Lección n°3: Análisis en grupos de Lie estratificados

UCE, otoño 2014

El objetivo de esta lección es mostrar que es posible considerar problemas de análisis armónico sobre estructuras diferentes: el espacio eculídeo $\mathbb{R}^n$ posee propiedades demasiado particulares y a veces es necesario estudiar lo que sucede en otro tipo de situaciones. Consideraremos aquí el caso de los grupos de Lie estratificados (y más en particular el grupo de Heisenberg) que son una generalización de $\mathbb{R}^n$.

1. Un cambio de operación y algunas consecuencias

Hasta ahora hemos trabajado sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura de espacio medido natural. Veamos un poco más de cerca su estructura interna.

- $\mathbb{R}^n$ es un **grupo** para la suma de vectores definida por

$$x + y = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_n, \cdots, x_n + y_n)$$

el elemento neutro es el origen $(0, 0, 0)$ y el elemento inverso es $-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

- si $\lambda > 0$ es un real podemos definir la *dilatación* de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ por la expresión

$$\delta_\lambda[x] = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

- Vemos sin problema que se tiene, para todo $\lambda > 0$ la fórmula

$$|\delta_\lambda[x]| = |(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)| = \lambda |x|$$

en donde $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

- tenemos además, para $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\delta_\lambda[x + y] = (\lambda(x_1 + y_1), \cdots, \lambda(x_n + y_n)) = \delta_\lambda[x] + \delta_\lambda[y]$$

- si definimos ahora la *dilatación* de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(x) = f(\delta_\lambda[x])$$

tenemos la fórmula siguiente para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$:

$$\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}$$

decimos entonces que los espacios de Lebesgue son *homogéneos* de grado $\frac{n}{p}$.

- si calculamos la medida de la bola $B(0, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \lambda\}$ se tiene

$$|B(0, \lambda)| = \lambda^n |B(0, 1)|$$

Esto nos dice que el espacio $\mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado n.

Qué sucede si cambiamos un poco la estructura de grupo?

Definición 1 *Consideremos por ejemplo la operación siguiente en* $\mathbb{R}^3$*:*

$$x \cdot y = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}[x_1 y_2 - x_2 y_1]\big)$$

Definimos el ***grupo de Heisenberg*** *como* $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$.

Esta operación *no es comutativa* pues en general se tiene $x \cdot y \neq y \cdot x$.

Vamos a ver cómo este cambio de estructura modifica profundamente el medio ambiente de trabajo.

$\Longrightarrow$ Desde el punto de vista de la teoría de la medida, el grupo $\mathbb{H}$ es un grupo localmente compacto que posee una única medida agradable (la medida de Haar) que en este caso coincide con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$.

$\Longrightarrow$ Para definir una estructura de dilatación con propiedades interesantes sobre el grupo $\mathbb{H}$ escribimos

$$\delta_\lambda[x] = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3).$$

$\Longrightarrow$ Definimos ahora una norma con la expresión

$$\|x\| = \Big[\big(x_1^2 + x_2^2\big)^2 + 16 x_3^2\Big]^{\frac{1}{4}}$$

- Con esta definición de dilatación tenemos la propiedad

$$\delta_\lambda[x \cdot y] = \delta_\lambda[x] \cdot \delta_\lambda[y]$$

- Además tenemos la identidad

$$\|\delta_\lambda[x]\| = \lambda \|x\|$$

- Sea $f \in L^p(\mathbb{H})$ con $1 \leq p \leq +\infty$ y consideremos $f_\lambda(x) = f(\delta_\lambda[x])$, vemos que se tiene

$$\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{4}{p}} \|f\|_{L^p}$$

  decimos entonces que los espacios de Lebesgue definidos sobre el grupo de Heisenberg son *homogéneos* de grado $\frac{4}{p}$.

  $\Longrightarrow$ La homogeneidad de los espacios de Lebesgue no es la misma si se trabaja en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{H}$.

- si calculamos la medida de la bola $B(0, \lambda) = \{x \in \mathbb{H} : \|x\| \leq \lambda\}$ se tiene

$$|B(0, \lambda)| = \lambda^4 |B(0, 1)|$$

  Esto nos dice que el espacio $\mathbb{H}$ es homogéneo de grado 4: la dimensión topológica ($n = 3$) es diferente de la dimensión homogénea ($N = 4$).

  $\Longrightarrow$ Es último punto es interesante pues muestra una diferencia importante entre la dimensión topológica y la dimensión homogénea.

  $\Longrightarrow$ Finalmente, como la ley de grupo no es comutativa, el producto de convolución tampoco lo es: es decir que no se tiene en general la identidad

$$f * g = g * f$$

  para dos funciones $f, g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ para las cuales estas cantidades están bien definidas.

2. Una estructura diferencial y un poco de geometría

En $\mathbb{R}^3$ tenemos tres coordenadas x_1, x_2, x_3 y tenemos tres derivadas parciales $\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}$. En particular, se tiene para una función derivable $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y para $\lambda > 0$ la propiedad

$$\partial_{x_i}\big[f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)\big] = \lambda[\partial_{x_i} f](\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Cuál es el análogo de esta propiedad de estabilidad con respecto a la dilatación en el grupo de Heisenberg?

Aquí debemos tener mucho cuidado pues debemos por un lado obtener operadores de derivación con un comportamiento similar al de las derivadas parciales ∂_{x_i} pero que respeten la estructura del grupo de Heisenberg así como su dilatación específica.

