Lección n°3: Tres Aplicaciones.

EPN 2021

Introducción

Gracias al estudio previo de las Lecciones n°1 y n°2 sobre los operadores maximales de Hardy-Littlewood, podemos abordar tres aplicaciones de estos operadores. La primera de ellas es demostrar el Teorema de diferenciación de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ que se presentó como motivación en la Lección n°1. La segunda es presentar una demostración para las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev. Por último, cerraremos esta lección presentando una caracterización para los espacios de Lebesgue con $1 < p \leq +\infty$ usando las funciones maximales de Hardy-Littlewood.

1. Teorema de diferenciación de Lebesgue

Teorema 1.1 (de diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable, entonces se tiene el límite*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \tag{1}$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración.

- Consideremos una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Recordemos que el promedio de una función f se lo puede expresar como
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = (f * \phi_r)(x).$$
donde $(\phi_r)_{r>0}$ es una dilatación en norma L^1 de la forma
$$\phi_r(y) = \frac{1}{v_n r^n}\mathbb{1}_{B(0,1)}(y/r).$$
Notemos también que la familia $(\phi_r)_{r>0}$ es una aproximación de la identidad y por lo tanto, de [1, Teorema 4.4.3] se sigue
$$\lim_{r\to 0} \|f - f * \phi_r\|_{L^1} = 0$$
de donde se deduce (1) de manera que basta verificar que dicho límite sea finito en casi todas partes.

- Definamos la siguiente cantidad para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$
$$Osc(f)(x) = \left|\limsup_{r\to 0}(f * \phi_r)(x) - \liminf_{r\to 0}(f * \phi_r)(x)\right|, \tag{2}$$
que permite medir las oscilaciones de la familia $(f * \phi_r)_{r>0}$ cuando $r \to 0$.

  Del segundo punto de [1, Teorema 4.4.3] se sabe que si una función f es continua con soporte contenido en un compacto, entonces $\lim\limits_{r\to 0} f * \phi_r = f$ uniformemente y en este caso $Osc(f) = 0$.

- Ahora, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$, lo que se puede reescribir como

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : 2\mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{2C}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

  Notando que $Osc(f)(x) \leq 2\mathcal{M}(f)(x)$, se obtiene el control

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Osc(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{2C}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

- De la densidad de las funciones continuas a soporte compacto en $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, podemos expresar a toda función f en este espacio como $f = g + h$ donde g es una función a soporte compacto y h tal que su norma en L^1 es tan pequeña como se desee. En este marco se tiene $Osc(f) \leq Osc(g) + Osc(h)$ pero $Osc(g) = 0$, entonces obtenemos $Osc(f) \leq Osc(h)$, de donde se deduce que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Osc(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{2C}{\alpha}\|h\|_{L^1}.$$

  Como la cantidad $\|h\|_{L^1}$ es tan pequeña como se desee, se deduce que $Osc(f) = 0$ casi todas partes, lo que demustra (1) para $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

- Para el caso general de una función localmente integrable f, basta replicar los argumentos precedentes considerando f multiplicada por una función indicatriz sobre una bola de radio finito y reescribir $\mathbb{R}^n$ por medio de la unión numerable de bolas. ■

Este resultado nos da la idea de que podemos recuperar *casi* todos los valores de una función localmente integrable a partir del límite de promedios sobre bolas, haciendo énfasis en que no se puede recuperar todo valor. En efecto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0, \end{cases} \tag{3}$$

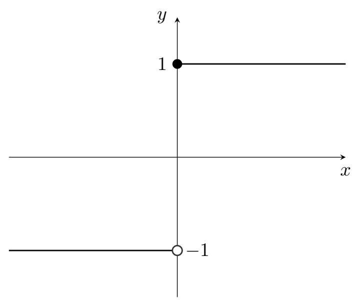

Figura 1: Gráfico de la función f definida en (3).

y analicemos lo que sucede en $x = 0$. Por un lado se tiene que $f(0) = 1$, mientras que por otro

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|[-r,r]|}\int_{-r}^{r} f(y)dy = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\left(\int_0^r f(y)dy + \int_{-r}^0 f(y)dy\right) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}(r-r) = 0 \neq f(0).$$

