Lección n°4: Introducción a los pesos A_p.

EPN 2021

Introducción

Consideremos una función medible $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, observemos que no es lo mismo estudiar bajo qué condiciones se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu < +\infty,$$

donde μ es una medida boreliana cualquiera, que estudiar cuándo se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |x|^{\frac{1}{2}} dx < +\infty,$$

donde la medida considerada es la de Lebesgue dx precedida de un *peso* $|x|^{\frac{1}{2}}$. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \frac{|x|^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+|x|^2}}$ definida sobre $\mathbb{R}$ y estudiemos la finitud de estas integrales. Primero, se puede ver que esta función no pertenece a $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx)$ pues, si aprovechamos la paridad de la función y haciendo un cambio de variable, podemos calcular la integral facilmente

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} dx = -\int_{+\infty}^{1} \frac{1}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u} du = +\infty.$$

Pero por otro lado, si pertenece al espacio $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), |x|^{\frac{1}{2}} dx)$. En efecto, haciendo manipulaciones similares se puede calcular sin mayor problema que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |x|^{\frac{1}{2}} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^2)} dx = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} du = \sqrt{2}\pi < +\infty.$$

Esta forma de proceder, es decir reemplazar dx por $|x|^{\frac{1}{2}} dx$, es muy usual en la práctica e interviene en muchísimas aplicaciones y nos llevará a definir espacios funcionales de Lebesgue y Lorentz donde interviene una medida con peso. El objetivo principal de esta lección es proporcionar condiciones bajo las cuales las funciones maximales son continuas en los espacios funcionales de Lebesgue y de Lorentz con peso.

1. Notaciones y definiciones generales

Para lograr el objetivo de esta lección será necesario fijar notaciones y definiciones de los objetos que estaremos utilizando.

Definición (Peso, Medida con Peso)**.**

1) Un peso ω es una función localmente integrable definida sobre $\mathbb{R}^n$ a valores en $]0, +\infty[$ en casi todo punto.

2) Una medida con peso, es una medida de la forma $\omega(x)dx$, donde dx es la medida de Lebesgue y la función $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ es un peso.

Observación. Puesto que los pesos son funciones que se igualan a 0 o infinito sobre conjuntos de medida nula, si además $\frac{1}{\omega}$ es localmente integrable, entonces $\frac{1}{\omega}$ es también un peso.

Notación: Si ω es un peso, para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^n$ escribiremos

$$\omega(A) = \int_A \omega(x) dx, \tag{1}$$

para designar la medida ω del conjunto A y puesto que los pesos son funciones localmente integrables se tiene que $\omega(A) < +\infty$ siempre que A esté contenido en un conjunto compacto.

Definamos ahora los espacios de Lebesgue con peso.

Definición (Espacios de Lebesgue con peso)**.** *Sea* $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *un peso. Para* $1 \leq p < +\infty$ *definimos los espacios de Lebesgue con peso* ω*, denotado por* $L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, como el conjunto de funciones medibles* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx < +\infty.$$

En el caso cuando $p = +\infty$ *se define* $L^\infty(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

A estos espacios se les puede dotar de la norma

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

la cual en efecto es una norma pues basta tomar $d\mu(x) = \omega(x)dx$ y aplicar la teoría desarrollada de los espacios de Lebesgue.

También es posible considerar la función de distribución para caracterizar estos espacios de Lebesgue con pesos.

Proposición 1.1. *Sea* $1 \leq p < +\infty$*. Entonces* (2) *puede escribirse como*

$$\|f\|^p_{L^p(\omega)} = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\right) d\alpha. \tag{3}$$

Idea de la demostración.
Notando que se puede escribir lo siguiente

$$p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\right) d\alpha = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}} \omega(x) dx d\alpha,$$

y por el Teorema de Fubini en la expresión de la derecha, se tiene que

$$p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}} \omega(x) dx d\alpha = p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}} \alpha^{p-1} d\alpha \, \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx,$$

obteniendo así el resultado. ■

La expresión (3) nos induce a estudiar los espacios de Lorentz con peso de manera similar a como se hizo en la Lección n°2, de forma que se tiene la siguiente definición.

Definición (Espacios de Lorentz con peso)**.** *Sea* $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *un peso. Para* $1 \leq p < +\infty$*, definimos los espacios de Lorentz con peso* ω*, denotados por* $L^{p,\infty}(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, como el conjunto de funciones medibles* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\omega)} = \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha \omega(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Si $p = +\infty$ *definimos* $L^{\infty,\infty}(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

De manera similar a los espacios de Lorentz usuales estudiados en la Lección n°2, la cantidad $\| \cdot \|_{L^{p,\infty}(\omega)}$ en realidad no es una norma.

