Lección n°2: Un operador, un espacio funcional, una desigualdad

UCE, otoño 2014

El objetivo de esta lección es mostrar que el estudio de cierto tipo de operadores conduce a la definición de diferentes espacios funcionales.

1. Funciones Maximales

- Funciones de gran importancia en el análisis armónico: una herramienta indispensable
- Ejemplo de operadores que **no** son acotados en L^1 en L^1: ilustración de la necesidad de los espacios de Lorentz

Definición 1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Definimos el promedio de f sobre la bola $B = B(x, r)$ como*

$$m_B(f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

Vemos sin problema que si $f = C > 0$ es una función constante, se tiene $m_B(f)(x) = C$ para toda bola $B(x, r)$.

Definición 2 (función maximal centrada) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal centrada de Hardy-Littlewood está definida por la expresión:*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} m_B(|f|)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{v_n r^n} \int_{\{|y|<r\}} |f(x-y)|dy$$

Ejemplos:

- si $f = C$, entonces $\mathcal{M}(f)(x) = |C|$.
- si f es una función a soporte compacto ($supp(f) \subset B(0, R)$), se puede mostrar que se tiene

$$\mathcal{M}(f)(x) \geq \frac{c\|f\|_{L^1}}{(R + |x|)^n}$$

$\Longrightarrow$ Esto muestra que si una función está en el espacio L^1, el operador función maximal **nunca** está en L^1. Dicho de otra manera, el operador función maximal no es un operador acotado de L^1 en L^1.

$\Longrightarrow$ A partir de la definición, se puede ver sin problema que

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

para toda función $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir que el operador función maximal es un operador acotado de L^∞ en L^∞.

Algunas Preguntas:

- Es el operador función maximal acotado de L^p en L^p para $1 < p < +\infty$?
- Qué sucede si en vez de tomar el promedio sobre bolas $B(x, r)$ se toma el promedio sobre cuadrados? o sobre rectángulos?

2. Espacios de Lorentz

- Son una generalización de los espacios de Lebesgue: miden el "tamaño" de las funciones.
- Muy útiles cuando se trabaja con operadores, es decir en todo el análisis.
- Muchas veces sólo se disponen de estimaciones en donde intervienen los espacios de Lorentz no se puede pasar a estimaciones más fuertes en donde intervienen espacios de Lebesgue.

2.1. Función de distribución

Definición 3 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $\alpha \in [0, +\infty[$ un real. Definimos sobre $[0, +\infty[$ la* función de distribución asociada a la función f *por*

$$d_f(\alpha) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)d\mu(x) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right).$$

Proposición 1 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles. Entonces, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tenemos:*

(1) d_f es decreciente y continua a la derecha sobre $[0, +\infty[$,

(2) si $|g(x)| \leq |f(x)|$ μ-c.t.p. entonces $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$,

(3) para toda constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se tiene $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$, para todo $\alpha \geq 0$,

(4) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,

(5) $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Proposición 2 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $1 \leq p < +\infty$ un parámetro real. Se tiene entonces la identidad*

$$\|f\|^p_{L^p} = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha.$$

Prueba.

$$p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\left(\int_X \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)d\mu(x)\right)d\alpha.$$

Aplicamos el teorema de Fubini en la última integral para obtener

$$= p\int_X\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)d\alpha\, d\mu(x) = p\int_X\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1}d\alpha\, d\mu(x) = \int_X |f|^p d\mu(x) = \|f\|^p_{L^p}. \qquad \blacksquare$$

2.2. Espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$

También llamados espacios de *Lebesgue débiles* o espacios *de Marcinkiewicz*.

Definición 4 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible.*

1) Sea $1 \leq p < +\infty$ un número real, diremos que f pertenece al espacio $L^{p,\infty}(X)$ si la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{1/p}(\alpha)\right\} = \inf_{C>0}\left\{d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \forall\alpha > 0\right\} \qquad \textit{es finita.}$$

2) El espacio $L^{\infty,\infty}(X)$ es por definición el espacio $L^\infty(X)$.

Proposición 3 *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Entonces tenemos la inclusión:*

$$L^p(X) \subset L^{p,\infty}(X).$$

$$\Longleftrightarrow \|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Esta inclusión es estricta.

Prueba.

- Sea $\alpha > 0$ un número real, entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \\
&\geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) = \alpha^p d_f(\alpha).
\end{aligned}$$

  Es decir, para todo $\alpha > 0$, $\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{1/p}(\alpha)$.

- La inclusión es estricta: Sea la función $f : x \longmapsto |x|^{-n/p}$ definida sobre $X = \mathbb{R}^n$. Se tiene $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Pero $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ es igual a la raiz p-ésima de la medida de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, en efecto, un cambio de variable permite ver que

$$d_f^{1/p}(\alpha) = \alpha^{-1}|B(0,1)|^{1/p}.$$

  Luego se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |B(0,1)|^{1/p}$. ■

Primera utilidad de los espacios de Lorentz:
$\Longrightarrow$ Permiten mejorar el resultado de interpolación entre los espacios de Lebesgue.

