Lección n°1: Funciones maximales, definiciones y propiedades.

EPN, UITEY 2020

Presentemos una pequeña motivación utilizando el resultado clásico del **Teorema de diferenciación de Lebesgue**, que relaciona el promedio de las funciones con su derivada. La demostración de este resultado usará nociones de funciones maximales, por lo que después de presentar el teorema, estudiaremos definiciones y propiedades relacionadas con funciones maximales.

1. Un teorema clásico

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Denotaremos a la medida de Lebesgue de un conjunto como $|\cdot|$. Empezamos estudiando la siguiente integral:

$$\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy,$$

que es en realidad un tipo de **promedio** de f sobre I. Deseamos saber que sucede con esta cantidad a medida que $|I|$ tiende a 0 (su longitud tiende a 0). Consideremos un punto $x \in \mathbb{R}$ y un intervalo $I = [x-h, x+h]$ con $h > 0$, con esto la integral anterior se puede ver como:

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)dy,$$

Si F es una primitiva de la función f, evaluando en la integral obtenemos:

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h},$$

que si tomamos $h \longrightarrow 0$, se obtiene los siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)dy = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Esto nos indica que el promedio sobre intervalos alrededor de un punto x de una función f se concentran, tomando intervalos más y más pequeños, en el valor $f(x)$. En otras palabras, promediar de esta manera sobre conjuntos cada vez más pequeños "anula" el proceso de integración.

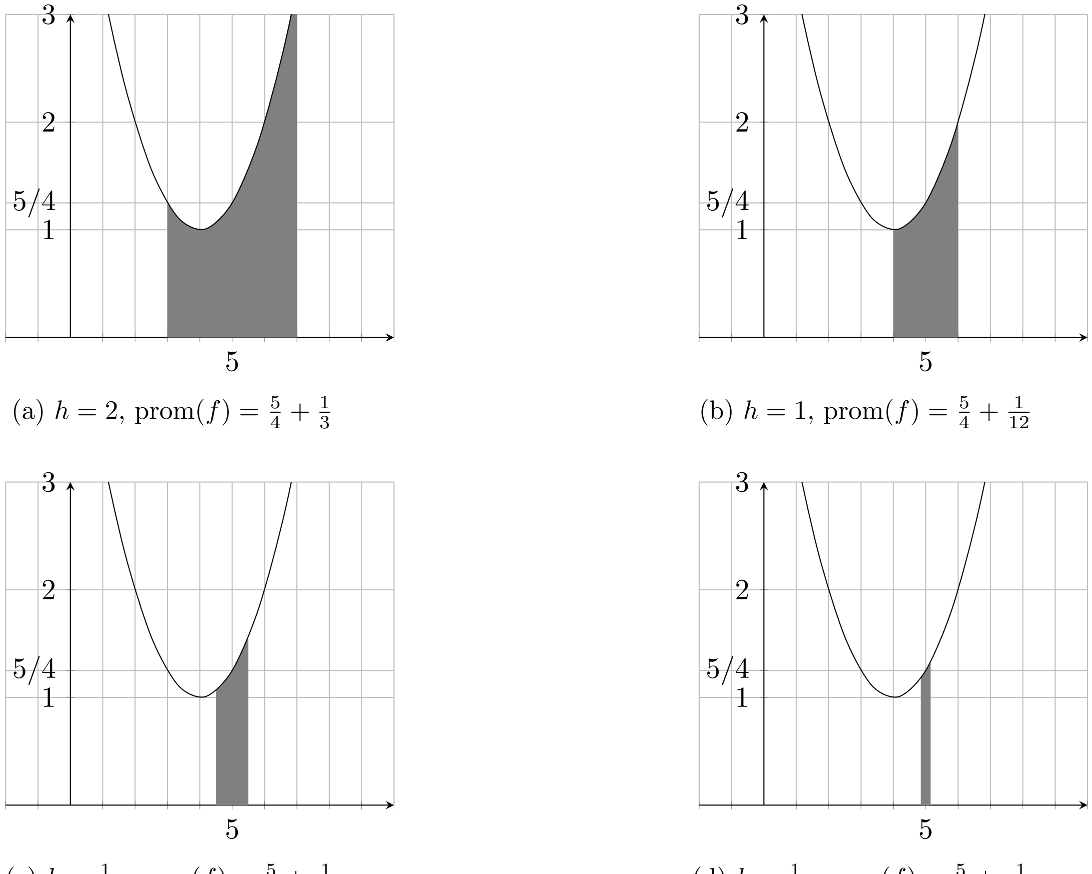
Para ilustrar este resultado, calculemos el promedio de la función $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$ sobre intervalos de longitud $2h$ alrededor de $x_0 = 5$. Si nos referimos a esta cantidad por $\text{prom}(f)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\int_{5-h}^{5+h}\frac{1}{4}(y-4)^2+1\,dy &= \frac{1}{2h}\left(\frac{y^3}{12}\bigg|_{5-h-4}^{5+h-4} + y\big|_{5-h}^{5+h}\right)\\ &= \frac{h^2}{12}+\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Podemos ver que