Como ya se pudo observar con ciertas propiedades de los espacios de Lebesgue y Lorentz, la mayoría de propiedades de estos espacios se mantienen pues estructuralmente solo se está considerando una medida un poco particular. Sin embargo, la situación cambia cuando estudiamos problemas de acotación del operador función maximal con respecto a medidas arbitrarias. Nos limitaremos a estudiar bajo qué condiciones de los pesos ω, las funciones maximales son acotadas en los espacios de Lebesgue y Lorentz. Es decir, queremos saber cuándo se tienen las siguientes estimaciones:

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p(\omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\omega)} \quad \text{y} \quad \|\mathcal{M}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \leq C \|f\|_{L^{p,\infty}(\omega)},$$

para un cierto peso ω y para toda función medible f que pertenece a un espacio de Lebesgue $L^p(\omega)$ o un espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\omega)$ con $1 \leq p < +\infty$.

Antes de definir los pesos A_p y presentar resultados importantes relacionados con ellos, vamos a deducir *a priori* algunas propiedades que un cierto peso ω debe verificar si se desea tener una estimación del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(f)(x)^p \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx, \tag{4}$$

para toda función $f \in L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, que por simplicidad consideraremos únicamente $1 < p < +\infty$.

Ahora, tomemos pesos ω que verifican (4) y tales que ω^{-1} es una función localmente integrable. Sea entonces $f\mathbb{1}_B$, donde $f \in L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 < p < +\infty$ y $B = B(x_0, r)$ es una bola abierta con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. De esta manera, si suponemos (4) para esta función $f\mathbb{1}_B$ tendríamos por un lado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}\left(f\mathbb{1}_B\right)(x)^p \omega(x)dx \leq C \int_B |f(x)|^p \omega(x)dx,$$

pero por otro lado, de la definición de función maximal tenemos

$$\underset{B}{\text{prom}}(f) = \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\mathbb{1}_B dy \leq \mathcal{M}\left(f\mathbb{1}_B\right)(x).$$

Elevando esta desigualdad a la potencia p e integrando sobre la bola B con respecto a la medida con peso $\omega(x)dx$ obtenemos, juntando las dos estimaciones anteriores:

$$\int_B \left(\underset{B}{\text{prom}}(f)\right)^p \omega(x)dx \leq \int_B \mathcal{M}\left(f\mathbb{1}_B\right)(x)^p \omega(x)dx \leq C \int_B |f(x)|^p \omega(x)dx.$$

Puesto que el promedio de la función f sobre la bola B es constante sobre esta misma bola, puede salir de la integral, que con la notación (1) se puede escribir como

$$\omega(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B f(y)dy\right)^p \leq C \int_B |f(x)|^p \omega(x)dx. \tag{5}$$

Dado que la desiguadad anterior debe ser válida para toda bola B y toda función $f \in L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que la cantidad de la derecha sea finita, y notando que si $f = \omega^{-\frac{1}{p-1}}$ entonces $|f|^p\omega = \omega^{-\frac{p}{p-1}}\omega = \omega^{-\frac{1}{p-1}} = f$, podemos escoger la función f de esta forma obteniendo la desigualdad

$$\omega(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy\right)^p \leq C \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx < +\infty,$$

donde se tiene que la integral de la derecha es finita ya que ω^{-1} es localmente integrable.

Ahora si suponemos que el peso ω verifica $\inf\limits_B \omega(x) > 0$ (es decir que nunca se anula), la cantidad $\displaystyle\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}$ es positiva y finita pues $1 < p < +\infty$, lo que nos conduce a escribir

$$\frac{\omega(B)}{|B|} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}dx}\right)^{p-1} \leq C,$$

es decir

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq C,$$

y puesto que esta estimación es uniforme sobre el tipo de bolas que se considera, podemos tomar el supremo, obteniendo la siguiente expresón:

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq C. \tag{6}$$

En el caso cuando ω verifica $\inf\limits_{B} \omega(x) = 0$ para ciertas bolas B, entonces podemos reemplazar la función $f = \omega^{-\frac{1}{p-1}}$ por la función $f = (\omega + \varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}$ con $\varepsilon > 0$ y entonces la desigualdad (5) toma la siguiente forma

$$\omega(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy\right)^p \leq C\int_B |f(x)|^p\omega(x)dx$$
$$\omega(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (\omega(y)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^p \leq C\int_B \frac{\omega(x)}{(\omega(x)+\varepsilon)^{-\frac{p}{p-1}}}dx,$$

ahora si reemplazamos el peso ω por $\omega + \varepsilon$, de la anterior desigualdad se obtiene sin problema la mayoración

$$\omega(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (\omega(y)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^p \leq C\int_B \frac{\omega(x)+\varepsilon}{(\omega(x)+\varepsilon)^{-\frac{p}{p-1}}}dx,$$

es decir que podemos escribir

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (\omega(x)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq C.$$

