Lección n°2: Dos teoremas fundamentales.

EPN, UITEY 2021

1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Muestre que*

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ejercicio 1.2. *Sean $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$. Recuerde que la traslación y dilatación de f se define como $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ y $\delta_\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$ respectivamente. Muestre que*

$$\|f_\tau\|_{L^{1,\infty}} = \|f\|_{L^{1,\infty}} \qquad y \qquad \|\delta_\lambda(f)\|_{L^{1,\infty}} = \lambda^{-n}\|f\|_{L^{1,\infty}}.$$

Ejercicio 1.3. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x|^{-n}. \end{aligned}$$

Muestre que $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

Ejercicio 1.4. *Sea $a < b$, y $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, calcule $\|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}}$.*

Ejercicio 1.5. *Dada la función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Si se sabe que*

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}, \tag{1}$$

pruebe que

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}.$$

Ejercicio 1.6. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $t > 0$ un parámetro real. Demuestre que la dilatación normalizada en norma L^1 definida como*

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

cumple $\|\phi_t\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$ para cada $t > 0$.

Ejercicio 1.7. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$ una función radial y radialmente positiva que verifica*

$$\phi(x) \leq C(1 + |x|)^{-(n+\delta)},$$

para algún $\delta > 0$ y donde C es una constante. Demuestre que:

1. *$\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$;*
2. *Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1};$$

3. *Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq +\infty$, se tiene la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Ejercicio 1.8. *Este ejercicio busca demostrar el Corolario 4.1. Sea* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función positiva con mayorante acotado, integrable, radial y radialmente decreciente* Φ, *y sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente integrable.*

1. *Muestre la desigualdad*
$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x)$$
suponiendo que ϕ *es una función simple de la forma* $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{B_i}$ *donde* $a_i > 0$ *y* $B_i = B(0, r_i)$ *con* $r_i > 0$.

2. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función positiva. Usando el numeral anterior mostrar la desigualdad*
$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

3. *Concluya que*
$$\mathcal{M}_\phi(f)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$