$$\lim_{h\to 0}\text{prom}(f) = f(5) = \frac{5}{4}.$$

De manera gráfica, en la Figura 1 se puede observar cómo a medida que se va tomando valores más pequeños de h, el valor del promedio de la función f se aproxima al valor de $f(5)$.



(a) $h=2$, $\mathrm{prom}(f)=\frac{5}{4}+\frac{1}{3}$

(b) $h=1$, $\mathrm{prom}(f)=\frac{5}{4}+\frac{1}{12}$

(c) $h=\frac{1}{2}$, $\mathrm{prom}(f)=\frac{5}{4}+\frac{1}{48}$

(d) $h=\frac{1}{8}$, $\mathrm{prom}(f)=\frac{5}{4}+\frac{1}{768}$

Figura 1: Promedio de la función $f(x)=\frac{1}{4}(x-4)^2+1$ alrededor de $x_0=5$, para distintas longitudes de intervalo de integración $2h$.

La generalización de este resultado para una dimensión cualquiera y para funciones más generales se da en el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Entonces se tiene el límite*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x),$$

para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$.

La deducción llevada a cabo en (1), previa a este teorema no se generaliza a dimensiones superiores, por lo que la demostración se la hará posteriormente utilizando funciones maximales y esta es una razón para estudiar estas funciones maximales.

2. Bolas, Cubos, y Promedios

Dado $x\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$, denotaremos la **bola abierta** centrada en x y de radio r, por

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|<r\}.$$

De la misma manera, los **cubos abiertos** de centro x y radio r estarán dados por

$$Q(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|<r\}.$$

Sea $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función localmente integrable, definimos el **promedio** de f sobre $B(x,r)$ y $Q(x,y)$ como

$$\boxed{\mathop{\mathrm{prom}}_{B(x,r)}(f)=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\mathop{\mathrm{prom}}_{Q(x,r)}(f)=\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)dy,}$$

respectivamente.

Algunas propiedades del promedio son:

- Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene a $B(x,r)$ y $Q(x,r)$, y f es constante en A ($f|_A \equiv C$), tenemos la identidad

$$f = \operatorname*{prom}_{B(x,r)}(f) = \operatorname*{prom}_{Q(x,r)}(f) = C.$$

- Si asumimos que f es positiva, dado que $B(x,r) \subseteq Q(x,r)$ y $Q(x,r) \subseteq B(x, \sqrt{2}r)$, obtenemos las siguientes desigualdades

$$\operatorname*{prom}_{B(x,r)}(f) \leq C_1 \operatorname*{prom}_{Q(x,r)}(f), \tag{2}$$

$$\operatorname*{prom}_{Q(x,r)}(f) \leq C_2 \operatorname*{prom}_{B(x,\sqrt{2}r)}(f). \tag{3}$$

  Donde C_1 y C_2 únicamente dependen de la dimensión del espacio (ver el Ejercicio 1.1). Cuando la dimensión es 1, las bolas y cubos coinciden, por lo que los promedios anteriores son iguales.

- El proceso de promediar es continuo. Es decir, para cada $r > 0$, las funciones

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \operatorname*{prom}_{B(x,r)}(f) \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \operatorname*{prom}_{Q(x,r)}(f) \in \mathbb{R},$$

  son continuas (ver el Ejercicio 1.2).