Notemos ahora que la sucesión de funciones $(\omega+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}$ es creciente cuando $\varepsilon \to 0$, entonces por el Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi se obtiene la misma expresión (6). Es decir, hemos verificado que *todo* peso que cumple la desigualdad (4) y tal que ω^{-1} es localmente integrable debe satisfacer la condición (6) que acabamos de obtener y esto merece la definición a continuación:

Definición (Peso de tipo A_p)**.** *Sea $1 < p < +\infty$. Diremos que un peso $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ es de tipo A_p, o que pertenece a la clase de Muckenhoupt A_p, si ω^{-1} es localmente integrable y si verifica la condición*

$$[\omega]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < +\infty. \tag{7}$$

A la cantidad $[\omega]_{A_p}$ se le denomina la constante característica del peso ω.

Para el caso $p = 1$ se los define de la siguiente manera.

Definición (Peso de tipo A_1)**.** *Direos que un peso $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ es de tipo A_1 si ω^{-1} es localmente integrable y si la constante característica verifica*

$$[\omega]_{A_1} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)} < +\infty. \tag{8}$$

Ejemplo 1.1. Consideremos la función $\omega(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ como un ejemplo inicial de un peso. En efecto, es una función positiva y localmente integrable, donde además $\omega(x)^{-1} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto también localmente integrable. Mostremos ahora que su constante característica es finita. Para ello notemos por un lado que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B dx\right)^{p-1} = 1,$$

para $1 < p < +\infty$ y para toda bola B. Del mismo modo se tiene la siguiente igualdad

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B dx\right)\|1\|_{L^\infty(B)} = 1,$$

para toda bola B. Tomando el supremo sobre las bolas en estas últimas igualdades muestra que $[1]_{A_p} = 1$ para todo $1 \leq p < +\infty$. En particular, se puede ver que $L^p(1)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Estas nociones de pesos que pertenecen a las clases A_p están, por construcción, intimamente relacionadas con la acotación de las funciones maximales en los espacios de Lebesgue con peso correspondientes y veremos que en realidad existe una equivalencia entre la continuidad de las funciones maximales de Hardy-Littlewood en los espacios de Lebesgue $L^p(\omega)$, $1 \leq p < +\infty$ y el hecho de que el peso ω pertenezca a la clase A_p.

2. Propiedades de los pesos A_p

Habiendo definido ya las familias de pesos A_p para $1 \leq p < +\infty$, presentemos ahora algunos resultados que serán relevantes en el desarrollo de la lección. Es importante indicar que existe mucha teoría sobre estas familias de pesos, por lo tanto solo se hace una pequeña introducción sobre este tema.

Propiedades

La demostración de algunas propiedades que se presentan a continuación son relativamente fáciles, por lo que se les deja como ejercicio para el lector.

A) **Estabilidad respecto a ciertas operaciones**
Sean $1 < p < +\infty$ y $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un peso que pertenece a A_p. Entonces,

1) Para todo $\lambda > 0$, entonces se tiene que $[\delta_\lambda(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$, donde $\delta_\lambda(\omega)$ es la dilatación de ω definida como $\delta_\lambda(\omega)(x) = \omega(\lambda x)$.
2) Si $y \in \mathbb{R}^n$, entonces se tiene que $[\tau_y(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$, donde $\tau_y(\omega)$ es la traslación de ω definida como $\tau_y(\omega)(x) = w(x+y)$.
3) Para todo $\lambda > 0$, se tiene $[\lambda\omega]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$.

B) **Dualidad**
Sea $1 \leq p < +\infty$. Si $\omega \in A_p$, entonces el peso $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y además se tiene la identidad

$$[\omega^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{p'}} = [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{9}$$

En particular, de este resultado obtenemos que $\omega \in A_2$ si y solamente si $\omega^{-1} \in A_2$.

C) **Monotonía respecto a p**
Sean $1 \leq p < q < +\infty$ dos índices. Entonces se tiene la inclusión $A_p \subset A_q$, es decir

$$[\omega]_{A_q} \leq [\omega]_{A_p}. \tag{10}$$

Idea de la demostración.

- Primero supongamos $1 < p < q < +\infty$. Notemos que por definición de la constante característica $[\omega]_{A_q}$, está conformada por dos términos de los cuales basta estudiar $\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1}$ ya que este depende del índice de la clase A_q. Definamos $a = \frac{q-1}{p-1} > 1$, ya que $1 < p < q < +\infty$, y $b = \frac{q-1}{q-p}$ de modo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene la mayoración

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1} &\leq \left(\frac{1}{|B|}\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{a}{q-1}}dx\right)^{\frac{1}{a}}\left(\int_B dx\right)^{\frac{1}{b}}\right)^{q-1} \\
&\leq \left(\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{q-1}}|B|^{\frac{q-p}{q-1}-1}\right)^{q-1} \\
&\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B \omega(x)dx$ y tomando el supremo sobre las bolas obtenemos

$$\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1} \leq \sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1},$$

y recordando la definición de $[\omega]_{A_p}$ se deduce el resultado.

