Lección n°2: Dos teoremas fundamentales.

EPN, UITEY 2021

Introducción

En la Lección n°1, se vió que las funciones maximales centradas $\mathcal{M}$ de Hardy-Littlewood son acotadas en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\boxed{\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq C\, \|f\|_{L^\infty}.}$$

Además, se obtuvo también que *nunca* se tiene la siguiente desigualdad

$$\boxed{\|\mathcal{M}(f)\|_{L^1} \leq C\, \|f\|_{L^1},}$$

a menos que $f \equiv 0$ casi en todas partes. Estos resultados se mantienen con las funciones maximales no centradas $\mathscr{M}$. Surgen entonces las siguientes preguntas:

- ¿Existen $C > 0$ y $1 < p < +\infty$ tal que $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C\, \|f\|_{L^p}$?
- ¿Qué espacio funcional F nos permite obtener la desigualdad $\|\mathcal{M}(f)\|_F \leq C\, \|f\|_{L^1}$?

En la presente lección daremos respuesta a estas interrogantes en nuestro primer teorema fundamental. Veremos que el espacio de Lorentz $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ es el que buscamos en la segunda pregunta y, haciendo uso de esto, junto con algunos resultados vistos en la Lección n°1, obtenemos la respuesta a la primera pregunta.

En nuestro segundo resultado fundamental estudiaremos cómo la función maximal de Hardy-Littlewood controla a otras funciones maximales. Usar funciones maximales con distintas propiedades brinda una verstilidad de trabajo esencial en distintas ramas del análisis armónico, del análisis funcional, y en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

1. Espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$

Los espacios de Lorentz son útiles pues optan por una forma distinta de medir el *tamaño* de las funciones. Únicamente se hará aquí el estudio del espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ para $1 \leq p < +\infty$, sin embargo hay que tener en cuenta que la definición puede generalizarse para $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ con $1 \leq q \leq +\infty$.

Antes de definir este espacio, consideremos $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se define la **función de distribución** $d_f : [0, +\infty[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ asociada a f como

$$d_f(\alpha) = |\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}| \qquad \forall \alpha > 0.$$

Una identidad importante que se obtiene de esta definición es (para $1 \leq p < +\infty$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible):

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Con esto, se puede definir a los espacios de Lorentz de la siguiente manera:

Definición (Espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$)**.** *Sea $0 < p < +\infty$. Definimos al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ al espacio de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \right\} < +\infty. \tag{2}$$

Para comenzar a analizar este espacio, se puede ver que $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial de clases de funciones, como se ha trabajado en los espacios de Lebesgue, con las mismas operaciones de suma y multiplicación por escalar. Es clave notar también que, aunque se usa la notación $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$, esta cantidad no es una norma pues no cumple la desigualdad triangular.

Presentemos una propiedad que muestra en realidad la importancia de los espacios de Lorentz y que, en efecto, son generalizaciones de los espacios de Lebesgue en el sentido de que contienen muchas más funciones.

Proposición 1.1 (Inclusión Lebesgue-Lorentz)**.** *Sea $1 \leq p < +\infty$, entonces tenemos la inclusión:*

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}).$$

Además tenemos que, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Demostración. Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p dx + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p dx \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p dx.$$

Dado que integramos sobre $\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \alpha\}$ tenemos

$$\int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p dx \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} dx = \alpha^p d_f(\alpha).$$

Entonces, para todo $\alpha > 0$ tenemos la estimación $\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)$ y por lo tanto $\|f\|_{L^p} \geq \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \|f\|_{L^{p,\infty}}$. ■

2. Interpolación

En esta sección presentaremos el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, el cual es esencial para la demostración de nuestro resultado principal.

Definición (Espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$)**.** *Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ un espacio medido y sean $0 < p_0, p_1 \leq +\infty$ dos números reales, definimos el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ como el conjunto de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ que se pueden descomponer como*

$$f = f_0 + f_1,$$

donde $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. La pertenencia de una función f a este espacio se puede caracterizar usando

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} = \inf_{f=f_0+f_1} \{\|f_0\|_{L^{p_0}} + \|f_1\|_{L^{p_1}}\} < +\infty.$$

La siguiente proposición establece una relación entre los espacios de Lorentz y el espacio $L^1 + L^\infty$.