3. Función Maximal centrada de Hardy-Littlewood

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable, definimos las **funciones maximales centradas** de Hardy-Littlewood como

$$\boxed{\mathcal{M}_B(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\mathcal{M}_Q(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy,}$$

donde el supremo corre sobre las bolas y cubos abiertos de centro x respectivamente.

Algunas consecuencias inmediatas de estas definiciones son:

- $\mathcal{M}_B(f)(x) = \mathcal{M}_B(|f|)(x) \geq 0 \quad$ y $\quad \mathcal{M}_Q(f)(x) = \mathcal{M}_Q(|f|)(x) \geq 0.$
- Para todo $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname*{prom}_{B(x,r)}(|f|) \leq \mathcal{M}_B(f)(x) \quad \text{y} \quad \operatorname*{prom}_{Q(x,r)}(|f|) \leq \mathcal{M}_Q(f)(x).$$

- Dos funciones que solo difieren en un conjunto de medida nula tienen la misma función maximal.

Al estar basada la definición de función maximal en la de promedio, es lógico esperar que se repliquen ciertas propiedades. En efecto, haciendo uso de las estimaciones (2) y (3) (ver el Ejercicio 1.3), tenemos que las funciones maximales centradas sobre bolas y las funciones maximales centradas sobre cubos son puntualmente equivalentes,

$$\mathcal{M}_B(f)(x) \leq C_1\, \mathcal{M}_Q(f)(x), \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_Q(f)(x) \leq C_2\, \mathcal{M}_B(f)(x). \tag{5}$$

A partir de ahora, a menos que sea necesario distinguir entre promedios sobre bolas y cubos, denotaremos la función maximal centrada como $\mathcal{M}(f)$.

Habiendo presentado la función maximal centrada es natural preguntarse, ¿cuál es el comportamiento de $\mathcal{M}$ como operador? Revisemos algunos resultados que nos darán una idea.

Algunas propiedades de la función maximal centrada

A) Sublinealidad

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable.

- Para todo $\lambda \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos
$$\mathcal{M}(\lambda f)(x) = |\lambda| \mathcal{M}(f)(x).$$
- Si $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple
$$\mathcal{M}(f + g)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x) + \mathcal{M}(g)(x).$$

Esta propiedad es una consecuencia directa de la sublinealidad del valor absoluto.

B) Monotonía

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones localmente integrables tal que $|g(x)| \leq |f(x)|$ c.t.p. Entonces tenemos que

$$\mathcal{M}(g)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x).$$

Una implicación importante de esta propiedad, que nos será de utilidad más adelante, se obtiene al considerar la función $f\mathbb{1}_A$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible. Ya que $|f\mathbb{1}_A| \leq |f|$, tenemos la siguiente desigualdad

$$\boxed{\mathcal{M}(f\mathbb{1}_A)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x).}$$

Pero, ¿cómo podemos determinar una función maximal centrada?

Ejemplo. Encontremos la función maximal centrada correspondiente a la función indicatriz del intervalo cerrado $[a, b]$, $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Si $x \in]a, b[$, consideremos los siguientes casos

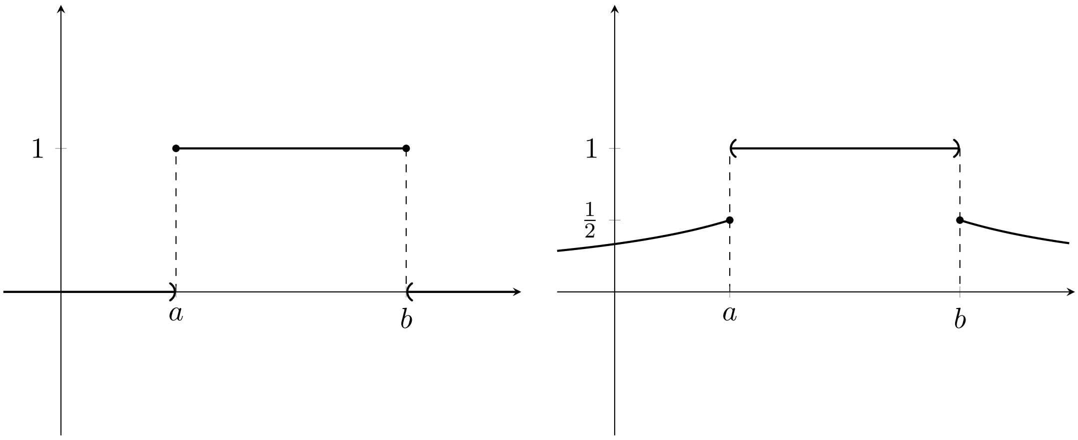
- Si $r < \text{mín}\{|x - a|, |x - b|\}$, entonces $f|_{B(x,r)}, \equiv 1$, ya que $B(x, r) \subset]a, b[$. Por lo tanto $\underset{B(x,r)}{\text{prom}}(|f|) = 1$.
- Si $r > \text{mín}\{|x - a|, |x - b|\}$, el valor de $\underset{B(x,r)}{\text{prom}}(|f|)$ disminuirá, ya que se tomarán en cuenta puntos fuera del soporte de f y se divirá por una longitud mayor.

