<u>**Lección n°1**</u>**: Funciones maximales, definiciones y propiedades.** EPN, UITEY 2020

1. Solucionario

Ejercicio 1.1. *Dado que* $B(x,r) \subseteq Q(x,r)$*,*

$$\underset{B(x,r)}{\operatorname{prom}}(f) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{|Q(x,r)|}{|B(x,r)|}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy \tag{1}$$

$$\leq \frac{|Q(x,r)|}{|B(x,r)|}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)dy \tag{2}$$

$$\leq \frac{|Q(x,r)|}{|B(x,r)|}\underset{Q(x,r)}{\operatorname{prom}}(f) = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\underset{Q(x,r)}{\operatorname{prom}}(f). \tag{3}$$

Recíprocamente, dado que se tiene la inclusión $Q(x,r) \subset B(x,\sqrt{2}r)$*, con los mismos pasos anteriores obtenemos la desigualdad*

$$\underset{Q(x,r)}{\operatorname{prom}}(f) \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\underset{B(x,\sqrt{2}r)}{\operatorname{prom}}(f). \tag{4}$$

De (3) y (4) obtenemos el valor de las constantes

$$C_1 = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \qquad y \qquad C_2 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Vamos a ver que si permitimos que la función f *tome valores negativos, no siempre tenemos estas desigualdades. Consideremos para esto la función* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in B(0,1), \\ -5, & si\ x \in Q(0,1)\setminus B(0,1), \\ 0, & si\ x \notin Q(0,1). \end{cases}$$

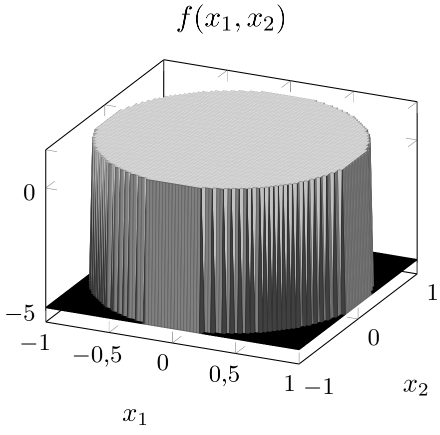

Figura 1: Grafo de la función f

Podemos notar que $\underset{B(0,1)}{\operatorname{prom}}(f) = 1$ *y* $\underset{Q(0,1)}{\operatorname{prom}}(f) = \frac{3\pi}{2} - 5 < 0$*, por lo tanto, no existe* $C > 0$ *tal que*

$$\underset{B(0,1)}{\operatorname{prom}}(f) < C\,\underset{Q(0,1)}{\operatorname{prom}}(f).$$

■

Ejercicio 1.2.

- *Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo, y consideremos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, y por lo tanto medible, tal que $B(x_0, r) \subseteq K$. Para aplicar el teorema de continuidad con respecto a un parámetro consideramos el espacio medido $(K, \mathcal{A}|_K, \mu|_K)$.*
- *Dado que f es localmente integrable, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $K \ni y \longmapsto \mathbb{1}B(x,r)f(y)$ es medible.*
- *La función $x \longmapsto \mathbb{1}_{B(x,r)}f(y)$ es continua en x_0 para casi todo $y \in K$, dado que las únicas discontinuidades se encuentran al borde de las bolas, de medida nula.*
- *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in K$ tenemos que*
$$|\mathbb{1}_{B(x,r)}f(y)| \leq |f(y)|,$$
y dado que f es localmente integrable, es integrable en $(K, \mathcal{A}|_K, \mu_K)$.
- *Aplicando el teorema de continuidad respecto a un parámetro tenemos que la función dada por*
$$\phi(x) = \int_K \mathbb{1}_{B(x,r)}f(y)dy = \int_{B(x,r)} f(y)dy,$$
es continua en x_0. Concluimos por la arbitrariedad de x_0 y la continuidad de la composición de funciones continuas.

