Lección n°1: La ecuación de ondas como punto de partida UCE, otoño 2014

Introducción

El objetivo principal de este curso es mostrar, por medio de ejemplos concretos, la importancia del análisis armónico y sus interconecciones con otras ramas de las matemáticas. Veremos en particular cómo el análisis armonico permite estudiar herramientas que son fundamentales en el análisis funcional, en las ecuaciones en derivadas parciales y en algunas aplicaciones.

1. La ecuación de ondas

Un problema importante en mecánica y en física es comprender el comportamiento de cuerdas vibrantes o más generalmente de objetos que tienen un movimiento ondulatorio. La primera modelización de este tipo de fenómenos fue dada por Jean le Rond d'Alembert en 1747 por medio de una ecuación en derivadas parciales que ahora se conoce como la *ecuación de ondas*. En términos modernos esta ecuación se escribe de la siguiente forma:

Definición 1 (Ecuación de ondas) *Sean u_0 y u_1 dos funciones definidas sobre $\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{R}$ tales que $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Si f es una función definida sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{R}$ y si se tiene $f \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ entonces la ecuación de ondas está dada por la siguiente ecuación en derivadas parciales:*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

En este marco, esta ecuación admite una única solución $u(t,x)$ que pertenece al espacio $\mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)$.

Hay varias maneras de resolver esta ecuación de ondas. Aquí utilizaremos la *transformada de Fourier* que es una herramienta fundamental que permite intercambiar los operadores derivadas por la multiplicación por polinomios.

Definición 2 (Transformada de Fourier) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Definimos su transformada de Fourier $\widehat{f}$ por medio de la expresión:*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

Ejemplo: en una dimensión $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, entonces $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}$.

Ejercicio: calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ y obtener $\widehat{f}(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$.

Proposición 1 (Una Propiedad básica) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y "suficientemente regular a soporte compacto". Entonces se tienen las relaciones:*

- $\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$
- *en particular se tiene* $\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)$

Volvamos a la ecuación de onda (1). Si tomamos la transformada de Fourier con respecto a la variable x a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned}\left[\partial_t^2 u - \Delta u\right]^{\wedge} &= \widehat{f} \\ \Longleftrightarrow \partial_t^2 \widehat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \widehat{u}(t,\xi) &= \widehat{f}(t,\xi)\end{aligned}$$

si fijamos la variable ξ y si notamos $U_\xi(t) = \widehat{u}(t,\xi)$ y $F_\xi(t) = \widehat{f}(t,\xi)$ se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$U_\xi''(t) + |\xi|^2 U_\xi(t) = F_\xi(t)$$

$\Longrightarrow$ de una ecuación en derivadas parciales hemos obtenido una ecuación diferencial de segundo orden que es fácil resolver. En efecto, gracias a los datos iniciales $U_\xi(0) = \widehat{u_0}(\xi)$ y $U_\xi'(0) = \widehat{u_1}(\xi)$ dados en (1) se tiene

$$U_\xi(t) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(t|\xi|) + \widehat{u_1}(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} + \int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|} F_\xi(s) ds$$

En este punto, podemos aplicar la transformada de Fourier *inversa*

> **Definición 3 (Transformada de Fourier inversa)** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es una función integrable, entonces se tiene la fórmula de inversión de Fourier:*
>
> $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

Con esta fórmula podemos recuperar las funciones a partir de sus transformadas de Fourier.

Aplicando esta transformación inversa obtenemos la solución de la ecuación de ondas en dimensión 3. Observando que $\partial_t\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right) = \cos(t|\xi|)$ y adoptando la notación $\widehat{S(t)f}(\xi) = f(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$ podemos escribir

$$u(t,x) = \partial_t\big(S(t)u_0(x)\big) + S(t)u_1(x) + \int_0^t S(t-s)f(s,x)ds$$

que es la solución de la ecuación de ondas (1).

Qué ha sucedido aquí?