Por lo tanto, tenemos que para todo $x \in]a, b[$, $\mathcal{M}(f)(x) = 1$. Estudiemos ahora el caso $x = a$,

- Si $0 < r \leq b - a$,
$$\frac{1}{|B(a, r)|} \int_{B(a,r)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y)dy = \frac{1}{2r} \int_a^{a+r} dy = \frac{1}{2}.$$
- Si $r > b - a$, $\underset{B(a,r)}{\text{prom}}(|f|)$ disminuye a medida que r crece.

Podemos ver entonces que $\mathcal{M}(f)(a) = \frac{1}{2}$, y de manera análoga que $\mathcal{M}(f)(b) = \frac{1}{2}$. Finalmente, consideremos el caso $x < a$,

- Si $0 < r \leq a - x$, es inmediato que $\underset{B(x,r)}{\text{prom}}(|f|) = 0$.
- Si $a - x < r \leq b - x$ entonces
$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y)dy = \frac{1}{2r} \int_a^{x+r} dy = \frac{1}{2r}(x + r - a).$$
- Si, en cambio $r > b - x$, tenemos que $\underset{B(x,r)}{\text{prom}}(|f|)$ decrece, dado que el valor de la integral no aumenta, pero la medida del intervalo para la que vamos a dividir sí.



(a) Grafo de $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ (b) Grafo de $\mathcal{M}(f)(x)$

Figura 2: Función maximal centrada correspondiente a una función característica

Concluimos que $r = b - x$ nos dará el valor maximal de $\underset{B(x,r)}{\mathrm{prom}}(|f|)$ en este caso, $\mathcal{M}(f)(x) = \frac{1}{2}\frac{b-a}{b-x}$. De manera análoga se obtiene que para $x > b$, $\mathcal{M}(f)(x) = \frac{1}{2}\frac{b-a}{x-a}$. De esta manera, hemos encontrado una expresión explícita de la función maximal de $\mathbb{1}_{[a,b]}$,

$$\mathcal{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{b-a}{b-x} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x \in]a,b[, \\ \frac{1}{2}\frac{b-a}{x-a} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

En el ejemplo previo, pudimos apreciar que aparte de no ser continua, $\mathcal{M}(f)$ conserva la acotación de f, ($\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty} = 1$). ¿Bajo qué condiciones se puede conservar este comportamiento tomando en cuenta funciones más generales?

Resultados de acotación para la función maximal centrada

A) Acotación $L^\infty - L^\infty$

Para toda función $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene que

$$\boxed{\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.}$$

Demostración. Podemos ver que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(f)(x)| &= \left| \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} dy = \|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

la desigualdad se sigue de esta acotación uniforme.

B) Una estimación interesante

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$, y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ medible de soporte compacto contenido en $B(x_0, r_0)$. Entonces

$$\boxed{|x| \geq |x_0| + r_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}(f)(x) \geq \frac{\|f\|_{L^1}}{v_n(2|x|)^n}}$$

donde $v_n = |B(0,1)|$.

