Lección n°1: Funciones maximales, definiciones y propiedades.

EPN, UITEY 2020

1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y no negativa, y $r > 0$ fijo. Dado que $B(x,r) \subseteq Q(x,r)$ y $Q(x,r) \subseteq B(x,\sqrt{2}r)$, calcule el valor de las constantes C_1 y C_2 tal que*

$$\underset{B(x,r)}{prom}(f) \leq C_1 \underset{Q(x,r)}{prom}(f), \tag{1}$$

$$\underset{Q(x,r)}{prom}(f) \leq C_2 \underset{B(x,\sqrt{2}r)}{prom}(f). \tag{2}$$

Donde C_1 y C_2 únicamente dependen de la dimensión del espacio.
¿Se mantienen estas desigualdades si permitimos que f tome valores negativos?

Ejercicio 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y $r > 0$. Demuestre que las funciones*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \underset{B(x,r)}{prom}(f) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \underset{Q(x,r)}{prom}(f) \end{aligned}$$

son continuas. Se sugiere hacer esto usando $h(y,x) = \mathbb{1}_{B(x,r)}f(y)$ para verificar las condiciones del siguiente resultado, presentado en [1].
Teorema *(Continuidad con respecto a un parámetro). Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, (E, d) un espacio métrico y $h : X \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica las tres condiciones siguientes:*

- *Para todo $x \in E$, la función $y \longmapsto h(y,x)$ es medible;*
- *para μ-casi todo $y \in X$, la función $x \longmapsto h(y,x)$ es continua en el punto x_0; y*
- *en μ-casi todas partes, existe una función μ-integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in E$, se tiene la desigualdad*

  $$|h(y,x)| \leq g(y)$$

  Entonces, la función definida por

  $$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \psi(x) = \int_X h(y,x) d\mu(y) \end{aligned}$$

  es continua en el punto x_0.

Ejercicio 1.3. *Sabemos que si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, localmente integrables, satisfacen $|g| \leq |f|$ c.t.p., entonces $\mathcal{M}(g)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x)$. ¿Es el recíproco de esta proposición verdadero?*

Ejercicio 1.4. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Usando el resultado del Ejercicio 1.1, muestre que*

$$\mathcal{M}_B(f)(x) \leq C_1 \, \mathcal{M}_Q(f)(x), \tag{3}$$

$$\mathcal{M}_Q(f)(x) \leq C_2 \, \mathcal{M}_B(f)(x). \tag{4}$$

Ejercicio 1.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Usando el resultado del Ejercicio 1.1, muestre que*

$$\mathscr{M}_B(f)(x) \leq C_1 \, \mathscr{M}_Q(f)(x), \tag{5}$$

$$\mathscr{M}_Q(f)(x) \leq C_2 \, \mathscr{M}_B(f)(x).. \tag{6}$$

Ejercicio 1.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Muestre que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x) \qquad y \qquad \mathscr{M}(f)(x) \leq 2^n \mathcal{M}(f)(x).$$

Ejercicio 1.7. *El motivo de este ejercicio es para generalizar el ejemplo presentado en la lección. Consideremos la bola cerrada $\overline{B}(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ con $r > 0$ arbitrario pero fijo. Se busca calcular $\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})$.*

1. *Suponga $x \in \overline{B}(0,r)$. ¿Qué puede decir de $\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x)$ en ese caso?*
2. *Suponga $x \in \partial\overline{B}(0,r)$ la frontera de $\overline{B}(0,r)$.*
   - *Muestre que $\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x) \leq 1$.*
   - *Tomando $z \in \mathbb{R}^2$ tal que $|z - x| < r$ y $s = |z - x| + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ ¿Qué puede decir de $\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x)$?*
3. *Suponga $x \notin \overline{B}(0,r)$. ¿Qué puede decir de $\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x)$?*
   (Indicación: tome $z = \left(-\frac{r}{2|x|} + \frac{1}{2}\right) x$ y $s = \frac{r+|x|}{2} + \varepsilon$ y estudie qué pasa cuando ε varía.)

Ejercicio 1.8. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Deseamos probar que $\mathcal{M}(f)$ es infinito. Considere $r > 0$:*

1. *Sea $x < 0$, cualquiera. Para $I = [x - r, x + r]$ analice qué pasa con $\underset{I}{prom}(f)(x)$ cuando r varía.*
2. *Sea $x > 0$,cualquiera. Para $I = [x - r, x + r]$ analice qué pasa con $\underset{I}{prom}(f)(x)$ cuando r varía.*
3. *Tome $x = 0$. Para $I = [x - r, x + r]$ analice qué pasa con $\underset{I}{prom}(f)(0)$ cuando r varía.*
4. *Concluya que $\mathcal{M}(f)$ es infinito.*
5. *¿Qué puede decir de $\mathscr{M}(f)$?*

Referencias

[1] D Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz,Volumen 1.* Colección de Matemáticas Universitarias, N°1. Amarun, 2017.