1) Partimos de una ecuación en derivadas parciales

2) Aplicamos la Transformada de Fourier a esta ecuación (suponiendo que tenemos el derecho de usarla)

3) Utilizamos las propiedades de la Transformada de Fourier

4) Obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden simple de resolver

5) Resolvemos esta ecuación diferencial de segundo orden y obtenemos una solución

6) Aplicamos la Transformada de Fourier *inversa* a la solución obtenida

7) Si todo sale bien (?) hemos resuelto el problema dado por esta ecuación en derivadas parciales.

2. Un poco de historia

Empecemos con las *Series de Fourier* que consisten en las dos fórmulas siguientes para una función f real:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e^{inx} \tag{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-inx} dx \tag{3}$$

Hay dos formas de ver estas fórmulas.

- Podemos tomar como punto de partida una serie trigonométrica convergente y designar por $f(x)$ su suma. La pregunta es entonces qué tipo de funciones se obtienen de esta manera? Si se tiene esta función, los coeficientes c_n están bien definidos? Es posible obtenerlos por medio de la expresión (3)?

  El primero en interesarse en este tipo de preguntas fue B. Riemann (1826-1866) y fue seguido por G. Cantor (1845-1918), A. Denjoy (1884-1974) y H. Lebesgue (1875-1941). Las integrales de Riemann, de Lebesgue y de Denjoy fueron introducidas para estudiar este tipo de problemas y su estudio llevó a Cantor a definir su teoría de conjuntos.

- El segundo punto de vista consiste en considerar una función $f(x)$, aplicar la fórmula (3) y estudiar la identidad (2). La pregunta es entonces: la serie converge efectivamente hacia $f(x)$?

  Este es el punto de vista de J. Fourier, quien pensaba erróneamente que la fórmula (3) puede aplicarse a toda función y que se obtiene la identidad (2): es decir que se tiene la convergencia de la serie hacia la función. Sin embargo existen contra-ejemplos (algunos de ellos famosos, Du Dois Reymond 1873) en donde a partir de una función continua se obtiene una serie que no converge.

1) La fórmula (3) nos dice que a partir de una función dada, podemos obtener pedazos de información y a estos pedazos se los llama "coeficientes". Este proceso de descomposición es el *análisis*.

2) La fórmula (2) nos indica en cambio que a partir de pedazos de información, es posible reconstruir una función y a este proceso se lo llama *síntesis*.

> La resolución de la convergencia de las series de Fourier fue dada por L. Carleson en 1966: para toda función $f \in L^2(\mathbb{T})$, su serie de Fourier converge hacia f en casi todas partes.
>
> Este resultado se generaliza a los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para todo $p > 1$ (Hunt, 1967).

$\Longrightarrow$ El estudio de estas dos fórmulas (2) y (3) es el punto de partida del *análisis armónico*.

$\Longrightarrow$ La generalización (y sus consecuencias asi como su desarrollo) a $\mathbb{R}^n$ o a otros marcos más abstractos de las técnicas y herramientas utilizadas para estudiar estos problemas de convergencia de las series de Fourier es lo que se conoce actualmente como *análisis armónico*.

$\Longrightarrow$ Nuevas problemáticas y nuevas técnicas han aparecido en este proceso, todas ellas con relaciones muy fuertes con el análisis funcional, la teoría de operadores, las probabilidades, las ecuaciones en derivadas parciales, la estadística, etc.

3. Unas definiciones

Espacios de Lebesgue

Definición 4 *Sea $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura de espacio medido natural (σ-álgebra de los Borelianos, medida de Lebesgue). Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible.*

Definimos los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ como el conjunto de funciones medibles tales que las cantidades $\|f\|_{L^p}$ sean finitas, en donde

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $1 \leq p < +\infty$ y si $p = +\infty$:

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess|f(x)|.$$

Proposición 2 (Desigualdades importantes)

1) ***Desigualdad de Hölder***: *si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se tiene la desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