Idea de la demostración:

- $\mathrm{supp}(f) \subseteq B(x_0, r_0) \subseteq B(x, |x - x_0| + r)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy = \int_{B(x,|x-x_0|+r)} |f(y)|dy.$$

- Usando la desigualdad triangular tenemos $|x-x_0|+r \leq |x|+|x_0|+r \leq 2|x|$, por lo tanto
$$\frac{1}{(2|x|)^n} \leq \frac{1}{(|x-x_0|+r)^n}.$$
- Finalmente,
$$\frac{\|f\|_{L^1}}{v_n(2|x|)^n} \leq \frac{1}{v_n(|x-x_0|+r)^n}\int_{B(x,|x-x_0|+r)} |f(y)|dy \leq \mathcal{M}(f)(x).$$

C) $\mathcal{M}(f)$ no se anula en ningún punto a menos que f lo haga c.t.p

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable, si $\mathcal{M}(f)(x)=0$ para algún x, $f(x)=0$ c.t.p.

Idea de la demostración:

- Por reducción al absurdo asumimos que existe $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{M}(f)(\overline{x})=0$ y $f\not\equiv 0$. Entonces $f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)}\not\equiv 0$ para algún $r_0>0$.
- Si $|\overline{x}|\geq r_0$,
$$\|f\mathbb{1}_{B(0,r_0)}\|_{L^1} \leq \mathcal{M}(f\mathbb{1}_{B(0,r_0)})(\overline{x})v_n(2|\overline{x}|)^n \leq \mathcal{M}(f)(\overline{x})v_n(2|\overline{x}|)^n = 0.$$
Entonces $f\mathbb{1}_{B(0,r_0)}\equiv 0$, una contradicción.
- Si $|\overline{x}|\leq r_0$, $B(0,r_0)\subset B(\overline{x},|\overline{x}|+r_0)$,
$$\frac{1}{B(\overline{x},|\overline{x}|+r_0)}\int_{B(\overline{x},|\overline{x}|+r_0)} |f\mathbb{1}_{B(0,r_0)}|dy \leq \mathcal{M}(f)(\overline{x})=0.$$
Nuevamente $f\mathbb{1}_{B(0,r_0)}\equiv 0$.

D) Problemas de acotación en L^1

Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable y no es idénticamente nula, $\mathcal{M}(f)\notin L^1(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

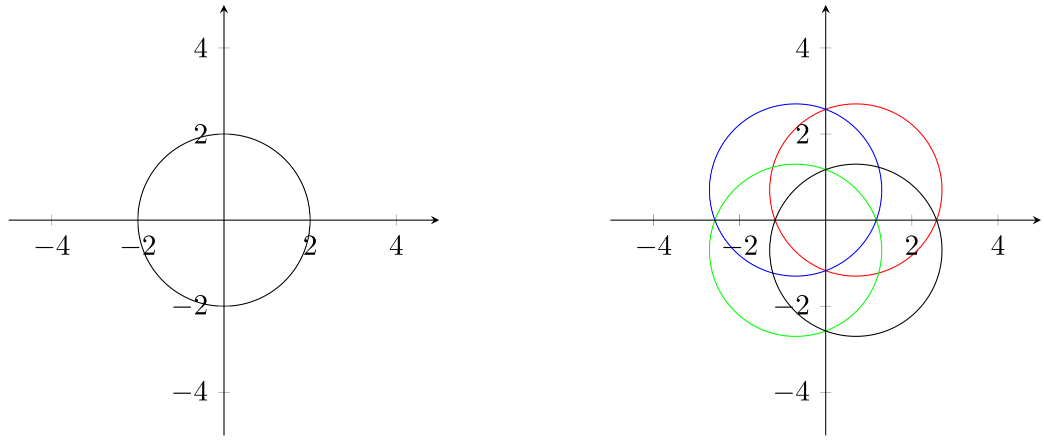
Idea de la demostración:

- $f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)}\not\equiv 0$ para algún $r_0>0$, entonces $0<\|f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)}\|_{L^1}=C<+\infty$.
- Calculamos la estimación
$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^1} \geq \|\mathcal{M}(f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)})\|_{L^1} \geq \int_{|x|\geq|x_0|+r_0} |\mathcal{M}(f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)})(x)|dx.$$
- Dado que para todo $|x|\geq|x_0|+r_0$ tenemos que $\mathcal{M}(f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)})(x)\geq \frac{C}{v_n(2|x|)^n}$, llegamos a la desigualdad
$$\int_{|x|\geq|x_0|+r_0} |\mathcal{M}(f\mathbb{1}_{B(x_0,r_0)})(x)|dx \geq \int_{|x|\geq|x_0|+r_0} \frac{C}{v_n(2|x|)^n}dx.$$
Pasando a coordenadas esféricas vemos que la última integral diverge.

