est une catégorie monoïdale.

Avec ces considérations on a la proposition suivante, dont les détails manquants pour une démonstration complète seront admis.

Proposition 2.13. *Soit C une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire. Alors la catégorie des représentations de C , en termes de A -modules, est une catégorie tensorielle de la manière suivante. Soit V, V_1, V_2, V_3 des représentations de A , alors :*

1. $V_1 \otimes V_2$ est défini par la composition :

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \longrightarrow \text{End}_k(V_1 \otimes V_2);$$

2. Il existe deux isomorphismes :

$$c: V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$$

et

$$a: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

dits de commutativité et associativité ;

3. Il existe une représentation d'identité notée k , et des isomorphismes de $V \otimes k$ et $k \otimes V$ dans V ;

4. Les relations (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) impliquent la commutativité du pentagone, du triangle et des deux hexagones.

Remarque 2.14. L'isomorphisme a est l'opérateur en $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ qui correspond à Φ et c est celui qui correspond à la composée de l'opérateur en $V_1 \otimes V_2$ qui correspond à R avec σ .

Définition 2.15. Soit une catégorie tensorielle tressée. On dit qu'elle est *pure*^{2.4} si elle vérifie les axiomes suivants :

1. les contraintes d'unité sont des identités ;
2. il existe un ensemble dénombrable, V_1, V_2, \dots , d'objets de \mathcal{C} tel que tout objet de \mathcal{C} soit un produit tensoriel d'un nombre fini, pas nécessairement distinct, parmi les V_i de façon unique ;
3. les seuls morphismes de \mathcal{C} sont les composés de produit tensoriels formés des morphismes identité et les contraintes de commutativité et d'associativité, ainsi que leurs inverses ;
4. les seules relations entre les morphismes de \mathcal{C} proviennent du pentagone, du triangle, des deux hexagones et des carrés exprimant les diverses fonctorialités.

2.2.1. La catégorie tensorielle tressée pure des arbres trivalents. On se servira d'une catégorie particulière, celle des arbres trivalents pour énoncer le théorème principal de cette partie.

Exemple 2.16. L'exemple suivant fournit une structure qui est particulièrement proche de celle des groupoïdes fondamentaux basés en les points base à l'infini des $\mathcal{M}_{0,n}$ qu'on a décrit ci-dessus.

On définit \mathcal{C} par :

- Les objets sont les arbres trivalents munis d'un ordre cyclique et d'une numérotation.
- Le produit tensoriel correspond au recollement de deux arbres par leurs feuilles distinguées.
- Les flèches sont obtenues en prenant compositions et produits tensoriels de l'identité, associativité et commutativité généralisés.

On définit, pour $n \geq 4$, \mathcal{C}_n le sous-groupoïdes de \mathcal{C} dont les objets sont les arbres à n feuilles indexées par $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et dont les morphismes sont ceux de \mathcal{C} entre ces objets. En particulier, pour toute paire d'objets de \mathcal{C}_n ayant même ordre cyclique, il existe un unique morphisme d'associativité transformant l'un en l'autre.

2.3. Complétions, complétions profinies de groupes. Nous rappelons ici quelques définitions et résultats fondamentaux pour les constructions de l'article.

^{2.4.} Le lecteur peut se rapporter au livre [Lan98] pour les définitions sous-jacentes à ces deux définitions.

Définition 2.17. Une **géodésique** désigne le chemin le plus court^{2.5}, ou l'un des plus courts chemins, s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique.

Définition 2.18. Un **grand cercle** est un cercle tracé à la surface d'une sphère qui a le même diamètre que la sphère en question.

Remarque 2.19. De manière équivalente, on peut définir un grand cercle comme un cercle tracé sur la sphère ayant même centre que la sphère ; ou encore, comme l'intersection entre une sphère et un plan passant par le centre de cette sphère ou comme un cercle tracé sur la sphère de longueur maximale. Les grands cercles sont les géodésiques d'une sphère, c'est-à-dire les chemins possédant la plus petite courbure et les arcs de grands cercles sont, par conséquent, les plus courts chemins reliant deux points à la surface d'une sphère.

Définition 2.20. La **compactification** est un procédé général de plongement d'un espace topologique comme sous-espace dense d'un espace compact. Le plongement est appelé le **compactifié**.

Remarque 2.21. L'existence d'un tel plongement implique que l'espace doit être supposé complètement régulier. Pour tout espace métrique M , il est possible de construire un espace métrique complet M' (également noté \tilde{M} ou \hat{M}) qui contient M comme sous-espace dense.

On admet la proposition suivante.

Proposition 2.22. Si M et N sont deux espaces métriques complets quelconques et f est une fonction uniformément continue de M vers N , alors il existe une unique fonction uniformément continue f' de M' vers N qui prolonge f . M' est appelée **complété** de M .

Définition 2.23. Soit G un groupe discret. Le **complété profini** \hat{G} de G est la limite inverse de ses quotients finis :

$$\hat{G} := \varprojlim (G/N) = \{x = (x_N)_{N \in I} \mid \forall i, x_i \in G/N_i\}$$

où I est l'ensemble des sous-groupes distingués d'indice fini de G .

Exemple 2.24. Dans le cas des entiers relatifs, on a :

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}\}.$$

2.4. Groupoïdes fondamentaux. On définit la notion de groupoïde fondamental en généralisant celle de groupe fondamental, ou groupe de Poincaré.

^{2.5.} Dans le cas où il est unique.

Définition 2.25. *Un groupoïde est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes.*

Remarque 2.26. On a de manière naturelle :

- La classe $\text{Hom}(P, P)$, pour P objet d'un groupoïde, est un groupe ;
- Si X est connexe, alors pour tout couple $P, Q \in X$, on a :

$$\pi_1(X, P) \simeq \pi_1(X, Q) ;$$

- Soit $P_0 \in \tilde{P}$ région simplement connexe. Alors :

$$\pi_1(X, \tilde{P}) \simeq \pi_1(X, P_0).$$

Note 2.27. On appelle **point base** d'un groupoïde fondamental d'un espace topologique X , une région simplement connexe de X . Donc un ensemble de points base sera un ensemble de régions simplement connexes et disjointes de X .

Soit X un espace topologique. On a la définition suivante.

Définition 2.28. *Le **groupoïde fondamental** $\pi_1(X, A)$ de X basé en un ensemble A de points base est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins sur X dont les deux extrémités appartiennent à A , i.e. soit à une, soit à deux, des régions simplement connexes appartenant à A ^{2.6}.*

Remarque 2.29. On a ainsi un groupoïde \mathcal{C} :

- Les objets de \mathcal{C} sont les points base appartenants à A ;
- Les flèches de \mathcal{C} sont les classes d'homotopie des chemins entre deux points base ;
- La composition est donnée par la concaténation ;
- Les inverses sont les chemins parcourus en sens inverse et les unités sont les lacets constants ;
- Pour tout point base P , $\pi_1(X, \{P\}) = \text{Hom}(P, P)$ sont des groupes et ils sont tous isomorphes en tant que groupes.

2.5. Surfaces de Riemann et espaces de modules de courbes. Soit X est un espace topologique et E un ensemble. On commence par les définitions suivantes.

Définition 2.30. *On appelle **faisceau de fonction** $X \longrightarrow E$ la donnée, pour chaque ouvert $U \subset X$, d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ de fonctions $U \longrightarrow X$ tel que :*

1. Si $V \subset U$ et $f \in \mathcal{F}(U)$ alors $f|_V \in \mathcal{F}(V)$;

^{2.6.} Notons que la relations d'homotopie fournit une relation d'équivalence qui est bien compatible avec la concaténation des chemins concaténables.

2. Si $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $f_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ vérifie la relation :

$$\forall \alpha, \beta \in A, f_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = f_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$$

et $f: V \rightarrow E$ est définie pour tout $\alpha \in A$ par $f|_{V_\alpha} = f_\alpha$, alors $f \in \mathcal{F}(V)$.
On appelle parfois cette condition **propriété de recollement** du faisceau en question.

Définition 2.31. On appelle **surface de Riemann** la donnée d'un couple (X, \mathcal{O}_X) vérifiant :

1. X est un espace localement compact et réunion dénombrable de compacts ;
2. \mathcal{O}_X est un faisceau de fonctions continues $X \rightarrow \mathbb{C}$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert U_α de X et des homéomorphismes $\tau_\alpha: U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$, pour Ω_α ouvert de \mathbb{C} , tels que :

$$\forall \alpha, \forall V \subset U_\alpha, f \in \mathcal{O}_X(V) \Leftrightarrow f \circ \tau_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\tau_\alpha(V)).$$

Ainsi, une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. Par oubli de structure, une surface de Riemann se présente comme une variété différentielle réelle de dimension 2, d'où le nom surface. Ceci est donc équivalent à considérer qu'une surface de Riemann est un espace topologique séparé X , admettant un atlas modelé sur le plan complexe \mathbb{C} dont les applications de changement de cartes sont des applications biholomorphes. Autrement dit, X admet un recouvrement par des ouverts U_i homéomorphes à des ouverts de \mathbb{C} ; ces cartes dites *holomorphes* sont telles que les fonctions de changement de cartes soient des fonctions holomorphes entre ouverts de \mathbb{C} .

Exemple 2.32. On appelle *sphère de Riemann* l'espace

$$\mathbb{S}^2 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

muni des cartes données par projections stéréographiques :

$$\begin{aligned} \pi_\sigma: \mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v, w) &\longmapsto \frac{u + iv}{1 + w} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_\nu: \mathbb{S}^2 \setminus \{\nu\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v, w) &\longmapsto \frac{u - iv}{1 - w} \end{aligned}$$

où $\sigma = (0, 0, -1)$ et $\nu = (0, 0, 1)$. C'est une surface de Riemann où l'application *changement de cartes* est donnée par :

$$\pi_\nu \circ \pi_\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

et donc est bien holomorphe. En étendant $\pi_\sigma: \mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{C}$ en une application $\tilde{\pi}_\sigma: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ en posant $\tilde{\pi}_\sigma(\sigma) = \infty$, on identifie ainsi la sphère de Riemann à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Définition 2.33. Le **genre** d'une surface de Riemann X connexe, est le nombre maximum de courbes fermées simples sans points communs pouvant être tracées à l'intérieur de cette surface sans la déconnecter. Autrement dit, dans le procédé de détermination du genre, le complément de la réunion de ces courbes reste connexe.

La notion de genre permet de caractériser les surfaces de Riemann de la façon suivante.

Définition 2.34. Soit X une surface de Riemann.

On dit que X est de **type** (g, n) si $X = \hat{X} - P_X$, où \hat{X} est une surface compacte de genre g et P_X est un ensemble de n points marqués.

Deux surfaces de Riemann, $X = \hat{X} - P_X$ et $X' = \hat{X}' - P_{X'}$, **représentent le même point de l'espace de modules** s'il existe un isomorphisme analytique $\alpha: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$ qui envoie P_X sur $P_{X'}$. On imposera $\alpha(x_i) = x'_i$ pour des éléments de P_X et $P_{X'}$.

L'**espace de modules** $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'ensemble des surfaces de Riemann de type (g, n) , à isomorphisme près^{2.7}.

Exemple 2.35. On peut caractériser $\mathcal{M}_{0,n}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence \bar{X} où X est une sphère de Riemann modelée sur \mathbb{S}^2 ^{2.8}.

3. GROUPOÏDES FONDAMENTAUX DES ESPACES DE MODULES EN GENRE 0 ET CATÉGORIES TENSORIELLES TRESSÉES

Le but de cette partie est de caractériser l'action du groupe $\widehat{\text{GT}}$ de Grothendieck-Teichmüller, telle qu'il a été introduit par V. DRINDEL'D dans [Dri91], sur les groupoïdes de Teichmüller profinis. Un deuxième but sera la construction de la tour de Teichmüller en genre 0. On illustrera les concepts présentés à l'aide de la notion d'arbre trivalent et de catégorie des arbres trivalents et du groupe des tresses qu'on a définis auparavant. On va donc successivement :

1. Construire la tour de Teichmüller à la lumière des résultats de P. DELIGNE dans [Del89];
2. Expliciter les relations entre la tour de Teichmüller et les catégories tensorielles tressées » ;
3. Analyser l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et de $\widehat{\text{GT}}$ sur le complété profini des éléments de la tour ;
4. Relier des collections de ces éléments par des morphismes qui soient respectés par les actions.

^{2.7.} Les notions de métrique hyperbolique, théorème d'uniformisation, coordonnées de Fenchel-Nielsen, pantalons, découpe minimale d'une surface, plongements de manchons standards et trompettes, courbes rationnelles presque singulières et arbres de droites projectives - arbres trivalents - constellations et parenthésages, dégénérescence maximale dans la compactification stable, explications des voisinages tubulaires sont supposées connues dans ce mémoire et ne sont pas exposées pour respecter le format de ce mémoire.

^{2.8.} Pour plus d'explications on renvoie le lecteur au Chapitre 1 de [BFL99].