■

Ejercicio 1.3. *Con el fin de probar que esta declaración no es verdadera en general, construyamos un contra-ejemplo. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por*
$$f(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in [a_1, b_1], \\ 0 & \text{si } x \notin [a_1, b_1], \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} k_2 & \text{si } x \in [a_2, b_2], \\ 0 & \text{si } x \notin [a_2, b_2], \end{cases}$$
donde $k_1 > k_2 > 0$, $a_2 < a_1$ y $b_1 < b_2$. Podemos ver que $|f| < |g|$ en $[a_2, a_1[\cup]b_1, b_2]$. Además, siguiendo un procedimiento similar al primer ejemplo estudiado en esta lección tenemos que
$$\mathcal{M}f(x) = \begin{cases} \frac{k_1}{2}\frac{b_1-a_1}{b_1-x} & \text{si } x < a_1, \\ k_1 & \text{si } x \in [a_1, b_1], \\ \frac{k_1}{2}\frac{b_1-a_1}{x-a_1} & \text{si } x > b_1, \end{cases} \qquad y \qquad \mathcal{M}g(x) = \begin{cases} \frac{k_2}{2}\frac{b_2-a_2}{b_2-x} & \text{si } x < a_2, \\ k_2 & \text{si } x \in [a_2, b_2], \\ \frac{k_2}{2}\frac{b_2-a_2}{x-a_2} & \text{si } x > b_2. \end{cases}$$
Ahora, vemos que $\mathcal{M}(f)(x) = \mathcal{M}(g)(x)$ en $]-\infty, a_2]$, si
$$\frac{k_1}{2}\frac{b_1 - a_1}{b_1 - x} = \frac{k_2}{2}\frac{b_2 - a_2}{b_2 - x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{k_2(b_2 - a_2)b_1 - k_1(b_1 - a_1)b_2}{k_2(b_2 - a_2) - k_1(b_1 - a_1)}.$$
Ahora, por la monotonía de $\mathcal{M}(f)|_{]-\infty,a_1]}$ y $\mathcal{M}(g)|_{]-\infty,a_2]}$, vemos que basta tomar $k_2 = \frac{k_1(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}$ para que $\mathcal{M}(f)(x) > \mathcal{M}(g)(x)$ en $]-\infty, a_2]$. De la misma manera, vemos que la misma restricción es suficiente para tener la desigualdad en $[b_2, +\infty]$. Con el fin de mantener la desigualdad en $]b_1, b_2[$, basta calcular los puntos de intersección entre k_2 y $\frac{k_1}{2}\frac{b_1-a_1}{x-a_1}$, donde tenemos la siguiente restricción
$$\frac{b_2 - a_2 + 2a_1}{2} > b_2.$$
De manera análoga, para en el intervalo $]a_2, a_1[$ tenemos
$$\frac{a_2 - b_2 + 2b_1}{2} < a_2.$$
Podemos ver que para cualquier par de funciones f y g que satisfaga estas condiciones, $\mathcal{M}(f) \geq \mathcal{M}(g)$ y existe un conjunto $]a_2, a_1[\cup]b_1, b_2[$, de medida mayor a 0, en el que $|f(x)| < |g(x)|$, como se ilustra en la Figura 2. ■

Ejercicio 1.4. *Consideremos $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Con la estimación del Ejercicio 1.1 tenemos que para todo $r > 0$*
$$\underset{B(x,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_1 \underset{Q(x,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_1 \mathcal{M}_Q(f)(x),$$
y
$$\underset{Q(x,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_2 \underset{B(x,\sqrt{2}r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_2 \mathcal{M}_B(f)(x).$$
El resultado es consecuencia de tomar el supremo en el lado izquierdo de ambas desigualdades. ■

