Lección n°3: Tres aplicaciones.

EPN 2021

1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Encuentre la representación exacta de* $\mathbb{1}_{[1,2]\cap\mathbb{Q}}$.

Ejercicio 1.2. *Sea* $E\subseteq\mathbb{R}^n$ *un conjunto Lebesgue medible.*

1. *Muestre que*
$$\lim_{r\to 0^+}\frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$
para casi todo punto. Los puntos $x\in E$ *que cumplen esta propiedad se los conoce como* ***puntos de densidad*** *de* E.

2. *Muestre que* $|E|>0$ *si y sólamente si* E *tiene al menos un punto de Lebesgue.*

Ejercicio 1.3. *Sea* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función localmente integrable. Muestre que para casi todo punto* $x\in\mathbb{R}^n$ *se tiene la estimación puntual*
$$f(x)\leq\mathcal{M}f(x).$$

Ejercicio 1.4. *Sea* $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Recordemos que* $x\in\mathbb{R}^n$ *es un punto de Lebesgue para* f *si verifica*
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|^p dy=0, \tag{1}$$
para $1\leq p<+\infty$. *¿Qué sucede con los puntos de Lebesgue cuando* $p=+\infty$?
Considere la función $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$, *y analice la condición de punto de Lebesgue en el punto* $x_0=0$.

Ejercicio 1.5. *Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función localmente integrable. Se busca mostrar que:*
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)dy=f(x).$$

Para ello:

1. *Verifique que existe una constante* $C>0$ *tal que para todo* $h>0$ *se tiene la mayoración*
$$|]x-h,x+h[|\leq C\,|]x,x+h[|\,.$$

2. *Muestre que*
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(y)-f(x)|dy=0 \qquad c.t.p.\ x\in\mathbb{R}.$$

3. *Concluya.*

Observación. Esta versión del Teorema de diferenciación de Lebesgue está relacionada con la función maximal no centrada de Hardy-Littlewood.

Ejercicio 1.6. *Recordemos que para* $0<\alpha<n$ *el potencial de Riesz para una función localmente integrable* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *se define mediante la siguiente expresión:*
$$I_\alpha(f)(x)=C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy. \tag{2}$$
Suponiendo que la transformada de Fourier del potencial de Riesz de una función está dada por la expresión
$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi)=|\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi), \tag{3}$$

se busca demostrar la caracterización de Riemann-Liouville de este operador. Es decir, mostrar que

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1} (\mathfrak{g}_t * f)(x) dt. \tag{4}$$

donde $\mathfrak{g}$ *es el núcleo de Gauss y* Γ *la función gamma usual.*

1. *Suponga* (4) *y muestre que*

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1} e^{-t|\xi|^2} dt.$$

2. *Muestre que se tiene la igualdad* (3).
   Indicación: Utilice un cambio de variable adecuado.

Ejercicio 1.7. *Sean* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda > 0$, *la traslación y dilatación de* f *se define como* $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ *y* $\delta_\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$ *respectivamente. Sea* I_α *el potencial de Riesz definido en* (2), *muestre que para* $1 \leq p < +\infty$,

1. $\|I_\alpha(f_\tau)\|_{L^p} = \|I_\alpha(f)\|_{L^p}$.

2. $\|I_\alpha(\delta_\lambda(f))\|_{L^p} = \lambda^{-\alpha-\frac{n}{p}} \|I_\alpha(f)\|_{L^p}$.

Ejercicio 1.8. *Sobre* $\mathbb{R}^n$, *sea* $0 < \alpha < n$.

1. *Sea* f *una función constante. Determine* $I_\alpha(f)$.