2) ***Desigualdad de Tchebychev***: *sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función tal que $f \in L^p(X)$ con $1 \leq p < +\infty$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ se tiene la desigualdad*

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big)^{1/p} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^p}$$

$\Longrightarrow$ Hemos definido la transformada de Fourier para funciones integrables (es decir en $L^1(\mathbb{R}^n)$). Es posible definirlas en todos los espacios de Lebesgue L^p. Pero esta definición no se la hace directamente, y es necesario considerar los espacios L^p como subespacios del espacio de **distribuciones temperadas** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ El marco teórico adecuado para estudiar la transformada de Fourier es el de las distribuciones temperadas.

$\Longrightarrow$ El espacio L^2 tiene una propiedad muy importante cuando se lo estudia desde el punto de vista de la Transformada de Fourier (y es el único espacio de Lebesgue en gozar de esta propiedad!).

Teorema 1 (Plancherel) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de cuadrado integrable, es decir $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces la Transformada de Fourier es un isomorfismo en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$$

Dicho de otra manera, y únicamente en el espacio L^2, la norma $\|f\|_{L^2}$ también puede calcularse reemplazando f por su transformada de Fourier $\widehat{f}$.

$\Longrightarrow$ Esta propiedad hace que el espacio L^2 sea de gran utilidad en la práctica!

El producto de Convolución

Presentamos ahora una herramienta fundamental del análisis:

Definición 5 (Producto de convolución) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Definimos el producto de convolución entre f y g, notado $f * g$ por la expresión:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Algunas propiedades **importantes**:

Proposición 3 *Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles.*

- *se tiene $f * g(x) = g * f(x)$ (comutatividad) y se tiene $(f+g) * h = f * h + g * h$*
- *hay que tomar precauciones al definir el producto de convolución, de gran importancia es la **desigualdad de Young**:*
$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^r} \qquad \text{con } 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$
- *el espacio $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ es una álgebra de Banach pues se tiene $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.*
- *se tiene siempre, para todo $1 \leq p \leq +\infty$, las desigualdades*
$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$$

Proposición 4 (Propiedad Fundamental (I)) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles y sea $g \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Se tiene*

$$\partial^\alpha\big(f * g\big)(x) = f * \big(\partial^\alpha g\big)(x)$$

Es decir, al hacer el producto de convolución entre una función f (que no tiene por qué ser regular) con una función g que si es regular, se obtiene una función regular. Dicho de otra manera, el hecho de hacer un producto de convolución con una función regular permite ganar *en regularidad.*

Ejercicio: sea $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ (función no regular!) y sea $g(x) = e^{-x^2}$ (función muy regular!).

Calcular $\frac{d^2}{dx^2}\big(f * g\big)(x)$.

Proposición 5 (Propiedad Fundamental (II)) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles.*

La transformada de Fourier transforma el producto de convolución de dos funciones en el producto usual de sus transformadas de Fourier:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi)$$

Esta segunda propiedad fundamental es el punto de partida de muchísimos resultados en el análisis funcional (permite definir cómodamente los espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria) y permite estudiar numerosos resultados de forma relativamente directa.

4. Un ejemplo: los potenciales de Bessel

Definición 6 *Sea $\alpha > 0$ un real y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Definimos el operador T_α de la siguiente manera:*

$$T_\alpha(f)(x) = G_\alpha * f(x)$$

en donde G_α es el potencial de Bessel definido por la expresión

$$\widehat{G_\alpha}(\xi) = (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$\Longrightarrow$ Hemos definido un operador T_α por convolución y en donde el núcleo de convolución G_α está definido en términos de la transformada de Fourier.

$\Longrightarrow$ La propiedades del operador T_α dependen directamente de las propiedades del potencial de Bessel G_α.

- Dónde vive el potencial de Bessel G_α?
- Qué propiedades posee G_α?

Interesante: no disponemos de informaciones sobre G_α, pero solo conocemos la expresión de su transformada de Fourier $\widehat{G_\alpha}$!