Proposición 2.1. *Sea $1 < p < +\infty$, un parámetro real, entonces tenemos la inclusión*

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}) \subset L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}).$$

Demostración. Sea $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Si γ es una constante positiva, definimos entonces las funciones f_1 y f_∞, tal que $f = f_1 + f_\infty$ de la siguiente manera:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma, \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma. \end{cases}$$

Usando la función de distribución de la función f_0 tenemos que si $\alpha > \gamma$

$$d_{f_1}(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f_1(x)| > \alpha\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| = d_f(\alpha),$$

y si $\alpha \leq \gamma$ tenemos

$$d_{f_1}(\alpha) = |\,\{x \in \mathbb{R}^n : |f_1(x)| > \alpha\}\,| = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}| = d_f(\gamma).$$

De la misma manera, para la función f_∞ si $\alpha \geq \gamma$ tenemos

$$d_{f_\infty}(\alpha) = |\,\{x \in \mathbb{R}^n : |f_1(x)| > \alpha\}\,| = 0,$$

mientras que si $\alpha < \gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} d_{f_\infty}(\alpha) &= |\,\{x \in \mathbb{R}^n : |f_\infty(x)| > \alpha\}\,| = |\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma \geq |f(x)| > \alpha\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}^c| \\ &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| - |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}| = d_f(\alpha) - d_f(\gamma). \end{aligned}$$

Es decir que se tiene

$$d_{f_1} = \begin{cases} d_f(\alpha) & \text{si } \alpha > \gamma, \\ d_f(\gamma) & \text{si } \alpha \leq \gamma, \end{cases} \quad \text{y} \quad d_{f_\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq \gamma, \\ d_f(\alpha) - d_f(\gamma) & \text{si } \alpha < \gamma. \end{cases}$$

Usando esto, junto con la caracterización (1), y la definición de espacios de Lorentz, escribimos

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^1} &= \int_0^\gamma d_{f_1}(\alpha)d\alpha + \int_\gamma^{+\infty} d_{f_1}(\alpha)d\alpha = \int_0^\gamma d_f(\gamma)d\alpha + \int_\gamma^{+\infty} d_f(\alpha)d\alpha \\ &\leq d_f(\gamma)\gamma + \sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\} \int_\gamma^{+\infty} \alpha^{-p} d\alpha \\ &\leq \sup_{\gamma>0}\{\gamma^p d_f(\gamma)\}\,\gamma^{1-p} + \sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\}\,\frac{1}{p-1}\gamma^{1-p} \\ &\leq \frac{p}{p-1}\gamma^{1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} < +\infty. \end{aligned}$$

Dado que por construcción tenemos que $\|f_\infty\|_{L^\infty} \leq \gamma < +\infty$, concluimos la demostración. ■

Corolario 2.1. *Sea $1 < p < +\infty$. Entonces tenemos la siguiente inclusión:*

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}) \subset L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}).$$

La inclusión es una aplicación directa de las Proposiciones 1.1 y 2.1.

Teorema 2.1 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz)**.** *Sea T un operador sublineal definido sobre el espacio $L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y a valores en el espacio $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$ de funciones medibles, finitas en casi todas partes, definidas sobre $\mathbb{R}^n$ a valores en $\mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} T\colon L^1 + L^\infty &\longrightarrow \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)) \\ f &\longmapsto T(f). \end{aligned}$$

Supongamos que existen dos constantes positivas C_1 y C_∞ tales que:

$$\|T(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C_1\|f\|_{L^1}, \quad \textit{para toda función } f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}), \tag{3}$$

$$\|T(f)\|_{L^\infty} \leq C_\infty\|f\|_{L^\infty}, \quad \textit{para toda función } f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}). \tag{4}$$

Entonces para todo $1 < p < \infty$ y para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, tenemos

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p},$$

en donde $C = 2\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} C_1^{1/p}\, C_\infty^{1-1/p}$.

Demostración.