3.1. Espaces et groupes de Teichmüller. On se donne une variété topologique orientée S de genre g et avec n points marqués qu'on pourra considérer comme enlevés. Une telle surface est unique à homéomorphisme canonique près mais les espaces de modules et Teichmüller qu'on introduira ne le seront qu'à isomorphisme non canonique près. On notera ainsi $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des points marqués de S . La paire (S, P) définit une surface de type (g, n) . Le groupe :

$$\pi_1(S - P; p_0) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_n \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_n = 1 \rangle$$

est libre à $2g + n - 1$ générateurs. On admet maintenant la proposition suivante.

Proposition 3.1. *S étant une structure différentiable, il est équivalent de travailler en topologie C^0 ou en topologie C^1 i.e. un difféomorphisme homotope à l'identité est également isotope à l'identité.*

Ce théorème suivant classifie les difféomorphismes des surfaces.

Théorème 3.2. *(Théorème Fondamental de Nielsen) On a l'isomorphisme suivant :*

$$\text{Diff}(S)/\text{Diff}_0(S) \simeq \text{Aut}(\pi_1(S; p_0))/\text{Inn}(\pi_1(S; p_0)),$$

où :

- S est une surface compacte orientable ;
- $\text{Diff}(S)$ est le groupe des difféomorphismes de S préservant l'orientation ;
- $\text{Diff}_0(S)$ la composante connexe de l'identité i.e. le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité où l'isotopie ne préserve pas nécessairement le point base.

Remarque 3.3. Soit X une surface de Riemann modélée sur S de type (g, n) i.e. une structure complexe sur S . On a ainsi une surface de Riemann compacte \hat{X} et des éléments x_1, \dots, x_n tels que $X = \hat{X} - \{x_1, \dots, x_n\}$. On suppose que X est dans le cas hyperbolique c'est-à-dire que sa caractéristique d'Euler-Poincaré est :

$$\chi(X) = \chi(S - P) = 2 - 2g - n < 0.$$

Ainsi, par le théorème d'uniformisation,

$$\pi_1(X) \simeq \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

De cette manière, $X \simeq \mathbb{H}/\Gamma$, où $\Gamma \simeq \pi_1(S - P; p_0)$ est un sous-groupe discret de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. On interprétera Γ comme des isométries de \mathbb{H} pour la structure hyperbolique usuelle de \mathbb{H} .

3.1.1. Marquages des surfaces de Riemann. On reprends les notation du paragraphe précédent. On se donne par la suite (S, P) une telle surface et on s'établit dans le cas hyperbolique. On définit la notion d'espace de Teichmüller à l'aide d'une triple articulation: analytique, métrique et topologique.

Définition 3.4. *L'espace de Teichmüller est le quotient :*

$$\mathcal{T}_{g,n} := \mathcal{H}/\text{Diff}(S - P).$$

De manière équivalente, $\mathcal{T}_{g,n}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des surfaces de Riemann munies d'un marquage, modulo les isomorphismes qui respectent les marquages.

Ainsi, on caractérise une surface de référence par le nombre de points marqués comme fait dans ce qui suit.

Définition 3.5. *On se donne une surface de référence (S, P) , où S est une surface de Riemann et P un ensemble de points marqués.*

- **$\text{Diff}_+(S, P)$** est le groupe des difféomorphismes de S qui préservent l'orientation et fixe P .
- **L'espace de modules $\mathcal{M}(S, P)$** $\simeq \mathcal{M}_{g,n}$ est l'ensemble des métriques hyperboliques sur S , à difféomorphisme près :

$$\mathcal{M}(S, P) := \mathcal{H}/\text{Diff}_+(S, P).$$

La compréhension de la topologie de l'espace des modules^{3.1} passe par une cellulation de celui-ci en tant que découpe en cellules, qui sont des objets topologiquement triviaux. Ceci sera à la base de l'étude cohomologique de ces espaces de modules et du groupe de Grothendieck-Teichmüller dans la partie suivante.

3.1.2. Groupe de Teichmüller modulaire $\Gamma_{g,n}$. On reprends les notation du paragraphe précédent.

Définition 3.6. *On appelle **groupe de Teichmüller modulaire** (ou **mapping class group**), noté $\Gamma_{g,n}$, ou $\text{Mod}_{g,n}$, ou encore $\text{Mod}(S, P)$ le groupe :*

$$\Gamma_{g,n} \simeq \text{Mod}(S, P) := \text{Diff}_+(S, P)/\text{Diff}_0(S, P),$$

ou de manière équivalente,

$$\Gamma_{g,n} \simeq \text{Mod}(\Gamma) = \text{Aut}_+^*(\Gamma)/\text{Inn}(\Gamma),$$

où $\text{Aut}_+^(\Gamma)$ est le sous-groupe de $\text{Aut}(\Gamma)$ qui préserve l'orientation et les sous-groupes cycliques engendrés par les éléments paraboliques.*

Remarque 3.7. C'est le groupe des composantes connexes du groupe des difféomorphismes orientés de la surface de référence. Ces définitions dépendent de $S - P$ et de \mathbb{H}/Γ , qui est une surface de type (g, n) .

La proposition suivante est une conséquence facile de ce fait.

Proposition 3.8. *L'action de $\Gamma_{g,n}$ sur $\mathcal{T}_{g,n}$ est propre et discontinue.*

3.1. Pour plus de détails se reporter au livre [BFL99].

C'est ainsi un revêtement ramifié au dessus de $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\Gamma_{g,n}$. Les points de ramification sont les points fixes des éléments de $\Gamma_{g,n}$ et tous les stabilisateurs sont finis puisque l'action est propre. Chaque stabilisateur est donc trivial sauf les cas $g=0, n=1$, dit cas d'*involution elliptique*, et $g=2, n=0$, dit cas d'*involution hyperelliptique*. Ces stabilisateurs sont les automorphismes des surfaces de Riemann correspondantes (i.e. théorème de HURWITZ). Les éléments de $\Gamma_{g,n}$ sont ainsi par définition les classes d'isotopie de difféomorphismes de $S - P$.

3.2. Dégénérescence de surfaces de Riemann et voisinages à l'infini de $\mathcal{M}_{0,n}$. On se propose de construire une compactification $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ des espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ dans le cas $g=0$. On déterminera aussi une description combinatoire du voisinage à l'infini de $\mathcal{M}_{0,n}$ et, en particulier, des points de dégénérescence maximale de ces espaces qui correspondent au cas où toutes les géodésiques d'une découpe en pantalons dégénèrent simultanément. La raison de ces considérations est qu'on souhaite rester dans le cas d'espaces compacts, mais $\mathcal{M}_{g,n}$ ne l'est pas. Ceci deviendra compliqué comme on peut le voir en étudiant l'injection de $\mathcal{M}_{0,n}$ vers $(\mathbb{P}^1\mathbb{C})^{n-3}$.

3.2.1. Etude des espaces de modules de courbes en genre zéro. On admet la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Si une famille de surfaces de Riemann $\{X_i\}, i \in I$, n'est pas borné dans l'espace de modules, il existe une sous-famille $\{X_i\}, i \in J \subset I$, et une classe d'isotopie de courbes telle que la longueur de la géodésique correspondante tende vers 0 le long de cette sous-famille.*

On va définir $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ comme l'union de $\mathcal{M}_{g,n}$ et de l'ensemble des surfaces à noeuds de type (g,n) avec au moins un noeud. On muni cet espace de la topologie engendrée par le passage au quotient et passage au compactifié.

Remarque 3.10. On a défini les isomorphismes des sphères de Riemann comme les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agissant par homographies. Si on se donne trois points distincts a, b et $c \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, on peut toujours les envoyer sur 0, 1 et ∞ respectivement par l'homographie suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{z-a}{z-c} \end{aligned}$$

En généralisant ce fait, il existe donc toujours un isomorphisme unique envoyant les n points marqués ordonnés d'une sphère sur n autres dont les trois derniers sont 0, 1 et ∞ , cas dit *standard*. On a ainsi, un seul représentant de chaque classe d'isomorphismes de sphères à n points marqués tel que les points marqués ordonnés soient donnés par le n -uplet $(x_1, \dots, x_{n-3}, 0, 1, \infty)$, où $x_i \in \mathbb{C}, \forall i$ sont distincts deux à deux et distincts de 0, 1, ∞ . Intuitivement, $\mathcal{M}_{0,n}$ correspond à l'ensemble de n points distincts numérotés sur la sphère quotienté par une relation d'isomorphisme. En bref, si on note Δ la réunion de hypersurfaces définies par $x_i = x_j, i \neq j$, alors :

$$\mathcal{M}_{0,n} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\})^{n-3} - \Delta.$$

Ainsi en particulier,

- $\mathcal{M}_{0,3} = \{*\}$ puisqu'on peut toujours envoyer 3 points sur $\{0, 1, \infty\}$, il n'y a donc qu'une seule classe d'équivalence ;
- $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$;
- $\mathcal{M}_{0,5} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\})^2 - \{\lambda = \mu; \lambda, \mu \neq 0, 1, \infty\}$.

Proposition 3.11. *On a :*

1. Pour $n \geq 5$, $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,n}) \simeq \mathfrak{S}_n$;
2. $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,4}) \simeq \mathfrak{S}_4/K \simeq \mathfrak{S}_3$ où K est le sous-groupe de \mathfrak{S}_4 engendré par les transpositions.

Démonstration. Automatique d'après ce qui précède. □

Définition 3.12. *On note $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ la compactification stable de $\mathcal{M}_{g,n}$.*

Remarque 3.13. On voit aisément que $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Posons $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n} := \overline{\mathcal{M}}_{g,n}/\mathcal{M}_{g,n}$, appelé **diviseur à l'infini**, ou **bord**, de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Il existe une étroite relation entre ce bord et la structure des catégories tensorielles tressées que nous introduisons dans ce qui suit.

3.3. Groupes de tresses et groupes modulaires. Comme expliqué dans l'introduction, le groupe de tresses permet de présenter le groupe de Teichmüller comme quotient de ce groupe par deux relations qu'on peut dessiner et qui nous seront très utiles en troisième partie. Passons à présent à introduire les groupoïdes profinis de Teichmüller.

3.3.1. Groupoïdes profinis de Teichmüller. On commence par définir le groupe des tresses qu'on utilisera dans la suite.

Définition 3.14. *Pour tout $n \geq 2$, on a un groupe, noté B_n , engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et les relations :*

1. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$;
2. $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j$, pour $|i - j| \geq 2$.

*Ce groupe est le **groupe des tresses d'Artin**.*

Exemple 3.15. On prends $n \geq 2$ car $B_1 = \mathbb{Z}$ de manière évidente.

Remarque 3.16. On construit une surjection :

$$\begin{aligned} \kappa: B_n &\longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ \sigma_i &\longmapsto (i, i+1) \end{aligned}$$

induite à partir de :

$$B_n \longrightarrow B_n / \langle \sigma_i \rangle.$$

On pose $K_n := \ker(\kappa)$, qui est engendré, pour tout $1 \leq i < j \leq n$, par les éléments :

$$x_{ij} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}.$$

On admet la proposition suivante.

Proposition 3.17. *Le groupe de Teichmüller $M(0, n)$ est le quotient de B_n par les relations suivantes :*

i. $y_n := \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{n-1} = 1$ (relation de la sphère);

ii. $w_n := (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^n = 1$ (relation du centre).

On note ainsi $M(0, n) := B_n / \langle y_n, w_n \rangle$.

De même, on définit le **groupe coloré de Teichmüller** par :

$$K(0, n) := K_n / \langle y_n, w_n \rangle.$$

On a alors les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{0,n} & \cong & B_n / \langle y_n, w_n \rangle \\ \tau_i & \longmapsto & \sigma_i \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_{0,n} & \cong & K_n / \langle \{x_{1i} x_{2i} \dots x_{ni}\}_{2 \leq i \leq n} \rangle \\ \tau_i & \longmapsto & \sigma_i \end{array}$$

Remarque 3.18. De manière générale, on a les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = F_2 \simeq K(0, 4) \quad \hookrightarrow \quad K(0, 5) = \langle x_{12}, x_{23} \rangle \\ x \longmapsto x_{12} \\ y \longmapsto x_{23} \\ f \longmapsto \tilde{f} \end{array}$$

Soit X une variété algébrique.

Définition 3.19. *On appelle successivement :*

- Un **Pro-point \tilde{a} sur X** , une collection de points a_Y , un sur chaque recouvrement fini Y de X tel que pour chaque couple Y et Y' de tels recouvrements, avec Y' recouvrement de Y , l'image de a_Y sous le revêtement $Y \longrightarrow Y'$ soit $a_{Y'}$;
Si X est définie sur \mathbb{Q} et $\tilde{a} = \{a_Y\}_Y$ est un pro-point de X , alors chaque a_Y est dans $Y(\mathbb{Q})$ pour tout recouvrement Y de X , on a donc une action galoisienne sur ces pro-points. Les points sur le revêtement universel \tilde{X} de $X(\mathbb{C})$ donne lieu à un sous-espace de l'espace des pro-points.