4. Función Maximal no centrada de Hardy-Littlewood

En la sección anterior tomamos promedios sobre bolas (o cubos) centrados en un punto $x\in\mathbb{R}^n$. En este caso vamos a considerar promedios sobre bolas (o cubos) que contienen al punto x, sin estar obligados a estar centrados en el (por ello el nombre).

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. La **función maximal no centrada de Hardy-Littlewood** está dada por
$$\boxed{\mathscr{M}_B(f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathscr{M}_Q(f)(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy}$$
Que toma en cuenta todas las bolas y cubos en $\mathbb{R}^n$ respectivamente, que contienen a x.



(a) La única bola en $\mathbb{R}^2$ de radio 2 y centrada en $(0,0)$, $B(0,2)$

(b) Algunas bolas en $\mathbb{R}^2$ de radio 2 que contienen a $(0,0)$

Figura 3: Comparación de bolas centradas y no centradas en $\mathbb{R}^2$

- las funciones maximales no centradas $\mathscr{M}_B(f)$ y $\mathscr{M}_Q(f)$ son equivalentes con las mismas constantes que aparecieron en la sección anterior, es decir:

$$\boxed{\mathscr{M}_B(f)(x) \leq C_1 \mathscr{M}_Q(f)(x)} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\mathscr{M}_Q(f)(x) \leq C_2 \mathscr{M}_B(f)(x)}$$

  Por esto, usaremos indistintamente $\mathscr{M}(f)$ para denotar funciones maximales no centradas sobre bolas o cubos.

- $\mathscr{M}(|f|) = \mathscr{M}(f)$.

- Al usar el valor absoluto en las funciones maximales de Hardy-Littlewood se pierde información que puede ser vital, en particular todas las propiedades de cancelación, por ejemplo la propiedad de la integral nula $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$ se pierde al aplicar la función maximal.

Algunas propiedades de la función maximal no centrada

A) Sublinealidad

La función maximal no centrada $\mathscr{M}(f)$ es un operador sublineal.

- Aprovechando propiedades de de sublinealidad del supremo y del valor absoluto se puede ver fácilmente que

$$\mathscr{M}_B(\lambda f)(x) = |\lambda| \mathscr{M}_B(f)(x).$$

- Del mismo modo

$$\mathscr{M}_B(f+g)(x) \leq \mathscr{M}_B(f)(x) + \mathscr{M}_B(g)(x)$$

B) Monotonía

Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones localmente integrables tales que $|g(x)| \leq |f(x)|$ casi todas partes, entonces se tiene $\mathscr{M}(g)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x)$.

C) Equivalencia entre $\mathcal{M}$ y $\mathscr{M}$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x) \qquad \text{y} \qquad \mathscr{M}(f)(x) \leq 2^n \mathcal{M}(f)(x).$$

Esta propiedad nos da una noción de equivalencia puntual entre las funciones maximales $\mathcal{M}$ y $\mathscr{M}$ (ver el Ejercicio 1.6).

Ejemplo. Considere la función indicatriz $\mathbb{1}_{[a,b]}$.

- Primero consideremos $x \in]a,b[$ y $B \subset [a,b]$ tal que $x \in B$, tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \mathbb{1}_{[a,b]}(s)ds = 1.$$

  Así

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = 1.$$

- Ahora, si consideramos $x = a$ tomemos un número c tal que $a < c < \frac{3a+b}{4}$ y fijemos la bola de centro $x_0 = c$ y radio $r = (c-a)+\varepsilon$ con $\varepsilon \in]0, \frac{1}{8}[$. Es claro que $x \in B(x_0, r)$ y además

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \mathbb{1}_{[a,b]}(s)ds = \frac{2(c-a)+\varepsilon}{2(c-a)+2\varepsilon} < 1.$$

  Tomando supremo obtenemos

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = 1,$$

  y de manera análoga se razona para para $x = b$.