Esto muestra que la igualdad (1) falla cuando $x = 0$ para f. Esta idea nos permite presentar la siguiente definición:

Definición (Representación exacta de una función)**.** *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, definimos su representación exacta f_* de la siguiente manera:*

$$f_*(x) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)dy & \textit{si el límite existe,} \\ 0 & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

La representación exacta de una función nos permite levantar la ambigüedad que existe al trabajar sobre clases de funciones donde difieren en un conjunto de medida nula. En efecto, si tomamos $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ tales que $f = g$ casi todas partes, considerando sus representaciónes exactas se tiene que $f_* = g_*$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Una consecuencia interesante que el lector puede demostrar y nace a partir del Teorema de diferenciación de Lebesgue es el control puntual de una función por su función maximal de Hardy-Littlewood asociada.

Corolario 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene la estimación puntual*

$$f(x) \leq \mathcal{M}(f)(x).$$

Adicionalmente, podemos presentar el siguiente resultado:

Corolario 1.2. *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Se tiene que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy = 0. \tag{4}$$

Demostración.

- Considere $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}$. Gracias a que f es localmente p-integrable entonces $|f - \rho_j|^p$ es localmente integrable para cada $j \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 1.1 a esta función vemos que
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - \rho_j|^p \, dy = |f(x) - \rho_j|^p, \tag{5}$$
para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ y para cada $j \in \mathbb{N}$.
- Denotemos por $A \subseteq \mathbb{R}^n$ al conjunto de medida nula tal que (5) se cumple para cada $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$. De esto, se puede tomar $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, además sea ρ_j de modo que $|f(x) - \rho_j|^p \leq \frac{\varepsilon}{2^p}$. De esto
$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy \leq{}& 2^{p-1} \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - \rho_j|^p dy \\ &+ 2^{p-1} \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x) - \rho_j|^p dy.\end{aligned}$$
- Aplicando el Teorema 1.1 en el primer término de la parte derecha de la desigualdad anterior y notando que el segundo término no depende de la variable de integración
$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy \leq 2^{p-1} \left(|f(x) - \rho_j|^p + |f(x) - \rho_j|^p\right) \leq 2^{p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2^p} + \frac{\varepsilon}{2^p}\right) = \varepsilon.$$
y puesto que
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy \leq \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy,$$
junto con la arbitrariedad de ε se obtiene el resultado para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. ∎

Gracias a este corolario podemos empezar a pensar sobre el conjunto de puntos que cumple el límite (4). En realidad, estos puntos expresan el *buen* comportamiento de la función alrededor sus promedios. Este interés nace de su utilidad en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales y en teoría de la medida geométrica, entre otros temas que están fuera del enfoque de esta lección.

Definición (Puntos de Lebesgue)**.** *Si $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$, definimos el conjunto de Lebesgue de f como el conjunto de puntos en donde se tiene el límite (4). A los puntos en este conjunto se les denomina puntos de Lebesgue.*

De esta definición se tiene directamente que el conjunto de Lebesgue de una función localmente integrable es de medida nula.

2. Desigualdad de Hedberg y espacios de Sobolev

En esta sección se va a demostrar las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev utilizando propiedades de las funciones máximales. Esta forma de proceder hará uso de una desigualdad puntual conocida como la **desigualdad de Hedberg**. Antes de enunciar el teorema se presenta algunos conceptos necesarios:

- Sobre $\mathbb{R}^n$, sea $0 < \alpha < n$ un parámetro real. El **potencial de Riesz** I_α se define de la siguiente manera
$$I_\alpha(f)(x) = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy,$$
donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y donde $C(n,\alpha)$ es una constante universal que depende únicamente de la dimensión n y del parámetro α.

- Usando la transformada de Fourier podemos ver a este operador de manera más sencilla
$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi).$$
Esto nos motiva a escribir, formalmente, la identidad
$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(f).$$

Con estas notaciones podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sea n la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ un real. Si $1 < p < q < +\infty$ son dos indices reales tales que*
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}, \tag{6}$$
entonces existe una constante universal $C(n,\alpha,p,q) > 0$ tal que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la desigualdad
$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q} \leq C(n,\alpha,p,q)\|f\|_{L^p} \tag{7}$$

Demostración.