Supposons que $X(\mathbb{Q})$ est non vide et fixons $\tilde{a} \in \tilde{X}$ point base sur un point $a_X \in X(\mathbb{Q})$.

- Un **Pro-lacet sur X** sur \tilde{a} , un pro-point basé sur a_X .

Cette terminologie est une généralisation de la situation où le pro-point choisi est lui-même un point \tilde{b} sur \tilde{X} basé sur a_X . Ainsi, deux points \tilde{a} et \tilde{b} sur \tilde{X} déterminent de manière unique un lacet (à homotopie près) de $X(\mathbb{C})$. Ces pro-lacets peuvent être composés et former ainsi un groupe qu'on note $\hat{\pi}^1(X, \tilde{a})$. Ce groupe est isomorphe au complété profini de $\pi_1(X(\mathbb{C}), a_X)$.

On rappelle aussi que le groupoïde fondamentale $\pi_1(X, A)$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo homotopie des chemins de a à b , pour tous $a, b \in A$.

Soit \tilde{a} et \tilde{b} des pro-points de X basés sur a et b respectivement,

- Un **Pro-chemin sur X** de \tilde{a} à \tilde{b} , l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de a à b dans X , précomposé avec le groupe de pro-lacets $\hat{\pi}_1(X, \tilde{a})$.

Soit \tilde{A} un ensemble fini de pro-points de X ,

- La **Complétion profinie de $\pi_1(X, A)$** , l'ensemble des pro-chemins de \tilde{a} à \tilde{b} , pour toute paire \tilde{a} et \tilde{b} de pro-points de A . On la note $\hat{\pi}_1(X, A)$.

Ainsi, d'après ce qui précède on définit :

Définition 3.20. *Le groupoïde de Teichmüller est :*

$$T(0, n) := \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}, \mathcal{B}_n).$$

Il est donné par les classes :

- Les objets forment l'ensemble de voisinages réels simplement connexes de points de dégénérescence maximale dans le complété profini $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ de $\mathcal{M}_{0,n}$.
- Les flèches sont les classes d'homotopie des chemins entre deux points base.

On définit de même le groupoïde de Teichmüller profini dans la suite.

Définition 3.21. *Le groupoïde de Teichmüller profini est*

$$\hat{T}(0, n) := \hat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,n}, \mathcal{B}_n).$$

C'est le groupoïde de pro-chemins sur l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,n}$ ayant comme extrémités les points base à l'infini de \mathcal{B}_n .

Remarque 3.22. On remarque deux faits :

- Le groupoïde de Teichmüller profini $\hat{T}(0, n)$ est isomorphe au complété profini du groupe de Teichmüller $T(0, n)$.
- En particulier, on a deux isomorphismes :

$$\begin{aligned} \hat{F}_2 \simeq \hat{K}(0, 4) \text{ et } \hat{F}_2 &\hookrightarrow \hat{K}(0, 5) \\ x &\longmapsto x_{12} \\ y &\longmapsto x_{23} \end{aligned}$$

3.3.2. Relations entre le groupe de tresses et la catégorie des arbres. On peut mettre en relation les groupes de tresses et, dans les catégories tensorielles tressées (arbres trivalents), l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} qui transforment un arbre en un autre en permutant les indices des feuilles qui sont différents de 0. Cette relation peut être visualisée si on attache chaque bout d'un fil des feuilles numérotées par le même numéro, et ceci pour chaque feuille de chaque arbre. On doit alors imaginer que les morphismes de commutativité permettent de tresser les paquets de fils correspondants à des branches aboutissant au même sommet, et les morphismes d'associativité permettent de rapprocher en branches aboutissant au même sommet deux paquets adjacents de feuilles quelconques ; les combinaisons des deux opérations correspondent aux tresses. On définit le groupe des homomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(T_0, \mathcal{T}) := \coprod_{T \in \mathcal{T}} \mathrm{Hom}(T_0, T).$$

Voici une caractérisation complète de la relation évoquée :

Proposition 3.23. *Pour tout $n \geq 4$, $T_0 \in \mathcal{C}_n$ et \mathcal{T} , l'ensemble des arbres de \mathcal{C}_n obtenus de T_0 en permutant les indices différents de 0, il existe une bijection d'ensembles :*

$$\Psi : \mathrm{Hom}(T_0, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} B_{n-1}$$

telle que Ψ induit une structure de groupe sur $\mathrm{Hom}(T_0, \mathcal{T})$ et devient donc un isomorphisme de groupes. La restriction de Ψ à $\mathrm{Hom}(T_0, T_0)$ induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Hom}(T_0, T_0) \xrightarrow{\sim} K_{n-1}$$

qui est compatible avec les lois de composition usuelles de ces deux groupes.

Démonstration. Pour une démonstration complète de ceci, se reporter à [Sch99], p. 89 - 93. \square

3.3.3. Groupoïde de Teichmüller et catégories tensorielles tressées. On passe maintenant à l'énonciation du théorème principal de cette partie qui relie le groupoïde de Teichmüller à la catégorie tensorielle tressée pure des arbres trivalents.

Théorème 3.24. *Il existe un épimorphisme de groupoïdes $\Phi_n : \mathcal{C}_n \longrightarrow T(0, n)$.*

Démonstration. Pour une démonstration complète de ceci, se reporter à [Sch99] (p. 100 - 104). L'idée de la preuve est de définir tout d'abord Φ_n sur les objets. Puis sur les morphismes d'identité, les morphismes d'associativité et de commutativité. Ensuite on démontre que Φ_n est bien un homomorphisme de groupoïdes. Finalement on démontre que Φ_n est surjectif. \square

Remarque 3.25. La démonstration de ce théorème et les calculs des tresses effectués dans la proposition antérieure nous permettent de paramétrer explicitement des chemins d'associativité et de commutativité sur $\mathcal{M}_{0,n}$ partant d'un point base quelconque à l'infini. On va paramétrer un chemin partant d'un point base $P \in \mathcal{B}_n$ en choisissant une sphère X_P explicite à points marqués fixés et telle que le point de $\mathcal{M}_{0,n}$ associé à X_P appartienne à P . Ceci s'avère très utile en pratique comme on le verra dans la dernière partie de ce mémoire.

3.4. Les groupes de Grothendieck-Teichmüller k -pro-unipotent et profini.

On va définir le groupe de Grothendieck-Teichmüller des deux façons que V. G. DRINFEL'D a présenté dans [Dri91]. Tout d'abord, on présente le lien avec les quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires, dont la catégorie des représentations forme une catégorie tensorielle tressée tel que l'on a présenté ci-dessus. La donnée d'un algèbre de Hopf quasi-triangulaire permet de construire des représentations du groupe de tresse. L'idée d'A. GROTHENDIECK est basée en un principe de deux étages (sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$), les deux premiers axiomes appartenant au *premier étage* puis un troisième axiome appartenant au *deuxième étage*. On se donne dans la suite une catégorie tensorielle tressée de représentations d'une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$. On souhaite à présent changer les isomorphismes d'associativité et de commutativité sous-jacents d'une telle catégorie sans changer le reste des morphismes de sa structure. Cela revient à multiplier :

$$a: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

par un automorphisme de $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Ainsi, la proposition suivante en découle.

Proposition 3.26. *Le groupe $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ agit sur $(V \otimes V) \otimes V$ de la manière suivante :*

→ σ_1 détermine l'isomorphisme suivant :

$$c \otimes \text{id}: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3;$$

→ σ_2 détermine l'isomorphisme suivant :

$$a^{-1}(\text{id} \otimes c)a: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes V_3) \otimes V_2.$$

→ De manière générale, $\alpha \in B_3$ détermine un isomorphisme suivant :

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_{i_1} \otimes V_{i_2}) \otimes V_{i_3},$$

où (i_1, i_2, i_3) correspond à α^{-1} .

On a ainsi, une nouvelle action de K_3 sur chaque $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ et chaque $\varphi \in K_2$ détermine un nouvel isomorphisme d'associativité. Ainsi,

Corollaire 3.27. *Tout $\psi \in K_2$ est de la forme $\sigma^{2\lambda}$, où $B_2 = \langle \sigma \rangle$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$. Donc, changer un isomorphisme de commutativité équivaut à poser $\lambda = 2m + 1$. Tout $\varphi \in K_3$ est de la forme $f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \cdot (\sigma_1 \sigma_2)^{3k}$, $k \in \mathbb{Z}$ et où on a noté « $f(a, b)$ » l'image de $f \in F_2$ par le morphisme :*

$$\begin{aligned} p: \langle x, y \rangle = F_2 &\longrightarrow F_2. \\ x &\longmapsto a \\ y &\longmapsto b \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'élément $(\sigma_1 \sigma_2)^3$ est un générateur du centre de B_3 .

Ainsi pour avoir de nouveaux isomorphismes de commutativité et associativité, le triangle de MacLane ne demande pas de conditions supplémentaires. Cependant, on voit facilement que le pentagone et les deux hexagones vont demander les axiomes qui suivent.

Corollaire 3.28. *On pose $z = (xy)^{-1}$. Alors :*

→ *Le premier hexagone exige $n=0$ et la relation :*

$$f(x, y)x^m f(z, x)z^m f(z, y)^{-1}y^m = 1,$$

pour $m = \frac{(\lambda-1)}{2}$.

→ *Le deuxième hexagone exige $n=0$ et la relation :*

$$f(y, x)^{-1}x^m f(z, x)z^m f(z, y)^{-1}y^m = 1,$$

pour $m = \frac{(\lambda-1)}{2}$.

Une conséquence facile de ce fait est la suivante.

Proposition 3.29. *Avec les notations précédentes, les deux relations ci-dessus sont satisfaites si et seulement si $n=0$ et :*

$$f(y, x)f(x, y) = 1 \tag{3.1}$$

$$f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1 \tag{3.2}$$

Le pentagone exige, sur $\varphi \in K_3$, la relation (notations de la partie 3.3.1) DRINFEL'D, dans [Dri91] :

$$f(x_{12}, x_{23}, x_{24})f(x_{13}, x_{23}, x_{34})f(x_{23}, x_{34})^{-1} = f(x_{12}, x_{13}, x_{24}x_{34})f(x_{12}, x_{23}),$$

ou encore IHARA, dans [Iha94] :

$$f(x_{34}, x_{45})f(x_{51}, x_{12})f(x_{23}, x_{34})f(x_{45}, x_{51})f(x_{12}, x_{23}) = 1 \tag{3.3}$$

On peut remarquer que la relation donnée par le pentagone a deux expressions équivalentes données par les deux auteurs cités.

Proposition 3.30. *L'ensemble GT des couples $(\lambda, f) \in \mathbb{Z} \times F_2$ qui satisfont (3.1), (3.2) et (3.3) hérite une structure de monoïde lorsqu'il est muni de la multiplication induite de la composition naturelle suivante :*

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z} \times F_2) \times (\mathbb{Z} \times F_2) &\longrightarrow \mathbb{Z} \times F_2 \\ ((\lambda_1, f_1(x, y)), (\lambda_2, f_2(x, y))) &\longmapsto (\lambda_1\lambda_2, f_1(x, y)f_2(x^\lambda, f_1(x, y)^{-1}y^\lambda f_1(x, y))) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration. Si on applique deux fois cette action on a :

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{F_1} x^{\lambda_1} \xrightarrow{F_2} x^{\lambda_1\lambda_2} \\ y &\longmapsto f_1^{-1}y^{\lambda_1}f_1 \longmapsto F_2^{-1}(f_1)f_2^{-1}y^{\lambda_1\lambda_2}f_2F_2(f_1) \end{aligned}$$

où $(\lambda_1, f_1(x, y)), (\lambda_2, f_2(x, y)) \in (\mathbb{Z} \times F_2)$ et $F_2(f_1) = f_2(x^\lambda, f_1(x, y)^{-1}y^\lambda f_1(x, y))$. La proposition en découle de ce fait. \square

Corollaire 3.31. *Ainsi défini le monoïde GT , il agit sur l'ensemble des quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires.*

Si bien ces exigences nous rendent un objet mathématique très riche, on remarque que ce monoïde a exactement deux éléments comme on le voit dans la suite.

Proposition 3.32. *Les seuls couples $(\lambda, f(x, y))$ qui satisfont les contraintes (3.1), (3.2), (3.3), et (3.4) ci-dessus, sont :*

→ *L'identité :*

$$(1, 1) : (C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R) \mapsto (C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R) ;$$

→ *L'involution :*

$$(-1, 1) : (C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R) \mapsto (C, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, (R^{21})^{-1}).$$

Plus précisément, (3.1) et (3.2) sont seulement satisfaits par :

$$\lambda = \pm 1 \text{ et } f(x, y) = y^r x^{-r}.$$

Démonstration. D'une part, si $(\lambda, f(x, y))$ satisfaisaient (3.1), (3.2), alors $(\lambda, y^{-s}f(x, y)x^s)$ aussi.