2. *Sea* $g(x) = (1+|x|)^{-(n+\delta)}$, *se busca se busca mostrar que para* $\delta > 0$ *se tiene que* $I_\alpha(g)(x) < +\infty$. *Para ello:*

   a) *Considere* $|x| < 1$, *y muestre que el potencial de Riesz* $I_\alpha(g)(x)$ *es finito.*
   Indicación: Analice $I_\alpha(g)(x)$ *sobre el conjunto* $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ *y su complemento.*

   b) *Considere* $|x| \geq 1$. *Muestre que*

$$\int_{\left\{y\in\mathbb{R}^n : |y| \leq \frac{|x|}{2}\right\}} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta-\alpha}} \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n-\alpha}},$$

   donde C *es una constante que depende de* n *y* α.

   c) *Bajo la misma consideración que en b), Muestre que*

$$\int_{\left\{y\in\mathbb{R}^n : |y| > \frac{|x|}{2}\right\} \cap \left\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y| > \frac{|x|}{2}\right\}} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \leq \frac{C}{|x|^{n+\delta-\alpha}} \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}},$$

   Indicación: Recuerde que si una función h *es positiva y* $D \subseteq E$, *entonces* $\displaystyle\int_D h(x)dx \leq \int_E h(x)dx$.

   d) *Bajo la misma consideración que en b), Muestre que*

$$\int_{\left\{y\in\mathbb{R}^n : |y| > \frac{|x|}{2}\right\} \cap \left\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y| \leq \frac{|x|}{2}\right\}} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}},$$

   donde C *es una constante que depende de* n *y* α.
   Indicación: Utilizando primero la indicación en c) y tomando el cambio de variable $z = x - y$, *analice la integral sobre los conjuntos* $\{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq 1\}$ *y* $\{z \in \mathbb{R}^n : 1 < |z| \leq \frac{|x|}{2}\}$.

   e) *Usando los anteriores literales, concluya que se tiene la siguiente mayoración*

$$I_\alpha(g)(x) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n-\alpha}}.$$

   Esto prueba que para $\delta > 0$, *se tiene* $I_\alpha(g)(x) < +\infty$.

3. *Considerando la función* g *como en el numeral anterior y* $\delta > 0$. *Utilice la desigualdad demostrada en e) para indicar qué valores de* α *hacen que* $\|I_\alpha(g)\|_{L^2} < +\infty$.

Ejercicio 1.9. *Considere la dilatación normalizada en norma L^1 del núcleo de Gauss en una dimensión definido como:*

$$\mathfrak{g}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

1. *El objetivo de este numeral es probar que $\dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx}$ pertenece al espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, que por definición significa probar que $\left\| \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \left(\dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right) \right\|_{L^1} = \left\| \sup\limits_{t>0} \left| \left(\mathfrak{g}_t * \dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right) \right| \right\|_{L^1} < +\infty$. Para ello seguir los siguientes pasos:*

   a) *Grafique la función $\dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx}$.*

   b) *Muestre que $(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x) = \mathfrak{g}_{t+1}(x)$.*
   Indicación: Aplique un cambio de variable adecuado.

   c) *Muestre que*

   $$\left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right)(x) = \frac{d}{dx}(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x) = \frac{d\mathfrak{g}_{t+1}}{dx}(x) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}. \tag{5}$$

   d) *Si $|x| > \sqrt{6}$, verifique que se tiene*

   $$\sup_{t>0} \left| \left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right)(x) \right| = \sup_{t>0} \left| -\frac{x}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} \right| = \frac{C}{|x|^2},$$

   donde C es una constante.
   Indicación: Analice la primera derivada respecto a t de (5).

   e) *Si $|x| \leq \sqrt{6}$, verifique que se tiene*

   $$\sup_{t>0} \left| \left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right)(x) \right| = \sup_{t>0} \left| -\frac{x}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} \right| = C|x|e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

   donde C es una constante.
   Indicación: Analice la primera derivada respecto a t de (5).

   f) *Usando la información obtenida en los literales anteriores verifique que $\left\| \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right) \right\|_{L^1} < +\infty$.*
   Indicación: Analice la integral de $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{d\mathfrak{g}_1}{dx} \right)$ sobre el conjunto $\left\{ x \in \mathbb{R} : |x| > \sqrt{6} \right\}$ y su complemento.