- Empecemos dando la caracterización de Riemann-Liouville del potencial de Riesz
$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}\mathfrak{g}_t * f(x)dt,$$
donde Γ es la función gamma usual y $\mathfrak{g}(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{4}}$, es el núcleo de Gauss. A partir de esta representación se tiene
$$|I_\alpha f(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^T t^{\alpha/2-1}|\mathfrak{g}_t * f(x)|dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_T^{+\infty} t^{\alpha/2-1}|\mathfrak{g}_t * f(x)|dt, \tag{8}$$
donde T es un parámetro que se determinará posteriormente.

- Recordando que (ver Teorema 4.1 de la Lección n°2) se tiene la mayoración
$$\sup_{t>0}|(\mathfrak{g}_t * f)(x)| \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x),$$
y por las desigualdades de Young
$$\|\mathfrak{g}_t * f(x)\|_{L^\infty} \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}$$
con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, podemos inyectar estas estimaciones en las integrales de (8) para obtener
$$|I_\alpha f(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^T t^{\alpha/2-1}\|\mathfrak{g}_t\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x)dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_T^{+\infty} t^{\alpha/2-1}\|\mathfrak{g}_t\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}dt.$$

- Como $\|\mathfrak{g}_t\|_{L^1} = 1$ y $\|\mathfrak{g}_t\|_{L^{p'}} = Ct^{-\frac{n}{2}(1-1/p')}$, entonces
$$\begin{aligned}|I_\alpha f(x)| &\leq \mathcal{M}(f)(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^T t^{\alpha/2-1}dt + \|f\|_{L^p}\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_T^{+\infty} t^{\alpha/2-1}t^{-\frac{n}{2}(1-1/p')}dt\\ &= C_\alpha\mathcal{M}(f)(x)T^{\alpha/2} + C'_\alpha\|f\|_{L^p}T^{\alpha/2-\frac{n}{2p}}.\end{aligned}$$

Tomando $T = \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\mathcal{M}(f)(x)}\right)^{2p/n}$ se obtiene la expresión

$$|I_\alpha f(x)| \leq C''_\alpha \mathcal{M}(f)(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}}. \tag{9}$$

Esta estimación que controla puntualmente el potencial de Riesz de una función f por su función maximal $\mathcal{M}(f)$ es conocida como la **desigualdad de Hedberg**.

- Reconstruyendo la norma L^q en (9) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q dx \leq C_\alpha \|f\|_{L^p}^{q\frac{\alpha p}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(f)(x)^{(1-\frac{\alpha p}{n})q} dx$$

y por (6) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q dx \leq C_\alpha \|f\|_{L^p}^{q\frac{\alpha p}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(f)(x)^p dx = C_\alpha \|f\|_{L^p}^{q\frac{\alpha p}{n}} \|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}^p.$$

- Por último, ya que $1 < p < +\infty$ y por la acotación en L^p de las funciones maximales de Hardy-Littlewood, se concluye finalmente que

$$\|I_\alpha f\|_{L^q}^q \leq C_\alpha \|f\|_{L^p}^{q\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_{L^p}^p = C_\alpha \|f\|_{L^p}^{qp(\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n})}.$$

■

Cabe recalcar que esta es una demostración de las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev considerada desde el punto de vista del análsis armónico, utilizando herramientas como las acotaciones de las funciones maximales y las representaciones de Riemann-Liouville. Existen otras maneras de demostrar este teorema usando los espacios de Lorentz y la convolución por ejemplo, pero ese no es el enfoque de esta lección.

3. Caracterización de los espacios de Lebesgue L^p con $1 < p \leq +\infty$

Finalmente se busca caracterizar a los espacios de Lebesgue L^p para $1 < p \leq +\infty$. Los cálculos que vamos a mostrar son relativamente simples, sin embargo para el caso $0 < p \leq 1$ ha sido fuente de desarrollos muy profundos.