- Para el caso $p = 1$ y $1 < q < +\infty$ se procede de manera análoga y se lo deja como ejercicio para el lector.

■

Esto nos indica que los pesos de las clases A_p son crecientes respecto al índice p (Es decir que se tiene $A_p \subset A_q$ cuando $1 \leq p < q < +\infty$).

D) **Producto entre dos pesos**

1) Si $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ un peso de tipo A_p con $1 < p < +\infty$ y si $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\omega^\alpha \in A_p$.
2) Si $\omega_0, \omega_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ son dos pesos de tipo A_p con $1 < p < +\infty$ y si $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\omega_0^\alpha \omega_1^{1-\alpha} \in A_p$

Idea de la demostración.
Para ambos puntos, los casos en que $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ son directos. En efecto, si $\alpha = 1$, se tiene que $\omega^\alpha = \omega$ el cual pertenece a A_p por hipótesis, lo que muestra el primer punto, y para el segundo punto se tiene que $\omega_0^\alpha \omega_1^{1-\alpha} = \omega_0^1 \omega_1^0 = \omega_0$ el cual también pertenece a A_p por hipótesis.

Si $\alpha = 0$, entonces para el primer punto se tiene que $\omega^\alpha = \omega^0 = 1$ que por el Ejemplo 1.1 se tiene que $\omega \in A_p$, mientras que para el segundo punto se tiene que $\omega_0^\alpha \omega_1^{1-\alpha} = \omega_0^0 \omega_1^1 = \omega_1$ que pertenece a A_p por hipótesis. Así, podemos suponer $0 < \alpha < 1$ sin problema para el resto de la demostración.

1) Notemos que para toda bola B, aplicando la desigualdad de Hölder, se tienen las estimaciones

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^\alpha dx \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)^\alpha \qquad \text{y}$$
$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{\alpha}{p-1}} dx \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^\alpha.$$

Así, gracias a estas estimaciones obtenemos al estudiar la constante característica la relación

$$\begin{aligned}[\omega^\alpha]_{A_p} &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^\alpha dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{\alpha}{p-1}}dx\right)^{p-1} \\ &\leq \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x) dx\right)^\alpha\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\alpha(p-1)} \leq [\omega]_{A_p}^\alpha < +\infty,\end{aligned}$$

lo que muestra el resultado.

2) Aplicando nuevamente la desigualdad de Hölder tenemos las siguientes estimaciones para toda bola B

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega_0(x)^\alpha \omega_1(x)^{1-\alpha} dx \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega_0(x)dx\right)^\alpha \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega_1(x)dx\right)^{1-\alpha} \qquad \text{y}$$
$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega_0(x)^{-\frac{\alpha}{p-1}} \omega_1(x)^{-\frac{1-\alpha}{p-1}} dx \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega_0(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^\alpha \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega_1(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1-\alpha},$$

que si procedemos como en el punto anterior, al estudiar la constante característica del peso $\omega_0^\alpha \omega_1^{1-\alpha}$ se obtiene

$$[\omega_0^\alpha \omega_1^{1-\alpha}]_{A_p} \leq [\omega_0]_{A_p}^\alpha [\omega_1]_{A_p}^{1-\alpha} < +\infty,$$

lo que muestra el segundo punto.

■

Existe una propiedad recíproca al segundo punto anterior: si ω es un peso de tipo A_p con $1 < p < +\infty$, entonces ω se puede *factorizar* como el producto de dos pesos ω_0 y ω_1 que pertenecen a A_1.

E) **Control sobre promedios**
Sobre el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$, si un peso ω pertenece a la clase de pesos A_p con $1 < p < +\infty$, entonces se tiene la desigualdad

$$\operatorname*{prom}_B(f)^p \leq \frac{[\omega]_{A_p}}{\omega(B)}\int_B f^p(x)\omega(x)dx, \tag{11}$$

para toda bola B y para toda función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva y localmente integrable.

Esta propiedad es sumamente útil pues permite controlar el promedio usual de funciones (respecto a la medida de Lebesgue) por medio de cantidades que hacen intervenir integrales con respecto a un peso.

2.1. Ejemplos concretos

Después de haber estudiado algunas de las propiedades de las familias de pesos A_p, es natural presentar ejemplos concretos de funciones peso que pertenecen a estas clases, ya que esto nos da una idea de que objetos estamos manipulando. Antes de esto, es necesario introducir una noción adicional.