D'autre part, si $y^{-s}f(x, y)x^s$ n'était pas égal à 1, alors la représentation de $y^{-s}f(x, y)x^s$ serait de la forme $x^l \dots y^{-l}, l \neq 0$, ce qui est impossible d'après (3.2). \square

La remarque suivante est particulièrement importante.

Remarque 3.33. Si K est un corps de caractéristique 0, alors (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) sont stables même si on considérait que les couples $(\lambda, f(x, y))$ appartiennent à $K \times \widehat{\mathbb{F}}_2$, où $\widehat{\mathbb{F}}_2$ est la complétion k -pro-unipotente de \mathbb{F}_2 . On peut ainsi étendre la définition de ces couples et, selon la complétion prise, on aura des différentes versions, dont l'équivalence n'est pas triviale, entre différentes versions d'un groupe qu'on nommera groupe de « Grothendieck-Teichmüller ».

3.4.1. Version k -pro-unipotente $\widehat{GT}(K)$. On reprends les définitions du paragraphe précédent et on définit une variante du groupe de Grothendieck-Teichmüller dans cette sous-partie.

Définition 3.34. *Soit un K corps de caractéristique 0. On appelle **Quasi-algèbre quantifiée enveloppante universelle de Hopf quasi-triangulaire sur $K[[h]]$** est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ sur $K[[h]]$ telle que A/hA est une algèbre universelle enveloppante munie de la comultiplication standard et telle que A , en tant que $K[[h]]$ -module topologique, soit isomorphe à $V[[h]]$ pour un certain K -espace vectoriel V .*

Remarque 3.35. Comme A/hA est une algèbre universelle enveloppante, alors d'après (2.5) et d'après l'inversibilité de Φ , alors $\Phi \equiv 1 \pmod{h}$. De même, on a $R \equiv 1 \pmod{h}$ et en passant au twist de quasi-QUE-algèbre de Hopf quasi-triangulaire, on a aussi $F \equiv 1 \pmod{h}$.

Définition 3.36. On définit par $\text{GT}(K)$ le monoïde des couples $(\lambda, f(x, y))$ qui appartiennent à $K \times \widehat{\mathbb{F}}_2$, où $\widehat{\mathbb{F}}_2$ est la complétion k -pro-unipotente de \mathbb{F}_2 . On appelle **version K -pro-unipotente du groupe de Grothendieck-Teichmüller** le groupe des éléments inversibles de $\text{GT}(K)$ et on la note $\widehat{\text{GT}}(K)$.

Remarque 3.37. Il est clair que :

$$\widehat{\text{GT}}(K) = \{(\lambda, f) \in \text{GT}(K) \mid \lambda \neq 0\}.$$

Ce groupe est de dimension infinie et on a une surjection :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{GT}}(K) &\longrightarrow K^* \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

L'action de ce groupe sur l'ensemble des quasi-algèbre quantifiée enveloppante universelle de Hopf quasi-triangulaire sur $K[[h]]$ commute avec le twist^{3.2}. Pour plus de détails sur cette version, se reporter à l'article [Dri91]^{3.3}.

3.4.2. La version profinie du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\text{GT}}$. On considère maintenant $\widehat{\mathbb{F}}_2$ et $\widehat{\mathbb{Z}}$ les complétions profinies de \mathbb{F}_2 et \mathbb{Z} respectivement^{3.4}.

Définition 3.38. On appelle **version profinie du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\text{GT}}$** le groupe formé des éléments inversibles du monoïde $\text{GT} = \{(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{F}}_2' \mid (\lambda, f) \text{ satisfait (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4)}\}$ munie de la loi de composition interne induite par (3.4).

On peut ici remarquer qu'on a considéré que $f \in \widehat{\mathbb{F}}_2'$ c'est à dire le groupe dérivé de $\widehat{\mathbb{F}}_2$. En effet, il est automatique que si $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{F}}_2$ et satisfait (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4), alors $f \in \widehat{\mathbb{F}}_2'$. Le résultat suivant et déterminant pour la suite du programme de A. GROTHENDIECK et de V. DRINFEL'D qu'on a décrit dans l'introduction.

Remarque 3.39. On considère dans la suite les morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \theta: \widehat{\mathbb{F}}_2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{F}}_2 & \omega: \widehat{\mathbb{F}}_2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{F}}_2 & \iota: \widehat{\mathbb{F}}_2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{F}}_2 \\ x &\longmapsto y & , & x &\longmapsto y & \text{ et } & x &\longmapsto x^{-1} \\ y &\longmapsto x & & y &\longmapsto z & & y &\longmapsto y^{-1} \end{array}$$

3.2. On renvoie le lecteur à la première partie de ce mémoire.

3.3. Si bien cette version semble être très intéressante, on se limitera dans le cadre de ce mémoire au cas profinie qu'on définit dans la suite.

3.4. Idem.

Alors, on peut définir le groupe de Grothendieck-Teichmüller de manière équivalente en le définissant comme l'ensemble des couples inversibles $(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{F}}_2$ tels que :

$$\begin{aligned}\theta(f)f &= 1 \\ \omega^2(fx^m)\omega(fx^m)fx^m &= 1 \\ \rho^4(\tilde{f})\rho^3(\tilde{f})\rho^2(\tilde{f})\rho(\tilde{f})\tilde{f} &= 1\end{aligned}$$

où ρ est l'automorphisme de $\hat{K}(0, 5)$ donné par conjugaison par l'élément $(\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^2$ et avec $K(0, 5) = \langle x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{51} \rangle$.

Théorème 3.40. (DRINFEL'D, IHARA ET BELYI) $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ s'injecte dans $\widehat{\text{GT}}$, en associant l'élément $(-1, 1)$ à l'image de la conjugaison complexe.

Démonstration. On se réfère à l'article [Iha94] pour une démonstration complète. \square

On se limitera à donner quelques explications sur cette injection dans la suite. La proposition suivante est essentielle du moment où elle donne la procédure qu'on utilisera pour analyser l'injection :

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\text{GT}}.$$

En effet, ici on pose une première caractérisation de l'image de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\widehat{\text{GT}}$, dans la deuxième partie on ajoutera deux nouvelles équations et dans la troisième partie en y ajoutera encore quatre.

Remarque 3.41. On a ainsi que $\widehat{\text{GT}}$ est contenu dans le groupe d'automorphismes de $\hat{\mathbb{F}}_2$. On rappelle que :

$$\bar{\mathbb{F}}_2 = K(0, 4) = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}, \{0, 1\}) = \pi_1(M_{0,4}, \{0, 1\}).$$

On définit donc une action fidèle :

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{Q}} &\hookrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{F}}_2) \\ \sigma &\longmapsto \phi_{\sigma}: \hat{\mathbb{F}}_2 \longrightarrow \hat{\mathbb{F}}_2 \\ &\quad x \longmapsto x^{\chi(\sigma)}\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$y \longmapsto f_{\sigma}^{-1}y^{\chi(\sigma)}f_{\sigma}\tag{3.6}$$

où l'on utilise le caractère cyclotomique : $\chi: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$. Cette action passe en une injection :

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{Q}} &\hookrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{F}}_2' \\ \sigma &\longmapsto (\chi(\sigma), f_{\sigma})\end{aligned}$$

dont l'image est incluse dans $\widehat{\text{GT}}$ (i.e. satisfait (3.1), (3.2) et (3.3)). On peut donc étendre cette paramétrisation à l'injection suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{\text{GT}} &\hookrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{F}}_2' \\ \sigma &\longmapsto (\lambda_{\sigma}, f_{\sigma})\end{aligned}$$

où l'on étend le caractère cyclotomique à $\lambda: \widehat{\text{GT}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$.

D'après ce qui précède, on a la proposition suivante.

Proposition 3.42. *On a une action fidèle et par automorphismes de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\widehat{\mathbb{F}}_2$.*

Remarque 3.43. On a l'action fidèle suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{GT}} &\hookrightarrow \text{Aut}(B_n) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \varphi: B_n \longrightarrow B_n \\ &\quad \sigma_1 \longmapsto \sigma_1^\lambda \\ &\quad \sigma_i \longmapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2) \end{aligned}$$

où $i = 2 \dots n - 1$ et $y_i = \sigma_{i-1} \dots \sigma_1^2 \dots \sigma_{i-1}$. Cette action induit une action sur le complété profini \widehat{B}_n du groupe de tresses; elle même passe à une nouvelle action sur le complété profini $\widehat{M}(0, n)$ du groupe de Teichmüller et se restreint en une action sur le complété profini $\widehat{K}(0, n)$ du groupe de Teichmüller coloré.

3.5. Actions de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\widehat{T}(0, n)$.

3.5.1. L'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $X(\mathbb{Q})$. Le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit^{3.5} sur tout groupoïde fondamental algébrique d'une \mathbb{Q} -variété, notée $X(\mathbb{Q})$ basée en un ensemble de points stables sous $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, en particulier pour \mathcal{B}_n . Ainsi,

$$\widehat{T}(0, n) \simeq \coprod_{(a,b) \in \mathcal{B}_n} \pi_1(X(\mathbb{Q}), a, b).$$

Or, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur chaque $\pi_1(X(\mathbb{Q}), a, b)$. On va donc remplacer $X(\mathbb{Q})$ par $\mathcal{M}_{0,n}$ pour donner une nouvelle définition de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de nature géométrique et combinatoire sans passer par les nombres algébriques. Comme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de $\widehat{\text{GT}}$, on peut se concentrer sur l'action de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\widehat{T}(0, n)$ comme on le présente dans la suite.

3.5.2. Action de $\widehat{\text{GT}}$ sur $\widehat{T}(0, n)$. On présente le dernier résultat important de cette partie qui est l'action du groupe profini de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\text{GT}}$ sur le groupoïde de Teichmüller $\widehat{T}(0, n)$.

Théorème 3.44. *Soit $n \geq 4$, alors $\widehat{\text{GT}}$ est le groupe complet d'automorphismes de $\widehat{T}(0, n)$.*

Démonstration. On définit une action de $\widehat{\text{GT}}$ sur le complété profini $\widehat{\mathcal{C}}$ de la catégorie des arbres où l'on remplace chaque groupe local par son complété profini. Cette action nous dira que $\widehat{\text{GT}}$ est bien un groupe d'automorphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$. Or, d'après le théorème 3.24, il suffit de montrer que cette action respecte le passage au quotient :

$$\widehat{\mathcal{C}}_n \longrightarrow \widehat{T}(0, n)$$

en montrant que $\widehat{\text{GT}}$ préserve son noyau. Pour plus de détails, se reporter au livre [BFL99] (pp. 110-114). \square

3.5. Ce fait est connu depuis SGA 1,

4. UNE INTERPRÉTATION COHOMOLOGIQUE DU GROUPE DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER.

Une des idées principales présentées dans l'article [LS97] est celle d'interpréter les relations définissant le groupe de Grothendieck-Teichmüller comme des relations de cocycles pour une certains groupes de cohomologie non-commutative. On introduit dans la première sous-partie, les paramètres :

$$g, h: \widehat{\text{GT}} \longrightarrow \widehat{F}_2'$$

qui décomposent le paramètre principal $f \in \widehat{\text{GT}}$ par rapport aux automorphismes θ, ω et ι de \widehat{F}_2 qu'on avait défini auparavant. On aura comme résultat une nouvelle description des éléments de $\widehat{\text{GT}}$. On va développer le premier et le quatrième paragraphe de l'article [LS97] et présenter les résultats portant sur des équations prenant en paramètres g et h . On va aussi ainsi présenter une interprétation du paramètre f comme pro-chemin.

4.1. Cohomologie non-abélienne : $H^1(\langle \theta \rangle, \widehat{F}_2)$ et $H^1(\langle \omega \rangle, \widehat{F}_2)$. La méthode proposée dans l'article pour prouver que $G_{\mathbb{Q}}$ s'injecte dans $\widehat{\text{GT}}$ est de déterminer la cohomologie non-abélienne des groupes engendrés par chaque générateur de \widehat{F}_2 et de $\widehat{K}(0, 5)$. On établit donc les propositions suivantes, qui sont admises dans le cadre de ce mémoire^{4.1}.