Definición 2 *Los campos de vectores que corresponden a la noción de derivadas en el grupo de Heisenberg* $\mathbb{H}$ *están dados por:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{x_1} - \frac{1}{2} x_2 \partial_{x_3} \\ X_2 &= \partial_{x_2} + \frac{1}{2} x_1 \partial_{x_3} \\ X_3 &= \partial_{x_3} \end{aligned}$$

Estos campos de vectores X_1, X_2, X_3 poseen las buenas propiedades que uno espera de un operador de derivación cuando se toma en cuenta la estructura del grupo de Heisenberg. En particular tenemos:

- Se tiene la invariancia con respecto a la ley de grupo:
$$X_1[f(x \cdot z)] = [X_1 f](x \cdot z), \qquad X_2[f(x \cdot z)] = [X_2 f](x \cdot z)$$
para todo $x, z \in \mathbb{H}$.
- Los operadores X_1 y X_2 son operadores diferenciales homogéneos de grado 1 con respecto a la estructura de dilatación:
$$X_1[f(\delta_\lambda[x])] = \lambda[X_1 f](\delta_\lambda[x]), \qquad X_2[f(\delta_\lambda[x])] = \lambda[X_2 f](\delta_\lambda[x]).$$
- El operador T es en cambio un operador diferencial homogéneo de grado 2 con respecto a la estructura de dilatación:
$$T[f(\delta_\lambda[x])] = \lambda^2[Tf](\delta_\lambda[x]).$$

$\Longrightarrow$ En el caso de los operadores de derivación usuales ∂_{x_i} se tiene que $\partial_{x_i}\partial_{x_j} = \partial_{x_j}\partial_{x_i}$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Esta propiedad de comutatividad no se mantiene cuando consideramos los operadores diferenciales X_1, X_2 y T y tenemos la proposición siguiente.

Proposición 1 (Corchete de Lie) *Se tienen las relaciones siguientes entre los campos de vectores* X_1, X_2, X_3*:*

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0$$

en donde $[A, B]$ *es el corchete de comutación entre dos operadores* A *y* B *definido por*

$$[A, B]f = A(B(f)) - B(A(f))$$

donde f *es una función que pertenece al dominio de estos operadores.*

$\Longrightarrow$ Los elementos X_1, X_2 y T determinan la estructura geométrica del grupo de Heisenberg y forman lo que se denomina el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg.

$\Longrightarrow$ Para evidenciar la diferencia geométrica del grupo de Heisenberg, podemos estudiar la noción de "cubo unidad": en $\mathbb{R}^n$ podemos sin problema definir el conjunto $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < 1, \ i = 1, ..., n\}$ y por traslación es posible pavimentar el espacio $\mathbb{R}^n$. Este cubo unidad posee buenas propiedades geométricas. Cuál es el equivalente del cubo unidad en el grupo de Heisenberg? Es posible definir un tal cubo, pero el conjunto resultante es un conjunto que tiene una estructura *fractal*, lo cual complica significativamente su uso.

3. Análisis en un grupo de Lie?

Es posible hacer análisis en este tipo de grupos de Lie? Qué dificultades aparecen?

- Vimos que los espacios de Lebesgue pueden definirse sin problema: solo la propiedad de homogeneidad es diferente.
- De la misma manera es posible definir los espacios de Lorentz sobre este tipo de grupos de Lie.

En realidad también es posible definir espacios de Sobolev y es posible considerar todo tipo de problema de análisis armónico en el marco de estos grupos de Lie.

Definición 3 *Sea $\mathbb{H}$ el grupo de Heisenberg. Definimos el operador Laplaciano por la expresión:*

$$\mathcal{J} = -\left(X_1^2 + X_2^2\right)$$

Es importante observar que no hay una manera única de definir un operador Laplaciano, por ejemplo

$$\mathcal{J}_1 = -\left(X_1^2 + X_2^2 + T\right) \qquad \mathcal{J}_2 = -\left(X_1^2 + X_2^2 + T^2\right)$$

son dos tipos distintos de operador Laplaciano con propiedades muy particulares.

$\Longrightarrow$ El operador Laplaciano $\mathcal{J}$ es un operador homogéneo de grado 2 con respecto a la estructura de dilatación.

$\Longrightarrow$ El operador Laplaciano $\mathcal{J}_1$ también es un operador homogéneo de grado 2 con respecto a la estructura de dilatación.

$\Longrightarrow$ El operador Laplaciano $\mathcal{J}_2$ **no** es un operador homogéneo de grado 2 con respecto a la estructura de dilatación.

Una vez que fijamos el operador Laplaciano, es posible hacer muchísimas cosas: podemos definir espacios funcionales, considerar ecuaciones en derivadas parciales, etc.

Definición 4 (Espacios de Sobolev) *Sea $\mathbb{H}$ el grupo de Heisenberg. El espacio de Sobolev sobre el grupo de Heisenberg $W^{s,p}(\mathbb{H})$ con $1 < p < +\infty$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\mathcal{J}^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}$$

Tenemos, de la misma forma que en $\mathbb{R}^n$, las desigualdades de Sobolev:

Definición 5 *Sea $\mathbb{H}$ el grupo de Heisenberg. Sea $\mathcal{J}^{\frac{s}{2}} f \in L^p(\mathbb{H})$ con $1 < p < +\infty$, entonces se tiene*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|\mathcal{J}^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}$$

con $\frac{1}{q} = \frac{s}{4} - \frac{1}{p}$

y la demostración es esencialmente la misma que la que dimos en $\mathbb{R}^3$, a condición de usar las buenas herramientas!