Definición (Medida duplicante)**.** *Consideremos el espacio medible* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$*. Una medida* σ*-finita* μ *definida sobre la* σ*-álgebra* $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ *es una medida duplicante, si existe una constante* $C > 0$ *tal que se cumpla la condición*

$$\mu(2B) \leq C\mu(B), \tag{12}$$

para toda bola B*.*

Con esta definición es claro que la medida de Lebesgue usual es duplicante pues se tiene la identidad $|2B| = 2^n|B|$ para toda bola, de donde se deduce para esta medida que $C = 2^n$. Presentemos otro ejemplo de medida duplicante que será de utilidad para estudiar los pesos en las clases A_p.

Proposición 2.1. *Sobre el espacio medible* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$ *las medidas* $|x|^\sigma dx$ *son medidas duplicantes si* $\sigma > -n$*.*

Demostración.

- Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, consideremos las bolas $B(x_0, r)$ y distingamos dos tipos de bolas en función de si contienen o no el origen. Más precisamente, se dividen en dos tipos:
  - Las bolas de tipo I, que son las bolas tales que $|x_0| \geq 3r$ (no contienen el origen).
  - Las bolas de tipo II, que son las bolas tales que $|x_0| < 3r$ (contienen el origen).
- Para las bolas del tipo I y para $\sigma \geq 0$, se tiene la estimación $|x|^\sigma \leq (|x_0| + 2r)^\sigma$, para todo $x \in B$, lo que nos permite escribir

$$\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq (|x_0| + 2r)^\sigma \int_{B(x_0,2r)} dx = (|x_0| + 2r)^\sigma |B(x_0, 2r)| = (|x_0| + 2r)^\sigma v_n(2r)^n.$$

  Así mismo, se tiene la desigualdad $|x_0| - 2r \leq |x|$, para todo $x \in B$, pero si consideramos $-n < \sigma < 0$ entonces $|x|^\sigma \leq (|x_0| - 2r)^\sigma$, y por tanto se puede escribir

$$\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq v_n(2r)^n(|x_0| - 2r)^\sigma.$$

  En resumen se encontró la mayoración

$$\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq v_n(2r)^n \left\{ \begin{array}{ll} (|x_0| + 2r)^\sigma & \text{si } \sigma \geq 0, \\ (|x_0| - 2r)^\sigma & \text{si } \sigma < 0. \end{array} \right.$$

  Razonando de manera análoga a lo anterior se deduce facilmente la desigualdad

$$\int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx \geq v_n(r)^n \left\{ \begin{array}{ll} (|x_0| - r)^\sigma & \text{si } \sigma \geq 0, \\ (|x_0| + r)^\sigma & \text{si } \sigma < 0. \end{array} \right.$$

- Finalmente, puesto que $|x_0| \geq 3r$, se tiene $|x_0| + 2r \leq 4(|x_0| - r)$ y $|x_0| - 2r \geq \frac{1}{4}(|x_0| + r)$, lo que permite escribir

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx &\leq v_n(2r)^n \left\{ \begin{array}{ll} (|x_0| + 2r)^\sigma & \text{si } \sigma \geq 0, \\ (|x_0| - 2r)^\sigma & \text{si } \sigma < 0, \end{array} \right. \\ &\leq v_n r^n 2^n \left\{ \begin{array}{ll} 4^{|\sigma|}(|x_0| - r)^\sigma & \text{si } \sigma \geq 0, \\ 4^{|\sigma|}(|x_0| + r)^\sigma & \text{si } \sigma < 0. \end{array} \right. \\ &\leq 2^n 4^{|\sigma|} \int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx, \end{aligned}$$

  de donde se deduce la desigualdad (12) para las bolas de tipo I con $C = 2^n 4^{|\sigma|}$.

- Para las bolas de tipo II, notamos por la condición $-n < \sigma$ las integrales sobre este tipo de bolas son convergentes y entonces, por un lado se tiene

$$\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq \int_{\{|x|<5r\}} |x|^\sigma dx = Cr^{n+\sigma}.$$

Mientras que por otro lado, dado que las funciones $|x|^\sigma$ son radialmente crecientes si $\sigma \geq 0$ y radialmente decrecientes si $-n < \sigma < 0$, se tiene

$$\int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx \geq \int_{B(0,r)} |x|^\sigma dx = C' r^{n+\sigma} \quad \text{si } \sigma \geq 0,$$

y si $-n < \sigma < 0$, notamos que se tiene la minoración

$$\int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx \geq \int_{B\left(3r\frac{x_0}{|x_0|},r\right)} |x|^\sigma dx,$$

y sobre la bola $B\left(3r\frac{x_0}{|x_0|},r\right)$ se tiene $2r \leq |x| \leq 4r$, que al insertar esta desigualdad en la integral anterior obtenemos

$$\int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx \geq C'' r^{n+\sigma}.$$

- Tenemos entonces por un lado que $\displaystyle\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq Cr^{n+\sigma}$ y por otro lado que $C''' r^{n+\sigma} \leq \displaystyle\int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx$, lo que nos permite concluir

$$\int_{B(x_0,2r)} |x|^\sigma dx \leq C \int_{B(x_0,r)} |x|^\sigma dx$$

para las bolas del tipo II. Mostrando así que la medida $|x|^\sigma dx$ es una medida duplicante.