- Por último tomemos $x < a$, notemos que el promedio será mayor mientras más grande sea la intersección con $[a,b]$, así que consideremos la bola $B(z,r)$ donde $z = \frac{b+x}{2}$ y $r = \frac{b-x}{2}+\varepsilon$. Es claro que $x \in B(z,r)$ y

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \mathbb{1}_{B(z,r)}(s)ds = \frac{b-a}{(b-x)+\varepsilon} < 1.$$

  Tomando supremo sobre la anterior igualdad obtenemos que

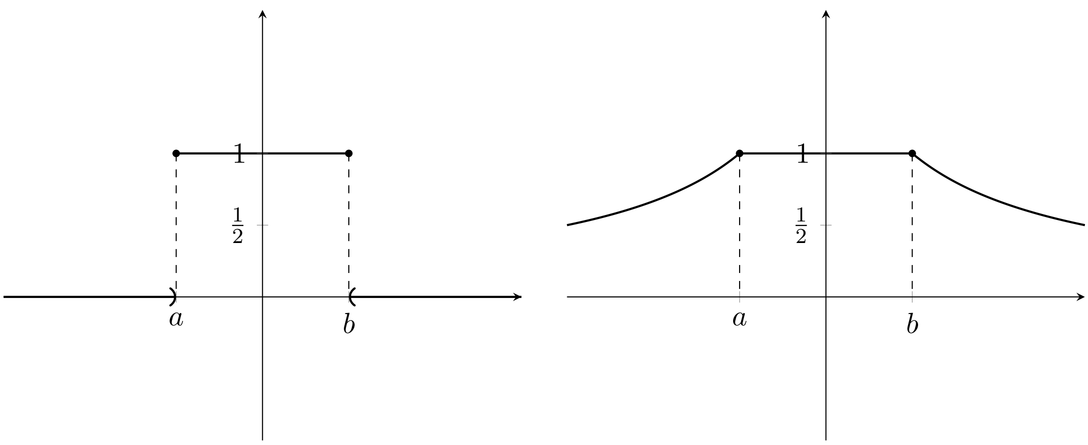
$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{b-a}{b-x}.$$

  Si $x > b$ siguiendo un razonamiento similar se ontiene que

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{b-a}{x-a}.$$

En resumen, hemos encontrado que:

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{b-x} & x < a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ \frac{b-a}{a-x} & x > b. \end{cases}$$



(a) Grafo de $(f)(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ (b) Grafo de $\mathscr{M}(f)(x)$

Resultados de acotación y semicontinuidad para la función maximal no centrada

Se espera que las propiedades para $\mathscr{M}$ sean similares a las de $\mathcal{M}$.

A) Acotación $L^\infty - L^\infty$

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que pertenece al espacio de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces se tiene la mayoración

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Es decir, $\mathscr{M}$ es un operador sublineal acotado en los espacios de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

Idea de la demostración:

- Se procede de igual manera que en el caso para $\mathcal{M}$.
- Basta notar que

$$|\mathscr{M}(f)(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \left|\sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|}\int_B dy\right|,$$

c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. ■

B) Acotación $L^1 - L^1$

Si una función localmente integrable $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ no es identicamente nula, entonces la función maximal no centrada de Hardy-Littlewood $\mathscr{M}(f)$ nunca pertenece al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

Idea de la demostración:

- Basta recordar que para cualquier función localmente integrable se tiene la mayoración

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x)$$

y usar la propiedad de acotación en $L^1 - L^1$ para $\mathcal{M}$. ■

C) Semi-continuidad inferior

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable, entonces la función maximal no centrada $\mathscr{M}(f)$ es semi-continua inferiormente.

Para la demostración tenemos que recordar que una función $\varphi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es **semi-continua inferiormente** si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Idea de la demostración:

- Recordar que, si $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \mathscr{M}(f)(x) > \alpha\}$ entonces existe una bola abierta B_{x_0} tal que

$$\frac{1}{|B_{x_0}|}\int_{B_{x_0}} |f(y)|dy > \alpha.$$

- Por definición de función maximal se tiene que $\mathscr{M}(f)(x) > \alpha$ para todo $x \in B_{x_0}$. Es decir

$$B_{x_0} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mathscr{M}(f)(x) > \alpha\}.$$

■