Proposition 4.1. *Avec les notations précédentes on a :*

- i. *Le groupe de cohomologie non-commutative $H^1(\langle \theta \rangle, \widehat{F}_2)$ est trivial.*
- ii. *Le groupe $H^1(\langle \omega \rangle, \widehat{F}_2)$ a exactement deux éléments : le cocycle trivial et celui donné par $c_{\omega} = xy$.*
- iii. *Le groupe $H^1(\langle \rho \rangle, \widehat{K}(0, 5))$ a exactement deux éléments : le cocycle trivial et celui donné par $c_{\rho} = x_{34}x_{51}^{-1}x_{45}x_{12}^{-1}$.*

Proposition 4.2. *Avec les notations précédentes on a :*

- i. *Le groupe $H^0(\langle \iota \rangle, \widehat{F}_2)$ est trivial.*
- ii. *La conjugaison complexe $(-1, 1)$ est centralisatrice dans $\widehat{\text{GT}}$ et dans $G_{\mathbb{Q}}$.*
- iii. *$G_{\mathbb{Q}}$ est normalisateur dans $\widehat{\text{GT}}$.*
 → *En particulier, si $G_{\mathbb{Q}}$ a un sous-groupe normal de $\widehat{\text{GT}}$, alors $G_{\mathbb{Q}} = \widehat{\text{GT}}$.*

4.1. Pour les démonstrations il suffit de se reporter à l'article [LS97].

4.2. Introduction des paramètres $g, h: \widehat{\mathbf{GT}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{F}}_2'$. Comme on l'a expliqué, on peut définir le groupe de Grothendieck-Teichmüller comme l'ensemble des couples inversibles $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{F}}_2$ tels que :

$$\begin{aligned} \theta(f)f &= 1 \\ \omega^2(fx^m)\omega(fx^m)fx^m &= 1 \\ \rho^4(\tilde{f})\rho^3(\tilde{f})\rho^2(\tilde{f})\rho(\tilde{f})\tilde{f} &= 1 \end{aligned}$$

où ρ est l'automorphisme de $\widehat{K}(0, 5)$ donné par conjugaison par l'élément $(\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^2$ et avec $K(0, 5) = \langle x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{51} \rangle$.

Théorème 4.3. *Soit $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbf{GT}}$. Alors il existe des 1-cocycles : $g, h \in \widehat{\mathbb{F}}_2$ et $k \in \widehat{K}(0, 5)$ tels que :*

$$f = \theta(g)^{-1}g \quad (4.1)$$

$$fx^{\frac{(\lambda-1)}{2}} = \begin{cases} \omega(h)^{-1}h & \text{si } \lambda \equiv 1 \pmod{3} \\ \omega(h)^{-1}xyh & \text{si } \lambda \equiv -1 \pmod{3} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\tilde{f}(x_{12}, x_{23}) = \begin{cases} \rho(k)^{-1}k & \text{si } \lambda \equiv \pm 1 \pmod{5} \\ \rho(k)^{-1}x_{34}x_{51}^{-1}x_{45}x_{12}^{-1}k & \text{si } \lambda \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{cases} \quad (4.3)$$

où (4.1) et (4.2) prennent place dans $\widehat{\mathbb{F}}_2$ et (4.3) dans $\widehat{K}(0, 5)$.

Remarque 4.4. En particulier, la proposition 4.2 nous dit que là où les groupes de cohomologie sont triviaux, alors tous les cocycles sont des cobords et vice-versa. On a ainsi une cohérence aux formules 4.1, 4.2 et 4.3.

Démonstration. Démontrons les relations (4.1) et (4.2) pour avoir une idée des techniques utilisées. Soit $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbf{GT}}$. Comme cet élément satisfait l'équation :

$$f(y, x)f(x, y) = \theta(f)f = 1$$

dans $\widehat{\mathbb{F}}_2$, alors par la proposition 4.1, le groupe cohomologie non-commutative de $H^1(\langle \theta \rangle, \widehat{\mathbb{F}}_2)$ est trivial. Ainsi f est un cobord, ce qui veut dire exactement qu'il existe $g = g(x, y) \in \widehat{\mathbb{F}}_2$ tel que $f = \theta(g)^{-1}g$. Ceci nous donne (4.1).

Pour démontrer (4.2) on sait que :

$$f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = \omega^2(fx^m)\omega(fx^m)fx^m = 1$$

donc fx^m définit un cocycle pour ω . Ainsi, par la proposition 4.2, fx^m est équivalent (à cobord près) soit à 1, soit à xy . Ceci veut dire qu'il existe $h = h(x, y) \in \widehat{\mathbb{F}}_2$ tel que soit $fx^m = \omega(h)^{-1}h$ soit $fx^m = \omega(h)^{-1}xyh$. Or comme $f \in \widehat{\mathbb{F}}_2$, donc si on suppose $fx^m = \omega(h)^{-1}h$, alors

$$f(x, y)x^m = \omega(h)^{-1}h = h(z, x)^{-1}h(x, y) = h((xy)^{-1}, x)^{-1}h(x, y).$$

Ecrivons maintenant $h(x, y) = x^a y^b \pmod{[\widehat{\mathbb{F}}_2']}$, où $a, b \in \widehat{\mathbb{Z}}$. De cette manière, modulo $\widehat{\mathbb{F}}_2'$, on a

$$x^m = (xy)^a x^{-b} x^a y^b = x^{2a-b} y^{a+b}$$

donc $b = -a$ et $m = 3a$. Ainsi $m \equiv 0 \pmod{3}$. D'autre part, si on suppose que $fx^m = \omega(h)^{-1}xyh$, alors on a :

$$x^m = (xy)^ax^{-b}xyx^ay^b = x^{2a-b+1}y^{a+b+1},$$

d'où $b = -a - 1$ et $m = 3a + 2$ donc $m \equiv 2 \pmod{3}$. Ceci conclut la preuve de la relation 4.2. \square

Corollaire 4.5. *Dans $\hat{\mathbb{F}}_2$, il existe, et ce de manière unique, deux éléments $g, h \in \hat{\mathbb{F}}_2$ tels que :*

$$f = \theta(g)^{-1}g = \begin{cases} y^{-\frac{(\lambda-1)}{2}}\omega(h)^{-1}h & \text{si } \lambda \equiv 1 \pmod{6} \\ y^{-\frac{(\lambda-1)}{2}}\omega(h)^{-1}y^{-1}h & \text{si } \lambda \equiv -1 \pmod{6} \end{cases} \quad (4.4)$$

La description des éléments de $\widehat{\mathbb{GT}}$ donnés dans ce théorème, et qui peuvent servir de définition pour $\widehat{\mathbb{GT}}$ a certains avantages dont les applications seront traités en troisième partie. Au lieu de décrire $\widehat{\mathbb{GT}}$ comme l'ensemble de tous les couples satisfaisant ces 3 conditions, on se donne ici une manière de construire toutes les paires satisfaisant chaque'une des conditions, de sorte que $\widehat{\mathbb{GT}}$ soit l'intersection de ces trois ensembles. En particulier, dans la troisième partie on va étudier l'action de $\widehat{\mathbb{GT}}$ dans les recouvrements finis de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, c'est à dire les courbes algébriques définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Finalement, on va les comparer avec les actions de $G_{\mathbb{Q}}$ sur ces recouvrements. Si on se donne un sous-groupe normal N de $\hat{\mathbb{F}}_2$ et X un tel recouvrement qui correspond à N , alors on peut se demander de déterminer l'image dans $\hat{\mathbb{F}}_2/N$ des paramètres f de $\widehat{\mathbb{GT}}$.

Grace à ces résultats on peut passer à la partie principale de ce travail, qui est l'analyse l'image de l'injection $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{GT}}$ via des équations où les paramètres présentés seront utilisés.

5. EQUATIONS HARMONIQUE ET ÉQUIANHARMONIQUE DANS $\widehat{\mathbb{GT}}$

Dans toute cette partie, on garde les mêmes notations que celles de la partie précédente. Le propos ici est d'étudier le comportement des 1-cocycles g et h dans $G_{\mathbb{Q}}$ en élaborant le type d'interprétations géométriques qu'on a utilisé dans la partie précédente (c.f. article [LS97]).

5.1. Introduction et énoncés. On note :

$$\hat{B}_3 = \langle \tau_1, \tau_2; \tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2 \rangle$$

et, pour un entier $a > 1$, $\rho_a: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ le 1-cocycle de Kummer défini par :

$$(\sqrt[n]{a})^{\sigma-1} = \zeta_n^{\rho_a(\sigma)},$$

où $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ et $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Théorème 5.1. *L'image de l'injection $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathbf{GT}}$ satisfait les équations suivantes :*

$$\begin{aligned} (\text{GF}_0) \quad & g(\tau_1^2, \tau_2^2) = \eta^{2\rho_2 - \rho_3} f(\tau_1, \eta) \tau_1^{-2\rho_2 + 3\rho_3} \\ (\text{GF}_1) \quad & g(\tau_1^2, \tau_2^2) = f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \\ (\text{HF}_0) \quad & h(\tau_1^2, \tau_2^2) = (\xi_{\pm})^{\rho_2 + \frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1, \xi_{\pm}) \tau_1^{3\rho_3 - 2\rho_2 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \\ (\text{HF}_1) \quad & h(\tau_1^2, \tau_2^2) = (\xi_{\pm})^{\frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1^2, \xi_{\pm}) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \end{aligned}$$

où $\eta = \tau_1 \tau_2 \tau_1$, $\xi_+ = \tau_1 \tau_2$ et $\xi_- = \tau_2 \tau_1$ et le signe \mp est pris selon $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{6}$ respectivement.

On peut remarquer que $\langle \tau_1^2, \tau_2^2 \rangle$ est un sous groupe d'ordre 2 de \hat{B}_3 . De cette manière, les paramètres g et h sont complètement déterminés comme pro-mots.

Corollaire 5.2. *Les relations ci-dessus impliquent les équations suivantes, qui sont préservées dans l'image de $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{GT}}$:*

$$f(\tau_1, \tau_1 \tau_2) = (\tau_1 \tau_2)^{-\rho_2} f(\tau_1^2, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{2\rho_2} \quad (5.1)$$

$$f(\tau_1, \eta) = \eta^{\rho_3 - 2\rho_2} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{6\rho_2 - 3\rho_3} \quad (5.2)$$

Démonstration. On met ensemble les parties à gauche de (GF_0) , (GF_1) et de (HF_0) et (HF_1) respectivement. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \eta^{2\rho_2 - \rho_3} f(\tau_1, \eta) \tau_1^{-2\rho_2 + 3\rho_3} &= f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \\ f(\tau_1, \eta) \tau_1^{-2\rho_2 + 3\rho_3} &= \eta^{\rho_3 - 2\rho_2} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \\ f(\tau_1, \eta) &= \eta^{\rho_3 - 2\rho_2} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \tau_1^{2\rho_2 - 3\rho_3} \\ &= \eta^{\rho_3 - 2\rho_2} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{6\rho_2 - 3\rho_3}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\xi_{\pm})^{\rho_2 + \frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1, \xi_{\pm}) \tau_1^{3\rho_3 - 2\rho_2 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} &= (\xi_{\pm})^{\frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1^2, \xi_{\pm}) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \\ (\tau_1 \tau_2)^{\rho_2 + \frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - 2\rho_2 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} &= (\tau_1 \tau_2)^{\frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1^2, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \\ f(\tau_1, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - 2\rho_2 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} &= (\tau_1 \tau_2)^{-\rho_2} f(\tau_1^2, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \\ f(\tau_1, \tau_1 \tau_2) &= (\tau_1 \tau_2)^{-\rho_2} f(\tau_1^2, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{2\rho_2}. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration. \square

Remarque 5.3. On peut remarquer^{5.1} que (5.1) provient de :

$$f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{8\rho_2(F)} f(\tau_1^2, \tau_2^2) \tau_1^{4\rho_2(F)} (\tau_1 \tau_2)^{-6\rho_2(F)}.$$

Corollaire 5.4. *Les relations ci-dessus du théorème 5.1 et du corollaire 5.2 impliquent les équations suivantes, qui sont préservées dans l'image de $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{GT}}$:*

5.1. Voir l'article [NS00] pour plus de détails.

Equation Harmonique :

$$f(\tau_1^2, \tau_2^2) = \tau_2^{-4\rho_2} f(\tau_2^2, \eta)^{-1} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \quad (5.3)$$

Equation Equianharmonique :

$$f(\tau_1^2, \tau_2^2) = \tau_2^{-3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2)^{-1} (\tau_1\tau_2)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} \quad (5.4)$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que, par la deuxième équation ci-dessus, on n'a pas besoin de distinguer les cas $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{6}$. On écrit (GF_1) et (HF_1) en leur définition avec des cobords. On obtient donc :

$$\begin{aligned} f &= \theta(g)^{-1}g \\ f(\tau_1^2, \tau_2^2) &= \theta(g(\tau_1^2, \tau_2^2))^{-1}g(\tau_1^2, \tau_2^2) \\ &= \tau_2^{-4\rho_2} f(\tau_2^2, \eta)^{-1} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2}. \end{aligned}$$

Or comme :

$$f = \begin{cases} y^{-\frac{(\lambda-1)}{2}} \omega(h)^{-1}h & \text{si } \lambda \equiv 1 \pmod{6} \\ y^{-\frac{(\lambda-1)}{2}} \omega(h)^{-1}y^{-1}h & \text{si } \lambda \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$$

on applique la définition à (τ_1^2, τ_2^2) ;

$$f(\tau_1^2, \tau_2^2) = \begin{cases} \tau_2^{-\frac{(\lambda-1)}{2}} \omega(h(\tau_1^2, \tau_2^2))^{-1}h(\tau_1^2, \tau_2^2) & \text{si } \lambda \equiv 1 \pmod{6} \\ \tau_2^{-\frac{(\lambda-1)}{2}} \omega(h(\tau_1^2, \tau_2^2))^{-1}\tau_2^{-1}h(\tau_1^2, \tau_2^2) & \text{si } \lambda \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$$

et comme :

$$\begin{aligned} h(\tau_1^2, \tau_2^2) &= (\xi_{\pm})^{\frac{(\lambda \mp 1 - 6\rho_3)}{4}} f(\tau_1^2, \xi_{\pm}) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda \mp 1)}{2}} \\ h(\tau_1^2, \tau_2^2) &= (\tau_1\tau_2)^{\frac{(\lambda-1-6\rho_3)}{4}} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}}, \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \omega(h(\tau_1^2, \tau_2^2)) &= (\tau_1\tau_2)^{\frac{(-\lambda+1-6\rho_3)}{4}} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{3\rho_3 + \frac{(\lambda-1)}{2}} \\ \omega(h(\tau_1^2, \tau_2^2))^{-1} &= \tau_1^{-\left(3\rho_3 + \frac{(\lambda-1)}{2}\right)} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2)^{-1} (\tau_1\tau_2)^{-\frac{(-\lambda+1-6\rho_3)}{4}} \\ \omega(h(\tau_1^2, \tau_2^2))^{-1}h(\tau_1^2, \tau_2^2) &= \tau_1^{-\left(3\rho_3 + \frac{(\lambda-1)}{2}\right)} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2)^{-1} (\tau_1\tau_2)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} \\ f(\tau_1^2, \tau_2^2) &= \tau_2^{-3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2)^{-1} (\tau_1\tau_2)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Un calcul analogue nous donne le même résultat dans le cas où $\lambda \equiv -1$. On n'a donc pas besoin de distinguer les deux cas. Ceci permet de conclure. \square

Passons maintenant à la configuration de base avec laquelle on démontrera les relations (GF_0) , (GF_1) puis (HF_0) .