■

Esta noción de medida duplicante tiene su importancia al desarrollar una teoría general (es decir más allá del marco simple del espacio euclideo dotado de la medida de Lebesgue) que estudia las propiedades de acotación de las funciones maximales en los espacios de Lebesgue y de Lorentz y, dado que ahora vamos a reemplazar la medida de Lebesgue usual por medidas que consideran funciones peso, era por lo tanto necesario presentar este concepto.

Como acabamos de ver, las medidas $|x|^\sigma dx$ con $\sigma > -n$ son medidas duplicantes. Veamos ahora bajo qué condiciones adicionales los pesos $|x|^\sigma$ pertenecen a las clases A_p.

Proposición 2.2. *Sobre el espacio medible* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$*, los pesos de la forma* $|x|^\sigma$ *pertenecen a las clases* A_p *con* $1 < p < +\infty$ *si se tiene la condición*

$$-n < \sigma < n(p-1).$$

Idea de la demostración.

- Por definición de las clases A_p, se busca verificar que se tiene

$$[|x|^\sigma]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^\sigma dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{-\frac{\sigma}{p-1}} dx\right)^{p-1} < +\infty. \tag{13}$$

- Usando nuevamente la división de las bolas en los dos tipos considerados en la demostración de la Proposición 2.1, para las bolas del tipo I todas las integrales dentro de (13) son finitas y la constante característica $[|x|^\sigma]_{A_p}$ es equivalente a

$$|x_0|^\sigma(|x_0|^{-\frac{\sigma}{p-1}})^{p-1} = 1.$$

- Ahora, sobre las bolas de tipo II, se tiene que $B(x_0,r) \subset B(0,5r)$. Si suponemos que la medida $|x|^\sigma dx$ es duplicante entonces las integrales de la función $|x|^\sigma$ sobre estas bolas son equivalentes y por lo tanto en el estudio de la cantidad (13) podemos reemplazar sin pérdida de generalidad las bolas $B(x_0, r)$ por las bolas $B(0, 5r)$, es decir debemos considerar la cantidad

$$\left(\frac{1}{v_n(5r)^n}\int_{B(0,5r)}|x|^{\sigma}dx\right)\left(\frac{1}{v_n(5r)^n}\int_{B(0,5r)}|x|^{-\frac{\sigma}{p-1}}dx\right)^{p-1} \tag{14}$$
$$=\left(\frac{C}{v_n(5r)^n}\int_0^{5r}\rho^{\sigma+n-1}d\rho\right)\left(\frac{C}{v_n(5r)^n}\int_0^{5r}\rho^{-\frac{\sigma}{p-1}+n-1}d\rho\right)^{p-1}.$$

donde la última integral es convergente siempre que $\sigma < n(p-1)$, de donde se tiene que

$$\left(\frac{C'}{v_n(5r)^n}(5r)^{\sigma+n}\right)\left(\frac{C''}{v_n(5r)^n}(5r)^{-\frac{\sigma}{p-1}+n}\right)^{p-1}=C'''.$$

- Esto muestra que bajo las condiciones $-n < \sigma < n(p-1)$, la cantidad (14) es independiente del radio de las bolas, es decir que sobre todas las bolas de tipo II esta cantidad es finita, lo que termina la verificación de esta proposición.

■

Se hace énfasis en que si $\sigma > n(p-1)$, la medida $|x|^{\sigma}dx$ es una medida duplicante pero no pertenece a la clase A_p. Sin embargo, si es que se sabe que $\omega \in A_p$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sobre el espacio medible* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$*, si* $\omega \in A_p$ *con* $1 \leq p < +\infty$*, entonces la medida* $\omega(x)dx$ *es una medida duplicante.*

Idea de la demostración.