- Tomemos una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ con $1 < p < +\infty$ y $\alpha > 0$. Descomponemos a f como $f = f_1 + f_\infty$, donde

$$f_1 = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_\infty = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha, \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha. \end{cases}$$

  Más adelante obtendremos el valor del parámetro positivo δ. Por el corolario 2.1 tenemos que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx,$ y $f_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

- Usando la sublinealidad de T, tenemos que

$$|T(f)| = |T(f_1 + f_\infty)| \leq |T(f_1)| + |T(f_\infty)|,$$

  lo que implica la inclusión

$$\{y \in Y \colon |T(f)(y)| > \alpha\} \subseteq \{y \in Y \colon |T(f_1)(y)| > \alpha/2\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n \colon |T(f_\infty)(y)| > \alpha/2\},$$

  y por lo tanto, tenemos la desigualdad

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_1)}(\alpha/2) + d_{T(f_\infty)}(\alpha/2).$$

- Si tomamos $\delta = \frac{1}{2C_\infty}$, por hipótesis tenemos que $\|T(f_\infty)\|_{L^\infty} \leq C_\infty \|f_\infty\|_{L^\infty} \leq C_\infty \delta\alpha = \alpha/2$. Por lo tanto $|\{y \in \mathbb{R}^n \colon |T(f_\infty)(y)| > \alpha/2\}| = 0$, y

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_1)}(\alpha/2).$$

  Usando esta estimación, y recordando que $\|f_1\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \{\alpha \, d_{f_1}(\alpha)\}$, tenemos la desigualdad

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq (\alpha/2)^{-1} \|T(f_1)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq (\alpha/2)^{-1} C_1 \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{5}$$

- Usando (5) y la caracterización (1), escribimos:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha \leq p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left((\alpha/2)^{-1} C_1 \, \|f_1\|_{L^1} \right) d\alpha \\ &\leq 2\, p\, C_1 \int_0^{+\infty} \alpha^{p-2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| \, d\mu(x) d\alpha \\ &\leq 2\, p\, C_1 \int_0^{+\infty} \alpha^{p-2} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)| d\mu(x) d\alpha \\ &\leq 2\, p\, C_1 \int_0^{+\infty} \alpha^{p-2} \int_{\{2C_\infty |f|>\alpha\}} |f(x)| d\mu(x) d\alpha. \end{aligned}$$

- Finalmente, aplicamos el teorema de Fubini para obtener la desigualdad deseada:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 2\, p\, C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{2C_\infty |f|} \alpha^{p-2} d\alpha d\mu(x) \\ &\leq 2\, p\, C_1 \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |f(x)|^{p-1} (2\, C_\infty)^{p-1} d\mu(x) \\ &\leq 2^p \, C_1 \, C_\infty^{p-1} \frac{p}{p-1} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

■

3. El resultado central

Empecemos nuestro estudio con un resultado importante, que consiste en obtener a partir de una familia de bolas, otra que la recubra, triplicando el radio de ciertas bolas:

Lema 3.1 (Recubrimiento de Vitali)**.** *Sea $B(x_0, r_0), ..., B(x_N, r_N)$ una familia finita de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. Entonces es posible formar a partir de esta familia una colección de bolas $\bar{B}_0, ..., \bar{B}_M$ que son dos a dos disjuntas y tales que se tenga*

$$\sum_{i=0}^{M} |\bar{B}_i| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=0}^{N} B(x_i, r_i) \right|.$$

Idea de la Demostración.

- Reorganizamos (y renombramos si es necesario) las bolas de manera que

$$|B(x_0, r_0)| \geq |B(x_1, r_1)| \geq ... \geq |B(x_N, r_N)|.$$

- Fijamos $\bar{B}_0 = B(x_0, r_0)$ y determinamos $\bar{B}_1$ como la bola $B(x_i, r_i)$ con menor índice i que sea disjunta con $\bar{B}_0$.
- Determinamos el resto de bolas por inducción. Asumiendo que hemos fijado $\bar{B}_0, \bar{B}_1, ..., \bar{B}_i$, tomamos $\bar{B}_{i+1} = B(x_k, r_k)$ donde k sea el mínimo índice tal que $\bar{B}_{i+1}$ sea disjunta de $\bigcup_{j=0}^{i} \bar{B}_j$.
- Si una bola $B(x_k, r_k)$ no fue escogida, es porque se intersecta con alguna bola $\bar{B}_i$, entonces por construcción tenemos que $|B(x_k, r_k)| \leq |\bar{B}_i|$ y $B(x_k, r_k) \subset 3\bar{B}_i$.
- Concluimos que

$$\left| \bigcup_{i=0}^{N} B(x_i, r_i) \right| \leq \left| \bigcup_{i=0}^{M} 3\bar{B}_i \right| \leq \sum_{r=1}^{l} |3\bar{B}_{j_r}| = 3^n \sum_{i=0}^{M} |\bar{B}_i|.$$