5.2. Configuration de base. L'idée principale pour prouver les relations du théorème 5.1 est d'analyser le groupe fondamental d'orbifolds de certains quotients de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ par la symétrie de \mathfrak{S}_3 le tout avec des transformations galoisiennes de certains chaînes qui y apparaissent. On pose :

$$\mathfrak{B} := \{\overline{01}, \overline{10}, \overline{1\infty}, \overline{\infty 1}, \overline{\infty 0}, \overline{0\infty}\} \cup \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\} \cup \{\rho, \rho^{-1}\}$$

où $\rho = e^{\frac{2i\pi}{6}}$. Ici, on note \overline{ab} , pour $a, b \in \{0, 1, \infty\}$, les points tangentiels introduits par Deligne dans [Del89] de la manière suivante :

- Soit $\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\} := \bigcup_{N \geq 1} \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(t^{\frac{1}{N}}\right)\right)$ l'espace (qui est algébriquement fermé) des séries de Puiseux sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ainsi, $\overline{01}$ est défini par le point géométrique *générique* défini comme un voisinage simplement connexe suivant l'axe des réels. Les autres \overline{ab} sont obtenus à partir des permutations $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$.
- $X_t := \mathbb{P}_t^1 - \{0, 1, \infty\}$, où l'on a noté \mathbb{P}_t^1 la droite projective avec une coordonnée fixée ;
- $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$ le groupoïde fondamentale étale correspondant.
- On construit les chemins dans $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$ suivants :
 - q est le chemin de $\frac{1}{2}$ vers ρ suivant l'axe $\text{Re}(t) = \frac{1}{2}$;
 - r est le chemin de 0 vers $\frac{1}{2}$ suivant l'axe des réels ;
 - ε est le chemin de $\overline{01}$ vers $\overline{10}$ suivant une rotation d'un demi-cercle en sens direct.

Le dessin qui suit permet de visualiser ces constructions.

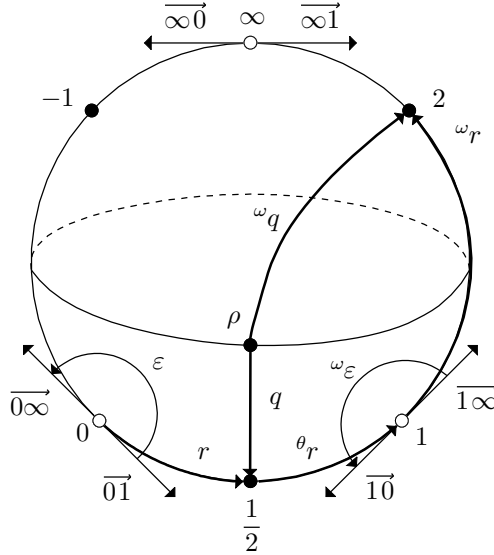


Figure 5.1. Cadre géométrique de la configuration étudiée.

Ainsi, la proposition suivante en découle.

Proposition 5.5. $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ agit naturellement sur $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$.

Convention 5.6. On va noter :

1. $\alpha\beta$ le chemin tracé par α puis par β . La monodromie le long de $\alpha\beta$ sera tracée dans la direction inverse ;
2. ${}^\theta\alpha$, ${}^\omega\alpha$, ${}^{\bar{\omega}}\alpha$ sont les images du chemin α par les permutations : (01), (01 ∞) et (0 ∞ 1) de $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ respectivement ;
3. Pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, on note λ_σ , f_σ , g_σ , h_σ les images de σ par λ , f , g , h respectivement.

Remarque 5.7. Avec ces conventions, on a :

$$\begin{cases} p = r({}^\theta r)^{-1} = (rq)({}^\omega r q)^{-1}({}^\omega \varepsilon) \\ x = \varepsilon({}^\theta \omega \varepsilon) \\ y = p({}^\theta \varepsilon)({}^\omega \varepsilon)p^{-1} \end{cases} \quad (5.5)$$

Ensuite, pour chaque point base rationnel b (b différent de ρ ou ρ^{-1}), $G_{\mathbb{Q}}$ est isomorphe à $\pi_1(X_t, b)$. $G_{\mathbb{Q}}$ agit sur ses points par conjugaison complexe. En particulier, $G_{\mathbb{Q}(\rho)}$ agit sur tous les chemins de $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$. Ainsi, pour avoir une action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$ on peut introduire l'action de la conjugaison complexe $\iota \in G_{\mathbb{Q}}$ sur q par $\iota(q) = {}^\theta q$ à partir de laquelle les autres actions sont déterminées de la seule manière qui est bien définie. On rappelle que, pour $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, l'interprétation de f_σ , g_σ , h_σ est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= f_\sigma(x, y)^{-1}p \\ \sigma(r) &= g_\sigma(x, y)^{-1}r \\ \sigma(rq) &= \begin{cases} h_\sigma(x, y)^{-1}rq & \text{si } \lambda_\sigma \equiv 1 \pmod{6} \\ h_\sigma(x, y)^{-1}r({}^\theta q) & \text{si } \lambda_\sigma \equiv -1 \pmod{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ces relations sont bien définies, et démontrées dans [LS97]. On va considérer, f , g et h dans certains groupoïdes fondamentaux qu'on introduit dans la suite, et dont on explique leur cohérence. On remarque que, comme λ_σ est le caractère cyclotomique, alors :

$$\lambda_\sigma \equiv 1 \iff \sigma(\rho) = \rho, \quad \text{avec } \rho = e^{\frac{2i\pi}{6}}.$$

On peut aussi remarquer que f_σ , g_σ , h_σ sont à valeurs dans le groupe fondamental géométrique $\pi_1(X_t, \overline{01}) := \pi_1(X_t \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{01}) = \hat{\mathbb{F}}_2 = \langle x, y \rangle$. Si on note B_θ le segment réel $[0, 1]$ et B_ω le demi-cercle supérieur de $X_t(\mathbb{C}) - \mathbb{R}$, alors on a l'homomorphisme de groupoïdes :

$$\pi_1(X_t, \mathfrak{B} \cap B_*) \longrightarrow \pi_1(X_t, B_\alpha)$$

où $* = \theta, \omega$, dont la restriction à $\pi_1(X_t, \overline{01})$ induit un isomorphisme de groupes. Ainsi $\theta, \omega \in \hat{\mathbb{F}}_2$ induisent des automorphismes de $\pi_1(X_t, B_\theta)$ et $\pi_1(X_t, B_\omega)$ en posant :

$$\begin{aligned} \pi_1(X_t, \mathfrak{B} \cap B_*) &\longrightarrow \pi_1(X_t, B_*) \\ \alpha &\longmapsto * \alpha \end{aligned}$$

où $*$ = θ, ω . Grâce à cette remarque et à l'égalité :

$$p = r^{(\theta r)^{-1}} = (r q)^{(\omega r q)^{-1}(\omega \varepsilon)}$$

on peut alors conclure que $f_\sigma, g_\sigma, h_\sigma$ satisfont eux aussi la relation 4.4 par rapport aux automorphismes $\theta, \omega \in \hat{\mathbb{F}}_2$, $\pi_1(X_t, B_\theta)$ et $\pi_1(X_t, B_\omega)$ respectivement.

Proposition 5.8. Soit $[\hat{\mathbb{F}}_2, \hat{\mathbb{F}}_2]$ le sous-groupe des commutateurs de :

$$\hat{\mathbb{F}}_2 = \bar{\pi}_1(X_t, \overline{01}).$$

Alors, pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ on trouve les congruences suivantes modulo $[\hat{\mathbb{F}}_2, \hat{\mathbb{F}}_2]$:

$$\begin{aligned} f_\sigma(x, y) &\equiv 1 \\ g_\sigma(x, y) &\equiv (xy)^{\rho_2(\sigma)} \\ h_\sigma(x, y) &\equiv \begin{cases} x^{-\frac{(\lambda_\sigma-1)}{6}} y^{\frac{(\lambda_\sigma-1)}{6}} & \text{si } \lambda_\sigma \equiv 1 \pmod{6} \\ x^{-\frac{(\lambda_\sigma+1)}{6}} y^{\frac{(\lambda_\sigma+1)}{6}} & \text{si } \lambda_\sigma \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}. \end{aligned}$$

Remarque 5.9. Ces relations seront particulièrement utiles au moment où on projettera certaines relations par l'homomorphisme d'abélianisation $\hat{B}_3 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ qui permettra de déterminer certaines constantes par rapport aux 1-cocycles de Kummer :

$$\rho_a: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}.$$

5.3. Recouvrement de Legendre-Jacobi et démonstrations. On va considérer le groupe fondamental d'orbifolds du quotient de $\mathbb{P}_t^1 - \{0, 1, \infty\}$ par la symétrie de \mathfrak{S}_3 . On introduit maintenant une nouvelle coordonnée notée s pour un tel quotient, donnée par :

$$s = \phi(t) = \frac{27}{4} \frac{t^2(t-1)^2}{(t^2-t+1)^3},$$

où les points de ramification sont normalisés tel que :

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(0) &= \{0, 1, \infty\} \\ \phi^{-1}(1) &= \left\{ \frac{1}{2}, -1, 2 \right\} \\ \phi^{-1}(\infty) &= \{\rho, \rho^{-1}\}. \end{aligned}$$

Ainsi, on définit :

- $X_s := \mathbb{P}_s^1 - \{0, 1, \infty\}$;
- $\phi: \mathbb{P}_t^1 \longrightarrow \mathbb{P}_s^1$ qu'on appelle **Recouvrement de Legendre-Jacobi**.

On introduit maintenant le sous-recouvrement suivant :

- $X_u := \mathbb{P}_u^1 - \{0, 1, \infty\}$, où \mathbb{P}_u est la **ligne harmonique** intermédiaire, entre \mathbb{P}_t^1 et \mathbb{P}_s^1 donnée par :

$$u = 4t(1-t), \quad \text{et} \quad s = \frac{27u^2}{(4-u)^3};$$

→ Le recouvrement $\psi: \mathbb{P}_t^1 \longrightarrow \mathbb{P}_u^1$ est ramifié seulement en $t = 0, \frac{1}{2}$ sur $u = 0, 1$ respectivement.

Notation. *On note :*

- $\overline{01}_s, r_s$ et ainsi de suite, les objets qui sont définis dans la ligne X_s ;
- $\overline{01}_t = \overline{01}, r_t = r$ les objets originaux, définis sur X_t .

Enfin, introduisons les groupoïdes fondamentaux correspondants :

- $\pi_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s)$;
- $\pi_1(X_u, e_1|2)$.

On va donc considérer notre groupoïde initial $\pi_1(X_t, \mathfrak{B})$ premièrement comme un sous-groupoïde de $\pi_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s)$ qui classe les recouvrements étales de X_s avec des indices de ramification sur $s = 1, \infty$ divisant 2, 3 respectivement. Deuxièmement, comme un sous-groupoïde de $\pi_1(X_u, e_1|2)$ qui classe les recouvrements étales de X_u avec des indices de ramification sur $u = 1$ divisant 2.

On va à présent commencer la démonstration du théorème 5.1 et démontrer les relations (GF₀), (GF₁) puis (HF₀).