- Aplicando la desigualdad de Hölder en la última integral de

$$\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\mathbb{1}_B(x)dx=\frac{1}{|2B|}\int_{2B}(\mathbb{1}_B\omega^{\frac{1}{p}})(x)\omega^{-\frac{1}{p}}(x)dx,$$

nos da la desigualdad

$$2^{-np}=\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\mathbb{1}_B(x)dx\right)^p\leq\frac{1}{|2B|}\left(\int_B\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$
$$\leq\frac{1}{|2B|}\omega(B)\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}.$$

- Multiplicando y dividiendo la parte derecha de la desigualdad por $\omega(2B)$ nos da que

$$2^{-np}\leq\frac{\omega(B)}{\omega(2B)}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1},$$

y como $\omega \in A_p$, podemos escribir $\omega(2B) \leq 2^{np}\omega(B)[\omega]_{A_p}$, lo que muestra que $\omega(x)dx$ es una medida duplicante.

■

3. Teorema de equivalencia

Habiendo visto propiedades iniciales y ejemplos para tener una idea de lo que son los pesos en las familias A_p, estamos en capacidad de enunciar el teorema más importante de esta lección.

Hemos visto que si se tiene la acotación de la función maximal en los espacios de Lebesgue $L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces el peso ω debe pertenecer a la clase A_p. Lo interesante es que se tiene la propiedad recíproca: si el peso pertenece a la clase A_p, entonces se tiene la acotación de las funciones maximales como nos indica el resultado siguiente.

Teorema 3.1 (Muckenhoupt)**.** *Sea* $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *un peso. Para toda función* $f \in L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *con* $1 < p < +\infty$ *se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}(f)(x)|^p \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx,$$

si y solo si el peso ω *pertenece a la clase* A_p.

Así podemos ver que el hecho de que un peso esté en A_p es *equivalente* a que las funciones maximales de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ sean acotadas en los espacios de Lebesgue $L^p(\omega)$.

Antes de presentar la demostración de este teorema, necesitaremos unos resultados adicionales donde intervienen los pesos ω de forma sistemática.

Definición (Función maximal asociada a un peso)**.** *Sea* ω *un peso que pertenece a la clase* A_p *con* $1 < p < +\infty$. *Definimos la función maximal* $\mathcal{M}_\omega$ *asociada al peso* ω *por la expresión*

$$\mathcal{M}_\omega(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(x)|\omega(x)dx. \tag{15}$$

Observación. En esta definición todas las cantidades son medidas con respecto a la medida $\omega(x)dx$: al momento de construir los promedios se considera la cantidad $\omega(B)$ y se integra la función con respecto a la medida con peso.

En este marco, cuando las funciones maximales y los espacios funcionales dependen del peso ω se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sea* $\omega \in A_p$ *con* $1 < p < +\infty$. *Entonces se tiene la estimación débil a continuación:*

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\omega(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\omega(x)dx.$$

Idea de la demostración.
Como $\omega \in A_p$ con $1 < p < +\infty$, sabemos por la Proposición 2.3 que la medida $\omega(x)dx$ es una medida duplicante. De esto, y reemplazando sistemáticamente la medida de Lebesgue usual por la medida $\omega(x)dx$, en la demostración del Lema de recubrimiento de Vitali y en el primer punto del Teorema 3.1 visto en la Lección n°2, se obtiene el resultado. ■

Existe una relación entre esta función maximal $\mathcal{M}_\omega$ y la función maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$, en donde las cantidades consideradas son medidas en forma usual, es decir con respecto a la medida de Lebesgue:

Lema 3.1. *Si* $\omega \in A_p$ *con* $1 < p < +\infty$, *entonces para toda función* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *localmente integrable se tiene la desigualdad*

$$\mathcal{M}(f)(x)^p \leq [\omega]_{A_p} \mathcal{M}_\omega(|f|^p)(x).$$

Idea de la demostración.
Basta recordar la propiedad de control sobre promedios que nos entrega la desigualdad

$$\operatorname*{prom}_B(|f|)^p \leq [\omega]_{A_p} \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x)|^p \omega(x)dx,$$

de manera que tomando el supremo sobre todas las bolas y usando las definiciones de funciones maximales $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_\omega$ se obtiene sin problema el resultado deseado. ■

Usando la Proposición 3.1 y el lema anterior podemos deducir algunas propiedades de la función maximal $\mathcal{M}$ en los espacios con peso.

Proposición 3.2. *Sean* $\omega \in A_p$, *con* $1 < p < +\infty$, *y* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente integrable.*

1) *La función maximal de Hardy-Littlewood* $\mathcal{M}$ *es continua en los espacios de Lebesgue* $L^\infty(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *y se tiene la estimación*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty(\omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\omega)},$$

para toda función $f \in L^\infty(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

2) Para todo $1 < p < +\infty$, la función maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ verifica la desigualdad

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx,$$

para todo $\alpha > 0$. Dicho de otra manera, para todo $1 < p < +\infty$, se tiene a estimación

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Demostración.

1) Puesto que $L^\infty(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la acotación de la función maximal $\mathcal{M}$ es inmediata recordando el Teorema 3.1 de la Lección n°2.