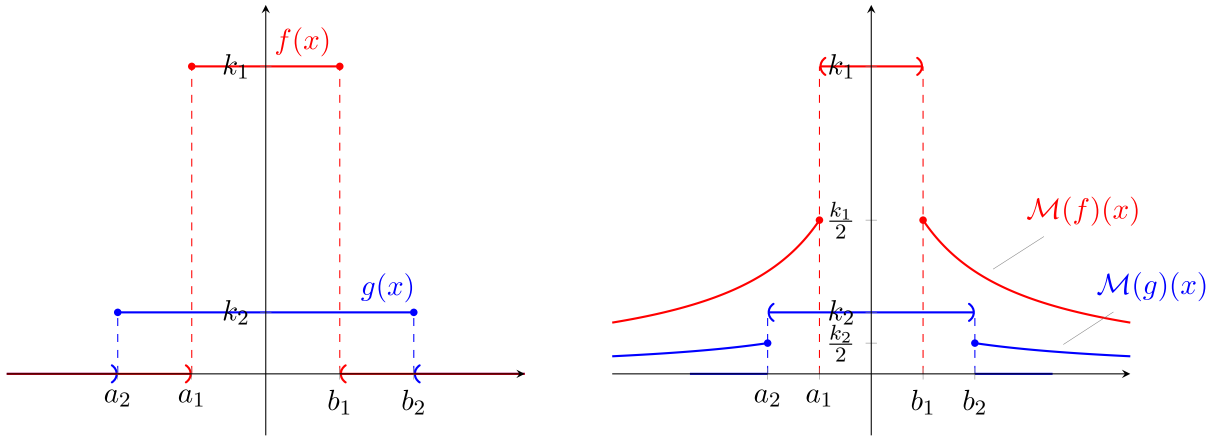

Figura 2: Grafo de las funciones f y g, junto con sus funciones maximales correspondientes $\mathcal{M}(f)$ y $\mathcal{M}(g)$

Ejercicio 1.5. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ cualquiera. Con la estimación del Ejercicio 1.1 tenemos que para todo $B(z,r) \ni x$ con $r > 0$*

$$\underset{B(z,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_1 \underset{Q(z,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_1 \mathscr{M}_Q(f)(x),$$

y

$$\underset{Q(z,r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_2 \underset{B(z,\sqrt{2}r)}{\text{prom}}(|f|) \leq C_2 \mathscr{M}_B(f)(x).$$

El resultado es consecuencia de tomar el supremo en el lado izquierdo de ambas desigualdades. ■

Ejercicio 1.6. *La primera desigualdad es inmediata, pues como $x \in B(x,r)$ para todo $r > 0$, entonces*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq \mathscr{M}(f)(x).$$

Puesto que $\mathscr{M}(f)(x)$ es una cota superior, tomando supremo en el lado izquierdo obtenemos

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x)$$

Ahora, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Notemos que toda bola no centrada que contienen a x y de radio r están contenidas en $B(x,2r)$, por lo tanto

$$\int_{B(z,r)} |f(y)|dy \leq \int_{B(x,2r)} |f(y)|dy,$$

con $x \in B(z,r)$. Así, reconstruyendo los promedios

$$\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |f(y)|dy \leq \frac{|B(x,2r)|}{|B(z,r)|}\frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} |f(y)|dy = 2^n \frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} |f(y)|dy.$$

Tomando supremo sobre la anterior desigualdad se obtiene

$$\mathscr{M}(f)(x) \leq 2^n \mathcal{M}(f)(x).$$

■

Ejercicio 1.7.

1. *Comencemos considerando $x \in B(0,r)$. razonando de manera análoga al ejemplo expuesto en la lección podemos considerar una bola $B(z,s) \subset B(0,r)$ tal que $x \in B(z,s)$. De esto se puede ver que*

$$\frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)} \mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)}(t)dt = 1$$

y si tomamos $B(z,s) \not\subset \overline{B}(0,r)$ *tal que* $x \in B(z,s) \cap \overline{B}(0,r)$ *entonces*

$$\frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)} \mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)}(t)dt = \frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)\cap\overline{B}(0,r)} dt < 1$$

Por lo tanto si tomamos supremo, obtenemos

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x) = 1 \qquad \forall x \in B(0,r).$$

2. *Ahora consideremos* $x \in \partial B(0,r) = \mathbb{S}(0,r)$. *tomemos* $z \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\|z-x\| < r$ *y* $s = \|z-x\|+\varepsilon$ *con* $\varepsilon > 0$. *Se toma de esta manera justamente para que a medida que* ε *se acerque a 0 entonces* $B(z,s) \subset \overline{B}(0,r)$. *De esta manera vamos a ver que*

$$\frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)} \mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)}(t)dt = \frac{|B(z,s)\cap\overline{B}(0,r)|}{|B(z,s)|} < 1$$

y tomando el supremo sobre s *obtenemos igualmente que*

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x) = 1 \qquad \forall x \in \partial B(0,r).$$