Sabíamos que se tiene la estimación $\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1}^{1/r}\|f\|_{L^\infty}^{1-1/r}$ para toda función $f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$, con $1 < r < +\infty$. Con los espacios de Lorentz tenemos algo **mejor**:

Proposición 4 *Sean $1 \leq p < q \leq +\infty$ y sea $f \in L^{p,\infty}(X) \cap L^{q,\infty}(X)$, entonces $f \in L^r(X)$ para todo $p < r < q$:*

$$\|f\|_{L^r} \leq C(p,q,r)\|f\|_{L^{p,\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta}$$

con $\theta = \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}$ si $q < +\infty$ y $\theta = p/r$ si $q = +\infty$.

Prueba.

- Sea $q < +\infty$. Sabemos que

$$d_f(\alpha) \leq \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)$$

  Fijemos $T = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ para escribir

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r}^r &= r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leq r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right) d\alpha \\
&\leq r\int_0^T \alpha^{r-1-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r\int_T^{+\infty} \alpha^{r-1-q}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha \qquad (1) \\
&\leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p T^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q T^{r-q} = \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)(\|f\|_{L^{p,\infty}}^p)^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|_{L^{q,\infty}}^q)^{\frac{r-p}{q-p}}
\end{aligned}$$

- Sea $q = +\infty$. Como $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$ entonces basta utilizar la estimación $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p$ para la parte $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$ en la integral (1) para obtener

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p\|f\|_{L^\infty}^{r-p} \quad ■$$

El comportamiento de los espacios de Lorentz con respecto a la convolución es similar al de los espacios de Lebesgue pues se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5 (Desigualdades de Young) *Sean $1 \le p, q, r \le +\infty$ relacionados por la expresión $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, entonces si $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y si $g \in L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$, se tiene la estimación*

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^{r,\infty}}$$

3. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz

Definición 5 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Definimos $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ como el espacio de todas las funciones f tales que $f = f_0 + f_1$ en donde $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$.*

Proposición 6 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Si $p_0 < p_1$ se tiene $L^p(X) \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ para todo p tal que $p_0 < p < p_1$.*

Prueba. Sea f una función de $L^p(X)$ y sea γ una constante positiva fijada. Escribimos

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma \\ \\ 0 & \text{si } |f(x)| \le \gamma \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \le \gamma \\ \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma \end{cases}$$

de manera que $f = f_0 + f_1$.

Puesto que $p_0 - p \le 0$ se tiene

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) = \int_X |f_0(x)|^p |f_0(x)|^{p_0 - p} d\mu(x) \le \gamma^{p_0 - p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x)$$

De forma similar tenemos

$$\int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_X |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1 - p} d\mu(x) \le \gamma^{p_1 - p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x),$$

luego $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$. ■

3.1. Interpolación de Marcinkiewicz

Un operador sublineal verifica $T(\alpha f + \beta g) \le \alpha T(f) + \beta T(g)$.

Teorema 1 *Sean $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}or(X), \nu)$ dos espacios medidos. Sea $1 \le p_0 < p_1 \le +\infty$. Sea T un operador sublineal definido en el espacio $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ y que toma valores en el espacio de funciones medibles definidas sobre Y.*
Supongamos que existen dos constantes positivas A_0 y A_1 tales que:

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \le A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \qquad \text{para toda función } f \in L^{p_0}(X), \tag{2}$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \le A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \qquad \text{para toda función } f \in L^{p_1}(X). \tag{3}$$

Entonces, para todo $p_0 < p < p_1$ y para todo $f \in L^p(X)$, tenemos la estimación:

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \le A \|f\|_{L^p(X)}, \tag{4}$$

en donde

$$A = 2\left(\frac{p}{p - p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{1/p - 1/p_1}{1/p_0 - 1/p_1}} A_1^{\frac{1/p_0 - 1/p}{1/p_0 - 1/p_1}}. \tag{5}$$

Demostración.

- Supongamos que $p_1 < +\infty$ y fijemos una función $f \in L^p(X)$ y un parámetro $\alpha > 0$. Utilizamos la descomposición anterior de la función f escribiendo $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ en donde

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \end{cases} \qquad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha. \end{cases}$$

Aqui δ es un parámetro positivo cuyo valor será determinado posteriormente. Obsérvese que f_0^α pertenece al espacio $L^{p_0}(X)$ y que f_1^α pertenece al espacio $L^{p_1}(X)$.