$\Longrightarrow$ Vamos a estudiar algunas propiedades del potencial de Bessel G_α para luego ver las propiedades del operador T_α.

- Se tiene $\widehat{G_\alpha}(0) = 1$ y a partir de esta observación muy simple obtenemos el siguiente hecho:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x)dx = 1$$

  es decir que el potencial de Bessel G_α es integrable, es decir para todo $\alpha > 0$ se tiene $G_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

- Pasemos a la norma L^2. Utilizando el teorema de Plancherel se tiene

$$\begin{aligned}
\|G_\alpha\|_{L^2}^2 &= \|\widehat{G_\alpha}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\alpha}} d\xi \\
&= \int_{\{|\xi|<1\}} \frac{1}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\alpha}} d\xi + \int_{\{|\xi|\geq 1\}} \frac{1}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\alpha}} d\xi \\
&\leq \int_{\{|\xi|<1\}} d\xi + C \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2\rho^2)^{\alpha}} \rho^{n-1} d\rho \\
&\leq C_1 + C_2 \int_1^{+\infty} \rho^{n-1-2\alpha} d\rho
\end{aligned}$$

  si $\alpha - \frac{n}{2} > 0$ entonces esta segunda integral es finita y se tiene que $\|G_\alpha\|_{L^2} < +\infty$.

Consecuencias:

- El operador T_α es un operador acotado de L^p en L^p para todo $1 \leq p \leq +\infty$. Es decir, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

- Si $\alpha - \frac{n}{2} > 0$, entonces el operador T_α es acotado de L^q en L^p con $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, es decir si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Espacios de Sobolev

La transformada de Fourier permite también definir espacios funcionales, un ejemplo de ello son los espacios de Sobolev H^s:

Definición 7 *Sea $s > 0$ un real y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones de cuadrado integrable cuya derivada fraccionaria s-ésima es de cuadrado integrable. Este espacio puede normarse con la siguiente funcional:*

$$\|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo: si $\alpha - \frac{n}{2} > s$ entonces $G_\alpha \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\|G_\alpha\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+4\pi^2|\xi|^2)^s}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^\alpha} d\xi = \int_{\{|\xi|<1\}} \frac{(1+4\pi^2|\xi|^2)^s}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^\alpha} d\xi + \int_{\{|\xi|\geq 1\}} \frac{(1+4\pi^2|\xi|^2)^s}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^\alpha} d\xi \\
&\leq C_1 + \int_{\{|\xi|\geq 1\}} (1+4\pi^2|\xi|^2)^{s-\alpha} d\xi = C_1 + C \int_{\{\rho \geq 1\}} (1+4\pi^2\rho^2)^{s-\alpha} \rho^{n-1} d\rho
\end{aligned}$$

como se tiene $\alpha - \frac{n}{2} > s$, esta última integral es convergente y se deduce que $\|G_\alpha\|_{H^s} < +\infty$.

Consecuencias:

- Sea $\alpha > 0$, para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene la identidad

$$\|T_\alpha(f)\|_{H^\alpha} = \|f\|_{L^2}$$

  En efecto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha(f)\|_{H^\alpha}^2 &= \|G_\alpha * f\|_{H^\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha}(1+4\pi^2|\xi|^2)^\alpha |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

- Si $0 < \alpha < s$ y si $f \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|T_\alpha(f)\|_{H^s} = \|f\|_{H^{s-\alpha}}$$

  De la misma manera, se tiene

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha(f)\|_{H^s}^2 &= \|G_\alpha * f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+4\pi^2|\xi|^2)^{-s}(1+4\pi^2|\xi|^2)^\alpha |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+4\pi^2|\xi|^2)^{-s+\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_{H^{s-\alpha}}^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Con estas expresiones vemos que los operadores T_α realizan un isomorfismo entre los espacios de Sobolev H^s y $H^{s-\alpha}$: dicho de otra manera, estos operadores permiten "bajar" la regularidad en los espacios de Sobolev.