■

Ahora estamos listos para presentar el primer teorema fundamental:

Teorema 3.1 (Acotación de la función maximal)**.**

1. *Existe una constante universal $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}. \tag{6}$$

   Es decir que la función maximal centrada $\mathcal{M}$ envía el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ en el espacio de Lorentz $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Este resultado se mantiene para la función maximal no centrada $\mathscr{M}$ y se tiene la desigualdad

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}. \tag{7}$$

2. *Sea $1 < p < +\infty$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}. \tag{8}$$

   En el caso de la función maximal no centrada $\mathscr{M}$ se tiene la mayoración

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^p} \leq C' \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}. \tag{9}$$

3. *Si $p = +\infty$ se tiene*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \quad y \quad \|\mathscr{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Demostración.

1. Probemos la desigualdad (7).

   - Por la definición de espacio de Lorentz $L^{1,\infty}$ basta probar que para todo $\alpha > 0$,

   $$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\}| \leq C\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}.$$

   - Tomemos entonces $\alpha > 0$ genérico. Por la semi-continuidad inferior de $\mathscr{M}(f)$, tenemos que

   $$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\},$$

   es abierto.

   - Entonces para todo $x \in K$, un subconjunto compacto de E_α, existe una bola abierta B_x que contiene a x tal que

   $$\int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha|B_x|. \tag{10}$$

   - Usando la compacidad de K, obtenemos un recubrimiento finito de bolas abiertas $B_0, ..., B_N$ que satisfacen (10). Aplicando el Lema 3.1, se obtiene una subcolección de bolas abiertas y disjuntas $\bar{B}_0, ..., \bar{B}_M$, tales que al triplicar su radio se recubra K. Entonces

   $$|K| \leq \sum_{i=0}^{N} |B_i| \leq 3^n \sum_{i=0}^{M} |\bar{B}_i| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=0}^{M} \int_{\bar{B}_i} |f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

   - Finalmente, usando la regularidad interior de la medida de Lebesgue, tenemos que

   $$|E_\alpha| = \sup\{|K| : K \subseteq E_\alpha,\, K \text{ compacto}\} \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

   Puesto que se cumple para cualquier $\alpha > 0$, tomando el supremo en la desigualdad anterior se obtiene

   $$\sup_\alpha \alpha|E_\alpha| \leq 3^n\|f\|_{L^1},$$

   y aplicando la definición de espacio de Lorentz en lo anterior se llega a la desigualdad deseada

   $$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}.$$

   - La demostración de la desigualdad (6) es inmediata recordando que $\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x)$.

2. La acotación de $\mathcal{M}$ y $\mathscr{M}$ en L^∞ fue estudiada en la Lección n°1, lo que resuelve el punto 3. Analicemos entonces el caso $1 < p < +\infty$.

   - Si $f \in L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, consideremos la descomposición $f = g + h$, en donde se tiene $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.
   - Por la sublinealidad de $\mathcal{M}$ y $\mathscr{M}$ tenemos que $\mathcal{M}(f) \leq \mathcal{M}(g) + \mathcal{M}(h)$ y $\mathscr{M}(f) \leq \mathscr{M}(g) + \mathscr{M}(h)$. Dado que L^1 y L^∞ están contenidos en L^1_{loc}, $\mathcal{M}(f)$ y $\mathscr{M}(f)$ están bien definidas.
   - Dado que por las Proposiciones 1.1 y 2.1, para $1 < p < +\infty$ y el espacio L^p está contenido en $L^1 + L^\infty$, tenemos que $\mathcal{M}$ y $\mathscr{M}$ están definidas sobre L^p con $1 < p < +\infty$.
   - Recordemos que tenemos las estimaciones

   $$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}, \quad \|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}, \quad \text{y} \quad \|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}, \quad \|\mathscr{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

