Lección n°4: Introducción a los pesos A_p. EPN 2021

1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Sea ω un peso que pertenece a la clase A_1. Muestre que se tiene la estimación puntual*

$$\mathcal{M}(\omega)(x) \leq C\omega(x),$$

donde C es una constante positiva.

Ejercicio 1.2. *Sean $1 < p < +\infty$ y $\omega \in A_p$. Muestre que se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $\lambda > 0$, entonces se tiene que $[\delta_\lambda(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$, donde $\delta_\lambda(\omega)$ es la dilatación de la función ω definida como $\delta_\lambda(\omega)(x) = \omega(\lambda x)$.*
   Indicación: Recuerde que $|B(x, \lambda r)| = \lambda^n |B(x, r)|$ y $|B(x, r)| = |B(y, r)|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. *Si $y \in \mathbb{R}^n$, entonces se tiene que $[\tau_y(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$, donde $\tau_y(\omega)$ es la traslación de la función ω definida como $\tau_y(\omega)(x) = w(x + y)$.*
3. *Para todo $\lambda > 0$, se tiene $[\lambda\omega]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$.*

Ejercicio 1.3. *Sean $1 < p < +\infty$. Muestre que para cualquier peso $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene la estimación*

$$[\omega]_{A_p} \leq [\omega]_{A_1}.$$

Esto muestra que $A_1 \subset A_p$.

Ejercicio 1.4. *Sea $1 < p < +\infty$. Muestre que si $\omega \in A_p$, entonces el peso $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y además se tiene la identidad*

$$[\omega^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{p'}} = [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Indicación: Analice la cantidad $\left(\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right) \left(\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{(p-1)(p'-1)}} dx\right)^{p-1}$, para toda bola B.

Ejercicio 1.5. *Sobre el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$, sean $\omega \in A_p$, con $1 < p < +\infty$, y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y localmente integrable.*

1. *Aplicando la desigualdad de Hölder, muestre que se tiene*

$$\frac{1}{|B|^p} \left(\int_B f(x) dx\right)^p \leq \frac{1}{|B|} \left(\int_B f(x)^p \omega(x) dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

2. *Usando la estimación anterior, muestre que*

$$\underset{B}{prom}(f)^p \leq \frac{[\omega]_{A_p}}{\omega(B)} \int_B f^p(x)\omega(x) dx.$$

   Indicación: Multiplique y divida convenientemente por $\omega(B)$, con B una bola en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1.6. *Si $p > 1$, se busca mostrar que se tiene el límite*

$$\lim_{p \to 1} [\omega]_{A_p} = [\omega]_{A_1}.$$

Para ello, siga los siguientes pasos:

1. *Muestre que $\displaystyle\lim_{p \to 1} [\omega]_{A_p} \leq [\omega]_{A_1}$.*

2. *Muestre que* $[\omega]_{A_1} \leq \lim_{p\to 1}[\omega]_{A_p}$.

   Indicación: Recuerde que para toda función acotada sobre una bola B*, se tiene que* $\lim_{q\to+\infty} \|f\|_{L^q(B)} = \|f\|_{L^\infty(B)}$.

Ejercicio 1.7. *Considere* $1 < p < +\infty$.

1. *Verificar la siguiente estimación utilizando la desigualdad de Hölder*

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{\frac{1}{p}}(x)\omega^{-\frac{1}{p}}(x)dx \leq [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Deducir que se tiene la minoración* $1 \leq [\omega]_{A_p}$.

3. *Muestre que si* ω *es una función constante positiva entonces se tiene que* $[\omega]_{A_p} = 1$.

Ejercicio 1.8. *Sea* $\sigma \in \mathbb{R}$ *y sobre el espacio* $\mathbb{R}^n$ *consideremos la función* $(1 + |x|)^\sigma$.

1. *Recordando la división de bolas* $B(x_0, r)$ *utilizadas en la Lección n°4 definidas a continuación:*

   - *Las bolas de tipo* I*, que son las bolas tales que* $|x_0| \geq 3r$ *(no contienen el origen).*
   - *Las bolas de tipo* II*, que son las bolas tales que* $|x_0| < 3r$ *(contienen el origen).*

   Se busca probar que la medida $(1+|x|)^\sigma dx$ *es una medida duplicante para* $\sigma > -n$*, es decir, que cumple con la condición*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq C \int_{B(x_0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx. \tag{1}$$

   Para ello, siga los siguientes pasos:

   a) *Muestre que la medida* $(1 + |x|)^\sigma dx$ *es una medida sigma finita si* $\sigma > -n$.

   b) *Suponga que* $B(x_0, r)$ *es una bola de tipo* I*. Muestre que se tiene*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq 2^n r^n v_n \begin{cases} (1 + |x_0| + 2r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ (1 + |x_0| - 2r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases}$$

   c) *Bajo la misma suposición del literal anterior, muestre que se tiene*

$$\int_{B(x_0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx \geq r^n v_n \begin{cases} (1 + |x_0| - r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ (1 + |x_0| + r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases}$$

   d) *Suponiendo que* $B(x_0, r)$ *es una bola de tipo* I *y usando lo obtenido en los literales b) y c), concluya que se cumple la condición* (1) *para* $\sigma > -n$.

   e) *Suponga que* $B(x_0, r)$ *es una bola de tipo* II*. Muestre que se tiene*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq C(r^n + r^{\sigma+n}),$$

   y estudie qué pasa con esta cantidad cuando varían los valores de σ *y* r.
   Indicación: Recuerde que para dos números positivos a *y* b*, se tiene la desigualdad* $(a+b)^\sigma \leq C(a^\sigma + b^\sigma)$ *para todo* $\sigma > -n$.

   f) *Bajo la misma suposición del literal anterior y suponiendo que* $\sigma \geq 0$*, muestre que se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx \geq C \max\{r^n, r^{\sigma+n}\},$$

   y deduzca que se cumple la condición (1).
   Indicación: Aproveche que en este caso, la función $(1 + |x|)^\sigma$ *es radialmente creciente.*

   g) *Suponga que* $B(x_0, r)$ *es una bola de tipo* II *y* $-n < \sigma < 0$*. Muestre que se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx \geq C(1 + r)^\sigma r^n.$$

   Indicación: Aproveche que en este caso, la función $(1 + |x|)^\sigma$ *es radialmente decreciente.*

h) *Con la información obtenida en g), muestre que si $0 < r \leq 1$ entonces se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq Cr^n,$$

y deduzca, en este caso, que se cumple la condición (1).

i) *Con la información obtenida en g), muestre que si $r > 1$ entonces se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq Cr^{\sigma+n},$$

y deduzca, en este caso, que se cumple la condición (1).

2. *Determinar para qué valores de σ el peso $(1+|x|)^\sigma$ pertenece a una clase A_p, con $1 < p < +\infty$.*
Indicación: Proceda como en la demostración de la Proposición 2.2 vista en la Lección n°4.

Ejercicio 1.9. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva tal que $\varphi, \varphi^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Si $\omega \in A_p$ con $1 < p < +\infty$, muestre que la función producto $\varphi\omega$ sigue siendo un peso y que pertenece a A_p.*