5.3.1. Démonstration de (GF₀). On commence par transformer par ϕ les relations :

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= f_\sigma(x, y)^{-1}p \\ \sigma(r) &= g_\sigma(x, y)^{-1}r \\ \sigma(rq) &= \begin{cases} h_\sigma(x, y)^{-1}rq & \text{si } \lambda_\sigma \equiv 1 \pmod{6} \\ h_\sigma(x, y)^{-1}r^{(\theta q)} & \text{si } \lambda_\sigma \equiv -1 \pmod{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Le développement de Taylor en t et $t - \frac{1}{2}$ nous donne les termes principaux suivants :

$$s \sim \frac{27}{4}t^2, \quad (1-s) \sim \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

On doit donc étudier, en vue des effets de l'action galoisienne, les relations :

$$\phi(\overline{01}_t) = \frac{4}{27}\overline{01}_s, \quad \phi\left(\left(\frac{1}{2}\right)_t\right) = \frac{1}{12}\overline{10}_s,$$

où les scalaires devant les points tangentiels doivent être compris de la façon suivante.

Remarque 5.10. $\kappa\overline{01}_s$ est un point tangentiel de X_s valués dans l'espace des séries de Puiseux $\bar{\mathbb{Q}}\{\{\kappa s\}\}$.

Posons δ_1, δ_2 les chemins canoniques, le long de l'axe des réels, de la manière suivante :

$$\frac{4}{27}\overline{01}_s \xrightarrow{\delta_1} \overline{01}_s \text{ et } \frac{1}{12}\overline{10}_s \xrightarrow{\delta_2} \overline{10}_s.$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sigma(r_t) = g(x_t, y_t)^{-1} r_t \\ \sigma(p_s) = f(x_s, y_s)^{-1} p_s \\ \sigma(\delta_1) = \delta_1 x_s^{2\rho_2(\sigma) - 3\rho_3(\sigma)} \\ \sigma(\delta_2) = \delta_2 (\theta x_s)^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} \end{cases}$$

Les deux premières relations sont évidentes d'après l'explication ci-dessus. Pour la troisième relation, on remarque que lorsqu'on prends $a = \frac{4}{27}$ on a :

$$\begin{aligned} x^{\rho_a(\sigma)} \left((at)^{\frac{1}{n}} \right) &= a^{\frac{1}{n}} x^{\rho_a(\sigma)} t^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{1}{n}} \zeta^{\rho_a(\sigma)} t^{\frac{1}{n}} \\ \sigma(\delta) &= \delta x^{\rho_a(\sigma)} \end{aligned}$$

où on a noté $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Ainsi,

$$\sigma \left(\frac{4}{27} t \right)^{\frac{1}{n}} = \sigma \left(\frac{4}{27} \right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}} = \frac{\sigma \left(2^{\frac{1}{n}} \right)^2}{\sigma \left(3^{\frac{1}{n}} \right)^3}.$$

Ensuite, on compose ces quatre relations suivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{27} \overline{01}_s & \xrightarrow{\delta_1} & \overline{01}_s \\ \phi(r_t) \downarrow & & \downarrow p_s \\ \frac{1}{4} \overline{10}_s & \xrightarrow{\delta_2} & \overline{10}_s \end{array}$$

Ceci nous donne la relation suivante dans $\bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s)$:

$$\delta_1^{-1} g_\sigma(\phi(x_t), \varphi(y_t)) \delta_1 = y_s^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} f_\sigma(x_s, y_s) x_s^{-2\rho_2(\sigma) + 3\rho_3(\sigma)} \quad (5.6)$$

On remarque maintenant que :

$$\bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s) = \langle x_s, y_s, z_s ; x_s y_s z_s = y_s^2 = z_s^3 = 1 \rangle.$$

On peut donc décrire ϕ par :

$$\begin{cases} \phi(x_t) = x_s^2 \\ \phi(y_t) = y_s^{-1} x_s^2 y_s \end{cases}$$

Or, on a une suite exacte de groupes profinis :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle \eta^2 \rangle & \longrightarrow & \hat{B}_3 & \longrightarrow & \bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s) \longrightarrow 1 \\ & & & & \tau_1 & \longmapsto & x_s \\ & & & & \tau_2 & \longmapsto & y_s x_s y_s^{-1} \\ & & & & \eta = \tau_1 \tau_2 \tau_1 & \longmapsto & y_s \end{array}$$

où la dernière flèche $\hat{B}_3 \rightarrow \bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s)$ est une surjection, on peut donc *tirer en arrière*^{5.2} la relation 5.6. Ainsi, il existe une constante $c \in \hat{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) = \eta^{2c} \eta^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} f_\sigma(\tau_1, \eta)^{-2\rho_2(\sigma) + 3\rho_3(\sigma)}$$

Or, en appliquant l'homomorphisme d'abélianisation :

$$\begin{aligned} \hat{B}_3 &\longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} = \langle 1 \rangle \\ \tau_1, \tau_2 &\longmapsto 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

on a :

$$\begin{aligned} \eta^{4\rho_2(\sigma)} &= \eta^{2c} \\ c &= 2\rho_2(\sigma) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) &= \eta^{4\rho_2(\sigma)} \eta^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} f_\sigma(\tau_1, \eta)^{-2\rho_2(\sigma) + 3\rho_3(\sigma)} \\ &= \eta^{2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} f_\sigma(\tau_1, \eta)^{-2\rho_2(\sigma) + 3\rho_3(\sigma)} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$g(\tau_1^2, \tau_2^2) = \eta^{2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} f(\tau_1, \eta)^{-2\rho_2(\sigma) + 3\rho_3(\sigma)}$$

Ceci permet de conclure. □

Passons maintenant à la démonstration de (GF₁).

5.3.2. Démonstration de (GF₁). On commence par transformer par ψ les relations déjà mentionnées, le développement de Taylor en $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$ nous donne le terme principal est :

$$u \sim 4t, \quad (1-u) \sim 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

On doit donc étudier, en vue des effets de l'action galoisienne, les relations :

$$\psi(\overline{01}_t) = \frac{1}{4} \overline{01}_u, \quad \psi\left(\left(\frac{1}{2}\right)_t\right) = \frac{1}{4} \overline{10}_u.$$

Posons δ_1, δ_2 les chemins canoniques, c'est-à-dire le long de l'axe des réels, $\frac{1}{4} \overline{01}_u \xrightarrow{\delta_1} \overline{01}_u$ et $\frac{1}{2} \overline{10}_u \xrightarrow{\delta_2} \overline{10}_u$. On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma(r_t) = g(x_t, y_t)^{-1} r_t \\ \sigma(p_u) = f(x_u, y_u)^{-1} p_u \\ \sigma(\delta_1) = \delta_1 x_u^{\rho_2(\sigma) - 2\rho_3(\sigma)} \\ \sigma(\delta_2) = \delta_2 ({}^\theta x_u)^{-\rho_2(\sigma) - 2\rho_3(\sigma)} \end{cases}$$

5.2. *Pull-back* en anglais.

où x_u, y_u sont des lacets standards autour des points fixés $u=0, 1$ respectivement. En particulier, on a $y_u^2=1$. Ensuite on compose ces quatre relations suivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{2} \overrightarrow{01}_u & \xrightarrow{\delta_1} & \overrightarrow{01}_u \\ \varphi(r_t) \downarrow & & \downarrow p_u \\ \frac{1}{4} \overrightarrow{10}_u & \xrightarrow{\delta_2} & \overrightarrow{10}_u \end{array}$$

Ceci nous donne la relation suivante dans $\pi_1(X_u, e_1|2)$:

$$\delta_1^{-1} g_\sigma(\psi(x_t), \psi(y_t)) \delta_1 = f_\sigma(x_u, y_u) x_u^{2\rho_2(\sigma)}$$

Considérons maintenant $\bar{\pi}_1(X_t, \overrightarrow{01}_t)$ et $\bar{\pi}_1(X_u, e_1|2, \overrightarrow{01}_u)$ comme étant des sous-groupoïdes de $\bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overrightarrow{01}_s)$. Ainsi, comme :

$$\begin{cases} \delta_1^{-1} \psi(x_t) \delta_1 = x_u \\ \delta_1^{-1} \psi(y_t) \delta_1 = y_u x_u y_u^{-1} \end{cases}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \delta_1^{-1} g_\sigma(\psi(x_t), \psi(y_t)) \delta_1 &= f_\sigma(x_u, y_u) x_u^{2\rho_2(\sigma)} \\ g_\sigma(x_u, y_u x_u y_u^{-1}) &= f_\sigma(x_u, y_u) x_u^{2\rho_2(\sigma)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Or, on a une suite exacte de groupes profinis :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle \eta^2 \rangle & \longrightarrow & \hat{B}_3 & \longrightarrow & \bar{\pi}_1(X_u, e_1|2, \overrightarrow{01}_u) \longrightarrow 1, \\ & & & & \tau_1^2 & \longmapsto & x_u \\ & & & & \eta = \tau_1 \tau_2 \tau_1 & \longmapsto & y_u \end{array}$$

où la dernière flèche $\hat{B}_3 \longrightarrow \bar{\pi}_1(X_u, e_1|2, \overrightarrow{01}_u)$ est une surjection, on peut donc *tirer en arrière* la relation 5.8. Plus précisément, le tiré en arrière de $\bar{\pi}_1(X_u, e_1|2, \overrightarrow{01}_u)$ dans \hat{B}_3 correspond au sous-groupe $\widehat{A}_3^2 = \langle \tau_1^2, \eta; \eta^2 \tau_1^2 = \tau_1^2 \eta^2 \rangle$. Ainsi, il existe $c \in \hat{\mathbb{Z}}$ tel que :

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) = \eta^{2c} f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)}$$

Or, en appliquant l'homomorphisme d'abélianisation donnée par (5.7), on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \eta^{2c} \eta^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} \\ c &= 0 \end{aligned}$$

donc,

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) = f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)}.$$

Ceci permet de conclure. □

Passons maintenant à la démonstration de (HF₀).

5.3.3. Démonstration de (HF₀). Supposons tout d'abord que $\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\rho)}$. On a :

$$s = \phi(t) = \frac{27}{4} \frac{t^2(t-1)^2}{(t^2-t+1)^3}$$

$$\frac{1}{1-s} = \frac{4(t^2-t+1)^3}{(t+1)^2(t-2)^2(2t-1)^2}$$

On commence par transformer par ϕ , défini auparavant, les relations déjà mentionnées, le développement de Taylor en $t - \rho$ nous donne le terme principal suivant :

$$\frac{1}{1-s} \sim \frac{4}{9} \sqrt{-3} (t - \rho)^3.$$

Comme les indices de ramification sur $s=1$ sont restreints à ceux divisant 3, alors le coefficient principal n'a de sens que si on le considère modulo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})^{\times 3}$. Comme $\bar{\mathbb{Q}}\left\{\left\{\frac{1}{1-s}\right\}\right\}$ définit le point base tangentiel $\overline{\infty 0}_s$ alors on peut écrire de la même manière qu'on l'a fait auparavant :

$$\phi(\rho_t) = \frac{9}{4\sqrt{-3}} \overline{\infty 0}_s \sim \frac{1}{4} \overline{\infty 0}_s$$

$$\phi(\overline{01}_t) = \frac{4}{27} \overline{01}_s,$$

Posons δ_1, δ_2 les chemins canoniques, c'est-à-dire le long de l'axe des réels, $\frac{1}{4} \overline{01}_u \xrightarrow{\delta_1} \overline{01}_u$ et $\frac{1}{2} \overline{10}_u \xrightarrow{\delta_2} \overline{10}_u$. On a donc les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \sigma(r_t) = g(x_t, y_t)^{-1} r_t \\ \sigma(p_s) = f(x_s, y_s)^{-1} p_s \\ \sigma(\delta_1) = \delta_1 x_s^{2\rho_2(\sigma) - 3\rho_3(\sigma)} \\ \sigma(\delta_2) = \delta_2 (\bar{w}x_s)^{-2\rho_2(\sigma) - \rho_3(\sigma)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma(\bar{w}^\theta p_s) = f_{\sigma}(\bar{w}^\theta x_s, \bar{w}^\theta y_s)^{-1} (\bar{w}^\theta p_s) \\ \sigma(\varepsilon_s^{-1}) = \varepsilon_s^{-1} x_s^{-\frac{\lambda_\sigma - 1}{2}} \\ \sigma(r_t q_t) = h_{\sigma}(x_t, y_t)^{-1} r_t q_t \end{cases} \quad (5.9)$$

On doit maintenant différencier les deux cas $\sigma(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}$ et $\sigma(\sqrt{-3}) = -\sqrt{-3}$.