Teorema 3.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\mathcal{M}(f)$ la función maximal de Hardy-Littlewood. Entonces para todo $1 < p \leq +\infty$ se tiene la equivalencia de normas*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \simeq \|f\|_{L^p}.$$

En otras palabras el espacio de funciones medibles tal que su función maximal de Hardy-Littlewood sea p-integrable para $1 < p \leq +\infty$ no es más que el espacio de Lebesgue L^p usual.

Demostración.

- En la Lección n°2 se obtuvo que

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^p},$$

para $1 < p < +\infty$, y en la Lección n°1 que

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Por lo tanto basta concentrarse en las estimaciones reciprocas.

- Ahora, suponiendo que $\mathcal{M}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, por el Corolario 1.1 se tiene la estimación puntual

$$f(x) \leq \mathcal{M}(f)(x)$$

casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

- Para $p=+\infty$, de la desigualdad anterior se tiene directamente que

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\text{ess}\, |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\text{ess}\, |\mathcal{M}(f)(x)| = \|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty}.$$

- Para $1<p<+\infty$ de la misma desigualdad vamos a tener que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(f)(x)^p dx = \|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}^p,$$

lo que concluye la demostración. ■

El caso $p=1$ se tiene la estimación $\|f\|_{L^1} \leq \|\mathcal{M}(f)\|_{L^1}$ trivialmente pues en este contexto se tiene siempre que $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^1} = +\infty$ si $f\neq 0$ (Recordar los problemas de acotación en L^1 de la Lección n°1), lo que nos dice que la función maximal de Hardy-Littlewood no es un buen operador para caracterizar al espacio L^1.

Este problema se lo puede atacar desde otro punto de vista, usando funciones maximales más flexibles, en particular de la forma estudiada en la Lección n°2. Para fijar ideas, si consideramos la función maximal $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)(x)$ definida como

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)(x) = \sup_{t>0} |(f*\mathfrak{g}_t)(x)|,$$

donde $\mathfrak{g}$ es el núcleo de Gauss, se vió que $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x)$ y por tanto se tienen propiedades de acotación muy similares. Con esto nos podemos plantear la siguiente pregunta:

Si $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, ¿A qué espacio funcional debe pertenecer la función f?

Contrario al caso de la función maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}(f)$, la respuesta a esta pregunta no se limita solo a la función nula y tampoco se obtienen los espacios L^1 ó $L^{1,\infty}$, sino un espacio completamente diferente llamado el **espacio de Hardy** $\mathcal{H}^1$ definido a continuación.

Definición (Espacio de Hardy $\mathcal{H}^1$)**.** *Se define al espacio de Hardy $\mathcal{H}^1$ como el conjunto de funciones $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que la función maximal $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)$ pertenece al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Esto es*

$$\mathcal{H}^1 = \left\{ f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \,:\, \|f\|_{\mathcal{H}^1} = \|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)\|_{L^1} < +\infty \right\}.$$

Los espacios de Hardy son la puerta de entrada del análisis armónico que ha sido desarrollado en los años 1960-1990 y constituyen un marco natural para estudiar problemas de análisis funcional y de análisis de las ecuaciones en derivadas parciales. Su utilidad se hace más evidente cuando resultados que no se cumplen en L^1 suelen tener versiones correctas en los espacios de Hardy $\mathcal{H}^1$, por lo que se convierten en substitutos indispensables.

Nótese que gracias al estudio de esta sección, si definimos a los espacios de Hardy $\mathcal{H}^p$ con $1<p\leq+\infty$ por medio de la condición $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(f)\|_{L^p} < +\infty$ lo que obtenemos son los espacios de Lebesgue L^p, pero al considerar $0<p\leq 1$ entonces se obtienen espacios muy diferentes que, al igual que el espacio $\mathcal{H}^1$, poseen muchas propiedades interesantes que hacen de ellos herramientas fundamentales en el estudio de análisis armónico moderno.

Presentar estos espacios de manera más profunda requiere de mucho material preliminar que no se lo puede hacer en esta lección.

Referencias

[1] D Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 2.* Colección de Matemáticas Universitarias, N°2. Amarun, 2017.