Utilizemos la hipótesis de sublinealidad para obtener

$$|T(f)| = |T(f_0^\alpha + f_1^\alpha)| \leq |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|,$$

lo que implica las inclusiones $\{x : |T(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x : |T(f_0^\alpha)| > \alpha/2\} \cup \{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\}$, de donde se tiene, al nivel de las funciones de distribución

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2). \tag{6}$$

Esta estimación anterior, junto con a las hipótesis (2) y (3), nos da

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

Ahora vamos a contruir la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 2, en efecto:

$$\|T(f)\|_{L^p}^p = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha)d\alpha \leq (2A_0)^{p_0} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)d\alpha$$
$$+(2A_1)^{p_1} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)d\alpha.$$

Aplicamos el teorema de Fubini para obtener

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f|/\delta} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} p \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{|f|/\delta}^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha d\mu(x),$$

es decir

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{|f(x)|^{p-p_0}}{\delta^{p-p_0}} d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \int_X |f(x)|^{p_1} \frac{|f(x)|^{p-p_1}}{\delta^{p-p_1}} d\mu(x).$$

De donde se obtiene

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq \left[(2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \delta^{p_0-p} + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \delta^{p_1-p}\right] \|f\|_{L^p}^p.$$

Falta ahora fijar un valor de δ para terminar la prueba; para ello es suficente escribir $\delta = (2A_0)^{\frac{p_0}{p_1-p_0}} (2A_1)^{\frac{p_1}{p_0-p_1}}$. El lector verificará sin problema que se tiene la estimación deseada.

- Caso cuando $p_1 = +\infty$. Escribamos otra vez $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ con

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \end{cases} \qquad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha. \end{cases}$$

Tenemos las estimaciones siguientes

$$\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \leq A_1 \|f_1^\alpha\|_{L^\infty} \leq A_1\gamma\alpha = \alpha/2$$

siempre y cuando fijemos $\gamma = \frac{1}{2A_1}$. Se deduce de esto que el conjunto $\{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\}$ es de medida cero; por lo tanto $d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2)$. Se construye otra vez la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 2:

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2)d\alpha.$$

Aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\leq (2A_0)^{p_0} p\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{2A_1|f|} \alpha^{p-p_0-1}d\alpha d\mu(x).$$

Es decir

$$\leq (2A_0)^{p_0}\frac{p}{p-p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}(2A_1)^{p-p_0}d\mu(x).$$

de donde concluimos que

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq 2^p A_0^{p_0}A_1^{p-p_0}\frac{p}{p-p_0}\|f\|_{L^p}^p$$

lo que termina la prueba. ■

3.2. Aplicación: Funciones Maximales

- Sabemos que, para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la función maximal $\mathcal{M}(f)$ no es un operador acotado: es decir que **nunca** se tiene la desigualdad
$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1}.$$
- Sabemos además que la función maximal $\mathcal{M}(f)$ es un operador acotado de L^∞ en L^∞.

$\Longrightarrow$ Es posible demostrar que para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene una estimación débil del tipo siguiente

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1},$$

dicho de otra manera, la función maximal es un operador acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$.

$\Longrightarrow$ Para estudiar el caso $1 < p < +\infty$ aplicamos directamente el teorema de interpolación de Marcinkiewicz!

4. Una desigualdad

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ una función con $1 < p < +\infty$ y sea $\alpha > 0$ un real. Definimos el operador T_α por medio de la expresión

$$T_\alpha(f)(x) = f * \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

Deseamos saber para qué valores de α este operador T_α es un operador acotado.

Antes de lanzarnos en cálculos complicados, es necesario hacer algunas observaciones:

- T_α está dado por convolución: podemos usar las desigualdades de Young, pues sabemos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
- ...pero la función localmente integrable $\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ no pertenece a ningún espacio L^p
- ...pero $\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ pertenece a un espacio de Lorentz $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$!

Debemos aplicar entonces las desigualdades de Young que hacen intervenir los espacios de Lorentz:

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \left\| \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \right\|_{L^{r,\infty}}$$

donde $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Sabemos que $f \in L^p$, de manera que $\|f\|_{L^p} < +\infty$, debemos pues estudiar la cantidad

$$\left\| \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \right\|_{L^{r,\infty}}$$

aqui recordamos que es sencillo calcular la norma de las funciones de tipo $|x|^{-\beta}$ en los espacios de Lorentz, y notamos que esta cantidad es finita si $n - \alpha = \frac{n}{r}$. De esta manera obtenemos:

Teorema 2 (Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$ y sea $\alpha > 0$. Si $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ entonces se tiene la desigualdad*

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Esta desigualdad es indispensable en muchísimas ramas de las matemáticas!

Y en realidad esta desigualdad, cuando $1 < p < +\infty$ es *equivalente* a las desigualdades de Sobolev siguientes:

Teorema 3 (Desigualdades de Sobolev) *Sea $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$ y sea $\alpha > 0$. Si $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ entonces se tiene la desigualdad*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}$$

Aquí hemos definido el operador $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ utilizando la transformada de Fourier por medio de la expresión

$$(\widehat{-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} f(\xi)) = c|\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

y el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ de regularidad fraccionaria está caracterizado por la cantidad

$$\|f\|_{\dot{W}^{\alpha,p}} = \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}$$