CAS $\sigma(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}$: On compose ces sept relations de (5.9) suivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{27} \overline{01}_s & \xrightarrow{\delta_1} & \overline{01}_s \\ \downarrow \phi(r_t q_t) & & \downarrow p_s \\ \frac{1}{4} \overline{\infty 0}_s & \xrightarrow{\delta_2} & \overline{\infty 0}_s \end{array}$$

On a, d'après l'équation $\delta_1^{-1} \phi(r_t q_t) \delta_2 = \varepsilon_s(\bar{w}^\theta p_s)$, le résultat suivant dans $\bar{\pi}_1(X_s, e_1|2, e_\infty|3, \overline{01}_s)$:

$$\delta_1^{-1} h_\sigma(\phi(x_t), \varphi(y_t)) \delta_1 = z_s^{-2\rho_2(\sigma)} f_\sigma(x_s, z_s) x_s^{-2\rho_2(\sigma)+3\rho_3(\sigma)-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}} \quad (5.10)$$

où $z_s := (x_s y_s)^{-1}$. Or, on a une suite exacte de groupes profinis :

$$1 \longrightarrow \langle \eta^2 \rangle \longrightarrow \hat{B}_3 \longrightarrow \bar{\pi}_1(X_s, e_1 | 2, e_\infty | 3, \overline{01}_s) \longrightarrow 1,$$

et on peut tirer en arrière la relation 5.10. Ainsi, il existe une constante $c \in \hat{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$h_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) = (\tau_1 \tau_2)^{3c-2\rho_2(\sigma)} f_\sigma(\tau_1, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3(\sigma)-2\rho_2(\sigma)-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}}$$

Or, en appliquant l'homomorphisme d'abélianisation donnée par (5.7), on a :

$$3c = 3\rho_2(\sigma) + \frac{(\lambda_\sigma - 1 - 6\rho_3)}{4}.$$

Donc on trouve (HF₀) dans le cas $\sigma(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}$:

$$h(\tau_1^2, \tau_2^2) = (\tau_1 \tau_2)^{\rho_2 + \frac{(\lambda-1-6\rho_3)}{4}} f(\tau_1, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3-2\rho_2-\frac{(\lambda-1)}{2}}.$$

CAS $\sigma(\sqrt{-3}) = -\sqrt{-3}$. D'après l'équation:

$$\delta_1^{-1} \phi(r_t q_t) \delta_2 = \varepsilon_s(\bar{\omega}^\theta p_s)$$

on a d'une part :

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_s(\bar{\omega}^\theta p_s)) &= \sigma((\bar{\omega}^\theta \varepsilon_s^{-1})(\bar{\omega}^\theta p_s)) \\ &= (\bar{\omega}^\theta \varepsilon_s^{-1}) x_s^{-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}} (\bar{\omega}^\theta p_s) f_\sigma(\bar{\omega} x_s, \bar{\omega} y_s) \\ &= x_s^{-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}} \varepsilon_s(\bar{\omega}^\theta p_s) f_\sigma(\bar{\omega} x_s, \bar{\omega} y_s), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma(\delta_1^{-1} \phi(r_t q_t) \delta_2) &= \sigma(\delta_1^{-1} \phi(r_t(\theta q_t)) \delta_2) \\ &= x_s^{-2\rho_2(\sigma)+3\rho_3(\sigma)} \delta_1^{-1} h_\sigma(\phi(x_t), \varphi(y_t))^{-1} \phi(r_t(\theta q_t)) \delta_2 (\bar{\omega}^\theta x_s)^{-2\rho_2(\sigma)} \\ &= x_s^{-2\rho_2(\sigma)+3\rho_3(\sigma)} \delta_1^{-1} h_\sigma(\phi(x_t), \varphi(y_t))^{-1} x_s^{-1} \varepsilon_s(\bar{\omega}^\theta p_s) \delta_2 (\bar{\omega}^\theta x_s)^{-2\rho_2(\sigma)}. \end{aligned}$$

On remarque que $f_\sigma = f_{\sigma\iota}$ et $h_\sigma = h_{\sigma\iota}$ donc si on réécrit $\sigma\iota$ comme σ , alors l'élément σ appartient $G_{\mathbb{Q}}$ et n'est pas dans $G_{\mathbb{Q}(\rho)}$. Ainsi on obtient dans $\bar{\pi}_1(X_s, e_1 | 2, e_\infty | 3, \overline{01}_s)$:

$$\delta_1^{-1} h_\sigma(\phi(x_t), \varphi(y_t)) \delta_1 = x_s^{-1} z_s^{-2\rho_2(\sigma)} f_\sigma(x_s, z_s) x_s^{-2\rho_2(\sigma)+3\rho_3(\sigma)-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}} \quad (5.11)$$

où $z_s := (x_s y_s)^{-1}$. Avant de tirer en arrière, on remarque que $\lambda(\sigma) = -\lambda_{\sigma\iota}$ lorsque $\rho_2(\sigma) = \rho_2(\sigma\iota)$ et $\rho_3(\sigma) = \rho_3(\sigma\iota)$. Ainsi par :

$$1 \longrightarrow \langle \eta^2 \rangle \longrightarrow \hat{B}_3 \longrightarrow \bar{\pi}_1(X_s, e_1 | 2, e_\infty | 3, \overline{01}_s) \longrightarrow 1,$$

on obtient qu'il existe une constante $c \in \hat{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$h_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) = \tau_1^{-1} (\tau_1 \tau_2)^{3c-2\rho_2(\sigma)} f_\sigma(\tau_1, \tau_1 \tau_2) \tau_1^{3\rho_3(\sigma)-2\rho_2(\sigma)-\frac{\lambda_\sigma-1}{2}}.$$

Or, en appliquant l'homomorphisme d'abélianisation donnée par (5.7), on a :

$$3c = 3\rho_2(\sigma) + \frac{(\lambda_\sigma + 1 - 6\rho_3(\sigma))}{4}.$$

Donc on trouve (HF_0) dans le cas $\sigma(\sqrt{-3}) = -\sqrt{-3}$:

$$h(\tau_1^2, \tau_2^2) = (\tau_2\tau_1)^{\rho_2 + \frac{(\lambda+1-6\rho_3)}{4}} f(\tau_1, \tau_2\tau_1)\tau_1^{3\rho_3 - 2\rho_2 - \frac{(\lambda+1)}{2}}.$$

Ce qui conclut la preuve de (HF_0) . □

Proposition 5.11. *On a les équivalences de équations :*

$$(\text{I}') \stackrel{1.}{\iff} (\text{GF}_1) \text{ et } (\text{II}') \stackrel{2.}{\iff} (\text{HF}_1).$$

Démonstration. Les conditions suffisantes ont été prouvées dans les démonstrations des corollaires 5.2 et 5.4. Prouvons les conditions nécessaires, faisons-le par exemple pour l'équivalence 1. :

Si $(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{\mathbb{F}}_2'$ satisfont (I') , alors on a dans \hat{B}_3 la relation :

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) \left(f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1} = g_\sigma(\tau_2^2, \tau_1^2) \left(f_\sigma(\tau_2^2, \eta) \tau_2^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1}.$$

On peut remarquer que chaque côté de cette équation est défini dans la partie pure de \hat{B}_3 , notée $\hat{P}_3 = \langle \tau_1^2, \tau_2^2, \eta^2 \rangle$, dont le centre est donné par $\langle \eta^2 \rangle$. On pose $\theta \in \text{Aut}(\hat{B}_3)$ qui échange τ_1 et τ_2 . Alors la relation :

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) \left(f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1} = g_\sigma(\tau_2^2, \tau_1^2) \left(f_\sigma(\tau_2^2, \eta) \tau_2^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1}$$

montre que $g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) \left(f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1}$ est fixé par θ . On considère maintenant la surjection :

$$\begin{aligned} \hat{P}_3 &\longrightarrow \hat{\mathbb{F}}_2 \\ \tau_1^2 &\longmapsto x \\ \tau_2^2 &\longmapsto y \end{aligned}$$

dont le noyau est $\langle \eta^2 \rangle$ qui est le centre de \hat{P}_3 . Ainsi, l'automorphisme de $\hat{\mathbb{F}}_2$ induit par θ échange x et y , son sous-groupe fixe est donc trivial^{5.3}. Donc :

$$g_\sigma(\tau_1^2, \tau_2^2) \left(f_\sigma(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2(\sigma)} \right)^{-1} \in \langle \eta^2 \rangle,$$

d'où :

$$g(\tau_1^2, \tau_2^2) = f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2}.$$

Ceci permet de conclure. □

5.3. D'après un résultat de Serre dans [Ser94].

6. CONCLUSIONS

On a ainsi caractérisé $G_{\mathbb{Q}}$ en étudiant son image dans $\widehat{\text{GT}}$, et celle-ci nous livre donc 5 équations :

$$f(\tau_1^2, \tau_2^2) = \tau_2^{-4\rho_2} f(\tau_2^2, \eta)^{-1} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{4\rho_2} \quad (6.1)$$

$$f(\tau_1^2, \tau_2^2) = \tau_2^{-3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_2)^{-1} (\tau_1\tau_2)^{\frac{(\lambda-1)}{2}} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{-3\rho_3 - \frac{(\lambda-1)}{2}} \quad (6.2)$$

$$\tilde{f}(x_{12}, x_{23}) = \begin{cases} \rho(k)^{-1} k & \text{si } \lambda \equiv \pm 1 \pmod{5} \\ \rho(k)^{-1} x_{34} x_{51}^{-1} x_{45} x_{12}^{-1} k & \text{si } \lambda \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$f(\tau_1, \tau_1\tau_2) = (\tau_1\tau_2)^{-\rho_2} f(\tau_1^2, \tau_1\tau_2) \tau_1^{2\rho_2} \quad (6.4)$$

$$f(\tau_1, \eta) = \eta^{\rho_3 - 2\rho_2} f(\tau_1^2, \eta) \tau_1^{6\rho_2 - 3\rho_3} \quad (6.5)$$

et on déduit les deux premiers axiomes dans la définitions de la version profinie du groupe de Grothendieck-Teichmüller à partir de 5.2 et 6.2.

Remarque 6.1. Dans ce mémoire on n'a pas étudié l'équation 6.3 qui est satisfaite dans $\hat{B}_4^{6.1}$. On doit pour cela étudier la compactification stable $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$. On peut établir ce résultat qui demande une quantité plus importante de travail à partir de [LS97] et de [Iha94].

Remerciements. Je remercie vivement PIERRE LOCHAK et LEILA SCHNEPS pour m'avoir guidé dans ce travail dont la difficulté et la quantité de connaissances requises dépassait celles d'un étudiant de M1. Je remercie aussi le jury de ma soutenance de mémoire et PIERRE SCHAPIRA pour ses conseils et explications en Théorie des Catégories. Je remercie de nouveau PIERRE LOCHAK pour son amitié et les très passionnants dialogues de caractère philosophique qui ont été à plus d'une occasion décisifs pour la composition de ce mémoire.

6.1. C'est à dire dans le deuxième « étage » dans la définition de $\widehat{\text{GT}}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bel79] G. V. Belyi. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43:267–276, 1979.
- [BFL99] X. Buff, J. Fehrenbach et P. Lochak. Eléments de géométrie des espaces de modules des courbes. Dans *Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, volume 7 de *Panoramas et synthèses*. Société mathématique de France, 1999.
- [Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1982.
- [Col11] Benjamin Collas. *Groupes de Grothendieck-Teichmuller et inertie champetre des espaces de modules de courbes de genre 0 et 1*. PhD thesis, Paris 6 University, 2011.
- [Del89] Pierre Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. Dans *Galois groupe over Q* , volume 16 de *MSRI publications*, pages 72–297. Springer-Verlag, 1989.
- [Dri91] V. G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group that is closely connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningrad Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [Gro97] Alexander Grothendieck. Esquisse d’un programme (manuscrit de 1984. Dans Leila Schneps et Pierre Lochak, éditeurs, *Geometric Galois Actions*, volume 242. Cambridge University Press, 1997.
- [Iha94] Yasutaka Ihara. On the embedding of $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{\text{GT}}$. Dans Leila Schneps, éditeur, *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, volume 200. Cambridge University Press, 1994.
- [Lan98] Serge Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1998.
- [LS94] Pierre Lochak et Leila Schneps. The Grothendieck-Teichmuller group and automorphism of braid groups. Dans Leila Schneps, éditeur, *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, volume 200. Cambridge University Press, 1994.
- [LS97] Pierre Lochak et Leila Schneps. A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmuller group. *Inventiones Math.*, 127:571–600, 1997.
- [Nak98] Hiroaki Nakamura. Galois rigidity of pro- l pure braid groups of algebraic curves. *Transactions of the American Math. Soc.*, 350:1079–1102, 1998.
- [NS00] H. Nakamura et L. Schneps. On a subgroup of the Grothendieck-Teichmuller group acting on the tower of profinite Teichmuller modular groups. *Intent. Math.*, 141:503–560, 2000.
- [NT03] Hiroaki Nakamura et Hiroshi Tsunogai. Harmonic and Equiharmonic equations in the Grothendieck-Teichmuller group. *Forum Math.*, 15:877–892, 2003.
- [Sch99] Leila Schneps. Groupoides Fondamentaux des Espaces de Modules en Genre 0 et Catégories Tensorielles Tressées. Dans *Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, volume 7 de *Panoramas et synthèses*. Société mathématique de France, 1999.
- [Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1994.