   - Finalmente, solo queda por aplicar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, para obtener

   $$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} \qquad \text{y} \qquad \|\mathscr{M}(f)\|_{L^p} \leq C'\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}.$$

■

4. Control sobre otras funciones maximales

En estas sección se verá que es posible construir una multitud de funciones maximales a partir de un producto convolución adecuado y de que manera estas funciones máximales son controladas puntualmente por las funciones maximales de Hardy-Littlewood (centradas o no centradas). Para empezar, se puede notar que en efecto, la función maximal centrada de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ puede obtenerse con la ayuda de un producto en convolución. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente integrable, entonces se tiene

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{v_n r^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{\{|x-y|<r\}}dy = \frac{1}{v_n r^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_{\{|y|/r<1\}}dy, \tag{11}$$

donde v_n es el volumen de la bola unidad. Ahora, si definimos

$$\phi_r(y) = \frac{1}{v_n r^n}\mathbb{1}_{B(0,1)}(y/r), \tag{12}$$

junto con (11) se obtiene

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_r(y)dy = (f * \phi_r)(x).$$

Es claro que esta igualdad se cumple también para $|f|$, por tanto se tiene la identidad

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0}(|f| * \phi_r)(x),$$

es decir, la función maximal centrada de Hardy-Littlewood se puede describir a partir de un producto de convolución junto con la función ϕ_r que no es más que la función indicatriz de la bola unidad dilatada y normalizada.

La familia de funciones maximales que deseamos estudiar aquí se obtendrán reemplazando la función ϕ_r definida en (12) por otras funciones con propiedades particulares.

Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y sea $t > 0$ un parámetro real. Diremos que $(\phi_t)_{t>0}$ es una **dilatación normalizada en norma** L^1 de la función ϕ si se tiene

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

- Se puede mostrar que $\|\phi_t\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$.
- Se ve sin problema que la función definida en (12) es en efecto la dilatación normalizada en norma L^1 de $\phi = \frac{1}{v_n}\mathbb{1}_{B(0,1)}$.

Con esto procedemos a definir funciones maximales asociadas a diversas funciones base ϕ. Consideremos $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que pertenece al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y sea $(\phi_t)_{t>0}$ una dilatación normalizada en norma L^1 construida a partir de ϕ.

Para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, definimos la **función maximal** $\mathcal{M}_\phi$ asociada a la función ϕ por medio de la expresión

$$\boxed{\mathcal{M}_\phi(f)(x) = \sup_{t>0}|(f * \phi_t)(x)|.}$$

- Notemos que el valor absoluto está afuera de la convolución y esto tiene consecuencias fundamentales que se verán posteriormente.
- Se deben imponer ciertas propiedades que deben cumplir las funciones ϕ y f para que la expresión $\mathcal{M}_\phi$ tenga sentido y no sea infinito.

Teorema 4.1. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$ una función positiva, radial y radialmente decreciente. Si además la función ϕ verifica la condición*

$$\phi(x) \leq C(1 + |x|)^{-(n+\delta)}, \tag{13}$$

para algún $\delta > 0$ y en donde $C > 0$ es una constante, entonces se tiene la siguiente estimación puntual

$$\mathcal{M}_\phi(f)(x) \leq \|\phi\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x),$$

para toda función localmente integrable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Demostración.

- Para demostrar el resultado, primero se debe mostrar que $|(f * \phi)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x)$.
- Suponga que ϕ es de la forma
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{B_i}$$
Donde a_i son constantes positivas y $B_i = B(0, r_i)$ son bolas cerradas centradas en el origen de radios r_i finitos. Nótese que $\|\phi\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{N} a_i |B_i|$.
- Gracias a la deducción del inicio de la sección se tiene
$$|(f * \phi)(x)| = \left| f * \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{N} a_i |B_i| \mathcal{M}(f)(x) = \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$
- En el caso general tenemos que para ϕ una función radial y radialmente decrecientes, podemos aproximar con estas funciones escalonadas, así obteniendo
$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$
- Se reemplaza ϕ por la dilatación ϕ_t en la última desigualdad para obtener
$$|(f * \phi_t)(x)| \leq \|\phi_t\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x) = \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$
- A partir de esta cota uniforme en $t > 0$, tomamos supremo y obtenemos justamente
$$|\mathcal{M}_\phi(f)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

■

Notemos que la desigualdad (13) implica que $\|\phi\|_{L^1} < +\infty$. Por otro lado, la conclusión de este teorema nos permite deducir las siguientes estimaciones
$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{L^1} \qquad \text{y} \qquad \|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$
para todo $1 < p \leq +\infty$. Más aún, $\mathcal{M}_\phi$ está bien definida en los espacios de Lebesgue y de Lorentz.