2) Como $\omega \in A_p$ con $1 < p < +\infty$, por la Proposición 3.1 se tiene la estimación

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \omega(x)dx,$$

pero dado que por el Lema 3.1 se tiene que $\mathcal{M}(f)(x)^p \leq [\omega]_{A_p} \mathcal{M}_\omega(|f|^p)(x)$, considerando en la expresión anterior $|f|^p$ en vez de f y tomando $\frac{\alpha^p}{[\omega]_{A_p}}$ en vez de α, obtenemos la desigualdad buscada

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx.$$

■

El último resultado que necesitamos para mostrar el Teorema 3.1 está dado por la proposición a continuación, que muestra una desigualdad muy particular de los pesos que pertenecen a la clase A_p.

Proposición 3.3 (Desigualdad de Hölder invertida). *Si $\omega \in A_p$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces existen dos constantes $\rho > 1$ y $C > 0$, que dependen del peso ω, tal que se tiene la desigualdad*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{\rho}} \leq \frac{C}{|B|} \int_B \omega(x)dx,$$

para toda bola B.

La demostración de este resultado es relativamente técnica y se la omitirá pues escapa del marco de esta lección.

Una consecuencia de esta desigualdad de Hölder invertida es que las familias de pesos A_p verifican una propiedad muy particular, que nos indica que, de aguna manera, el pertenecer a la clase A_p satisface una propiedad de *apertura* con respecto al parámetro p.

Corolario 3.1. *Sea $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow]0, +\infty[$ un peso. Si este peso ω pertenece a una clase A_p con $1 < p < +\infty$, entonces existe un $1 < p_0 < p$ tal que $\omega \in A_{p_0}$.*

Idea de la demostración.

- Como $\omega \in A_p$ con $1 < p < +\infty$, por la propiedad de dualidad de pesos, el peso $\sigma = \omega^{-\frac{1}{p-1}}$ pertenece a la clase $A_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $1 < p' < +\infty$. Luego, por la desigualdad de Hölder invertida se tiene que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \sigma^\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{\rho}} \leq \frac{C}{|B|} \int_B \sigma(x)dx,$$

para algún $\rho > 1$. Dado que se tiene $1 < p < +\infty$ y $\rho > 1$, existe un real $1 < p_0 < p$ tal que se tiene la indentidad $\frac{\rho}{p-1} = \frac{1}{p_0-1}$, con la cual podemos escribir

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|} \int_B \sigma^\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{\rho}} &= \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{-\frac{\rho}{p-1}}(x)dx\right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{-\frac{1}{p_0-1}}(x)dx\right)^{\frac{p_0-1}{p-1}} \leq \frac{C}{|B|} \int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx.\end{aligned}$$

- Elevando la desigualdad anterior a la potencia $p-1$ y multiplicando ambos lados de esta estimación por $\displaystyle\int_B \omega(x)dx$, obtenemos

$$\int_B \omega(x)dx \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p_0-1}}\right)^{p_0-1} \leq C' \int_B \omega(x)dx \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1}.$$

  Por como se define la constante característica de ω, tenemos el control siguiente que es válido para toda bola B

$$\int_B \omega(x)dx \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p_0-1}}\right)^{p_0-1} \leq C'[\omega]_{A_p},$$

  lo que muestra que el peso ω pertenece a la clase A_{p_0}.

■

Con estos resultados, estamos listos para mostrar el Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1

- Supongamos que ω es un peso que pertenece a la clase A_p con $1 < p < +\infty$. Entonces por el Corolario 3.1 sabemos que existe un número real $1 < p_0 < p$ tal que $\omega \in A_{p_0}$. Ahora, por el primer punto de la Proposición 3.2 se tiene la estimación

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty(\omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\omega)},$$

  mientras que por el segundo punto de la misma proposición y como $\omega \in A_{p_0}$, podemos escribir la estimación

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{p_0,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^{p_0}(\omega)}.$$

- Aplicando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz visto en la Lección n°2 (en su versión general y no solo con la medida de Lebesgue usual), se obtiene el siguiente control en donde $1 < p_0 < p < +\infty$:

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

  Es decir, la función maximal de Hardy-Littlewood es continua en los espacios de Lebesgue con peso $L^p(\omega)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 < p < +\infty$, como se quería mostrar.

■

Para concluir, es importante indiciar que existen muchísimos resultados, clásicos y recientes, relacionados con problemas de acotación de las funciones maximales con respecto a medidas con peso y es por lo tanto imposible hacer una exposición completa de estos temas en esta pequeña introducción. Indiquemos únicamente que el punto más relevante de esta sección relaciona la acotación de funciones maximales en espacios con peso con la pertenencia de estos pesos a las clases A_p.