3. *Por último consideremos* $x \notin \overline{B}(0,r)$. *En este caso tomemos* $z \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $z = \left(-\frac{r}{2\|x\|}+\frac{1}{2}\right)x$ *y* $s = \frac{r+\|x\|}{2}+\varepsilon$, *con el fin de construir una familia de bolas que contengan a* $\overline{B}(0,r)$ *y que se acerquen a ella cuando* ε *tienda a 0. Dicho esto, podemos ver que* $\overline{B}(0,r) \subset B(z,s)$ *y por tanto*

$$\frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)} \mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)}(t)dt = \frac{\pi r^2}{\pi s^2} = \frac{4r^2}{(r+\|x\|+2\varepsilon)^2} < 1.$$

Así, tomando el supremo podemos concluir que

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x) = \frac{4r^2}{(r+\|x\|)^2} \qquad \forall x \notin \overline{B}(0,r).$$

Con estos tres puntos podemos escribir a $\mathscr{M}$ *como:*

$$\mathscr{M}(\mathbb{1}_{\overline{B}(0,r)})(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{B}(0,r) \\ \frac{4r^2}{(r+\|x\|)^2} & x \notin \overline{B}(0,r) \end{cases}$$

■

Ejercicio 1.8.

1. *Notemos que*

$$\int_{x-r}^{x+r} |s|ds = \frac{1}{2}\left((x+r)|x+r| - (x-r)|x-r|\right)$$

y por tanto

$$\underset{I}{prom}(f)(x) = \frac{1}{4r}\left((x+r)|x+r| - (x-r)|x-r|\right). \tag{5}$$

Analicemos por casos. Si $x+r > x-r > 0$ *entonces (5) se convierte en*

$$\underset{I}{prom}(f)(x) = \frac{1}{4r}\left((x+r)^2 - (x-r)^2\right) = \frac{1}{4r}(4rx) = x.$$

Por otro lado, cuando r *va tomando valores más grandes se llegará a tener* $x+r > 0 > x-r$ *con lo cual se obtiene*

$$\underset{I}{prom}(f)(x) = \frac{1}{4r}\left((x+r)^2 + (x-r)^2\right) = \frac{1}{4r}(2x^2+2r^2) = \frac{x^2}{2r}+\frac{r}{2},$$

que a medida que r *tiende al infinito, este valor también tiende al infinito.*

2. *Ahora, considerando $x < 0$ se tiene que analizar (5) en casos nuevamente. Si $x - r < x + r < 0$ obtenemos lo siguiente*

$$\underset{I}{prom}(f)(x) = \frac{1}{4r}\left(-(x+r)^2 + (x-r)^2\right) = \frac{1}{4r}(-4xr) = -x.$$

Por otro lado, puede darse el caso de $x - r < 0 < x + r$ que ya se analizó en el numeral anterior.

3. *Considerando $x = 0$, obtenemos en (5) que*

$$\underset{I}{prom}(f)(x) = \frac{1}{4r}\left((r)|r| - (-r)| - r|\right) = \frac{1}{4r}(2r^2) = \frac{r}{2}.$$

Es claro que en este caso cuando r tiende al infinito, el promedio también tiende al infinito como en los demás casos.

4. *De los 3 literales anteriores vemos que*

$$\lim_{r\to+\infty} \underset{I}{prom}(f)(x) = +\infty$$

es decir que el conjunto $\left\{\underset{I}{prom}(f)(x) : r > 0\right\}$ no es acotado y por tanto su supremo no existe. Así, $\mathcal{M}(f)(x)$ no existe para ningún $x \in \mathbb{R}$.

5. *Por la relación*

$$\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathscr{M}(f)(x)$$

demostrada en el ejercicio 1.6, se concluye directamente que $\mathscr{M}(f)(x)$ tampoco existe. ■