Se puede relajar la hipótesis (13) obteniendo la siguiente generalización.

Corolario 4.1. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva que admite un mayorante acotado, integrable, radial y radialmente decreciente Φ: es decir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\phi(x) \leq \Phi(x)$, se tiene $\Phi \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, y que la función Φ es radial y decrece si el radio aumenta. Entonces, para toda función localmente integrable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene la desigualdad*
$$\mathcal{M}_\phi(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

Cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

- Como se puede ver de los Teoremas 3.1 y 4.1, el estudio de los operadores $\mathcal{M}_\phi$, bajo ciertas condiciones, recae en estudiar las funciones maximales de Hardy-Littlewood, lo que refuerza la importancia del estudio inicial de la Lección n°1.
- Presentamos dos ejemplos clásicos de funciones bases ϕ que merecen ser detallados pues son fuente de numerosos desarrollos tanto en análisis armónico como en el análisis funcional y en el estudio de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Núcleo de Poisson

El núcleo de Poisson está determinado por la expresión

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

en donde $c_n = \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1/2)}}$, lo que garantiza que $\|\mathfrak{p}\|_{L^1} = 1$. Es inmediato verificar que $\mathfrak{p}$ es acotada, radial y radialmente decreciente de manera que una aplicación directa del Teorema 4.1 nos proporciona la estimación puntual

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \mathfrak{p}_t)(x)| \leq \mathcal{M}(f)(x),$$

para toda función localmente integrable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Núcleo de Gauss

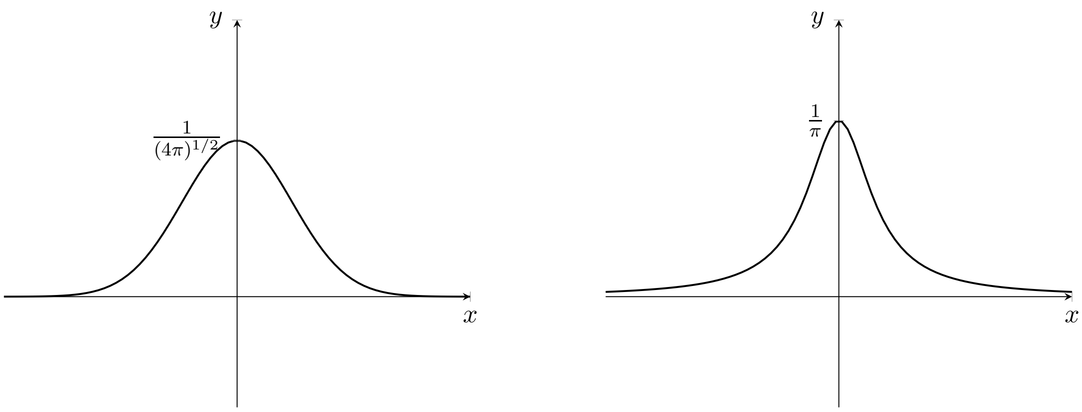
El núcleo de Gauss está determinado por

$$\mathfrak{g}(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4}},$$

que verifica $\|\mathfrak{g}\|_{L^1} = 1$ y que es una función acotada, integrable, radial y radialmente decreciente. De la misma manera que en el ejemplo anterior, considerando la dilatación normalizada $(\mathfrak{g}_t)_{t>0}$ y aplicando el Teorema 4.1 se obtiene la estimación puntual

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \mathfrak{g}_t)(x)| \leq \mathcal{M}(f)(x)$$

para toda función localmente integrable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.



(a) Núcleo de Gauss para $n = 1$. (b) Núcleo de Poisson para $n = 1$.