2. *Por otro lado, se busca mostrar que $\mathfrak{g}_1 \notin \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, es decir que $\|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)\|_{L^1} = +\infty$. Para ello se debe realizar lo siguiente:*

   a) *Si $|x| > \sqrt{2}$, verifique que se tiene*

   $$\sup_{t>0} |(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)| = \sup_{t>0} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} \right| = \frac{C}{|x|},$$

   donde C es una constante.
   Indicación: Analice la primera derivada respecto a t de $(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)$.

   b) *Si $|x| \leq \sqrt{2}$, verifique que se tiene*

   $$\sup_{t>0} |(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)| = \sup_{t>0} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} \right| = Ce^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

   donde C es una constante.
   Indicación: Analice la primera derivada respecto a t de $(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)$.

   c) *Muestre que*

   $$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)(x)dx = +\infty.$$

d) *Concluya que* $\|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)\|_{L^1} = +\infty$.

Esto muestra que $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \neq L^1(\mathbb{R})$. *Más aún, se puede mostar que el espacio de Hardy* $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ *es un subconjunto estricto de* $L^1(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.10. *El objetivo de este ejercicio es proponer una demostración alternativa del Teorema de diferenciación de Lebesgue usando principalmente las propiedades de las medidas de Radón (En la resolución se hará uso de algunas propiedades y definiciones concernientes a la medida de Radón que se pueden revisar en [1]).*

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente integrable.*

1. *Para todo conjunto boreliano* $B \subset \mathbb{R}^n$, *definimos* $\nu^{\pm}(B) = \displaystyle\int_B f^{\pm}(x)dx$ *y para todo conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *consideramos*
$$\nu^{\pm}(A) = \inf\{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)\}.$$
Verifique que ν^+ *y* ν^- *son medidas de Radón.*

2. *Muestre que* ν^+ *y* ν^- *son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue.*

3. *Recordando que la derivada de Radón-Nikodyn de una medida de Radón* ν *con respecto a la medida de Lebesgue se define por*
$$D_{dx}(\nu)(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{|B(x,r)|},$$
utilizando el Teorema fundamental del cálculo de medidas de Radón, obtener las identidades
$$\nu^+(A) = \int_A D_{dx}(\nu^+)(x)dx = \int_A f^+(x)dx, \quad y$$
$$\nu^-(A) = \int_A D_{dx}(\nu^-)(x)dx = \int_A f^-(x)dx,$$
y deducir que se tienen las identificaciones $D_{dx}(\nu^{\pm}) = f^{\pm}$, *en casi todas partes.*

4. *Comprobar que se tiene la identidad*
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(x)dx = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}(\nu^+(B(x,r)) - \nu^-(B(x,r))).$$

5. *De los numerales anteriores, obtener el Teorema de diferenciación de Lebesgue.*

Ejercicio 1.11. *Sea* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx, \mathbb{R})$. *Se busca mostrar que*
$$\lim_{I\ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|dy = 0. \tag{6}$$
donde I *es un intervalo cerrado que contiene a* x *y el límite se toma cuando la longitud del intervalo* I *tiende a 0.*

1. *Para cada* $r \in \mathbb{Q}$, *se define la medida boreliana* μ_r *como sigue:*
$$\mu_r(A) = \int_A |f(y) - r|\mathbb{1}_{]a,b[}dy$$
para cada $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ *y donde* $]a,b[$ *es un intervalo abierto y acotado en* $\mathbb{R}$. *Muestre que* $D_{dx}(\mu_r)(x) = |f(x) - r|$ *casi todo punto en* $\mathbb{R}^n$.

2. *Muestre que*
$$\limsup_{I\ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

3. *Concluya.*

Referencias

[1] D Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 2.* Colección de Matemáticas Universitarias, N°2. Amarun, 2017.