Lección n°2: Dos teoremas fundamentales.

EPN, UITEY 2021

1. Solucionario

Ejercicio 1.1. *Notando que se puede escribir a la función de distribución de f como*

$$d_f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)dx,$$

con esto y aplicando el Teorema de Fubini, se obtiene el resultado buscado pues

$$\begin{aligned} p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha &= p\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{p-1}\mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)dxdx\alpha = p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)d\alpha dx \\ &= p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1}d\alpha dx = p\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{p}|f(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx = \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.2. *Sean $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ y $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ cualesquiera. Aprovechando la unimodularidad de $\mathbb{R}^n$ se puede ver que*

$$d_{f_\tau}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x+\tau)|>\alpha\}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)dx = d_f(\alpha),$$

por lo tanto

$$\|f_\tau\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\{\alpha d_{f_\tau}(\alpha)\} = \sup_{\alpha>0}\{\alpha d_f(\alpha)\} = \|f\|_{L^{1,\infty}}.$$

Para la dilatación, basta tomar el cambio de variable $y = \lambda x$, donde $dy = \lambda^n dx$, por lo tanto

$$d_{\delta_\lambda(f)}(\alpha) = \int_{\{|f(\lambda x)|>\alpha\}} dx = \lambda^{-n}\int_{\{|f(y)|>\alpha\}} dy = \lambda^{-n}d_f(\alpha),$$

con lo cual

$$\|\delta_\lambda(f)\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha d_{\delta_\lambda(f)}(\alpha)\right\} = \lambda^{-n}\sup_{\alpha>0}\{\alpha d_f(\alpha)\} = \lambda^{-n}\|f\|_{L^{1,\infty}}.$$

■

Ejercicio 1.3. *Se calcula directamente usando la definición:*

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\{\alpha d_f(\alpha)\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |x|^{-n} > \alpha\}\right|\right\} \tag{1}$$

Aquí, se puede notar que

$$\{x\in\mathbb{R}^n : |x|^{-n} > \alpha\} = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| < \alpha^{-\frac{1}{n}}\} = B\left(0, \alpha^{-\frac{1}{n}}\right) = \alpha^{-1}B(0,1)$$

y por lo tanto, reemplazando en (1)

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\alpha^{-1}\left|B(0,1)\right|\right\} = \sup_{\alpha>0}\{|B(0,1)|\} = |B(0,1)| < +\infty.$$

Así, $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. ■

Ejercicio 1.4. *En la Lección n°1 vimos que*

$$\mathscr{M}(f)(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{b-x} & si\ x < a, \\ 1 & si\ a \le x \le b, \\ \frac{b-a}{x-a} & si\ x > b. \end{cases}$$

Sea $\alpha > 0$, encontremos $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \colon |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\}$. Empecemos considerando $]a, +\infty[$, por la monotonía de $\mathscr{M}(f)|_{(a,+\infty)}$ basta con encontrar los valores de x tal que

$$\alpha < |\mathscr{M}(f)(x)| = \frac{b-a}{x-a}.$$

Podemos ver que

$$\{x \in]a, +\infty[\colon |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\} = \left] a, \frac{b-a}{\alpha} + a \right[.$$

De manera análoga obtenemos que

$$\{x \in]-\infty, a] \colon |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\} = \left] \frac{a-b}{\alpha} + b, a \right],$$

y por lo tanto

$$\alpha\, |E_\alpha| = \alpha \left| \left] \frac{a-b}{\alpha} + b, \frac{b-a}{\alpha} + a \right[\right| = \alpha \left(\frac{2(b-a)}{\alpha} + a - b \right) = 2(b-a) - \alpha(b-a).$$

Dado que $b > a$, podemos ver que el supremo se alcanza a medida que α tiende a 0, por lo que tenemos que

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \{\alpha\, |E_\alpha|\} = 2(b-a).$$

■

Ejercicio 1.5. *Haciendo uso de la desigualdad $\mathcal{M}(f)(x) \le \mathscr{M}(f)(x)$, para todo $\alpha > 0$ tenemos que*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(f)(x)\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \{\alpha|\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\}|\} &\le \sup_{\alpha>0} \{\alpha|\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\mathscr{M}(f)(x)| > \alpha\}|\} \\ &= \|\mathscr{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \le C\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.6. *Sea $t > 0$, cualquiera. Tenemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|\phi_t(x)| = \frac{1}{t^n} \left| \phi\left(\frac{x}{t}\right) \right|,$$

por lo tanto

$$\|\phi_t\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \left| \phi\left(\frac{x}{t}\right) \right| dx.$$

Tomando el cambio de variable $u = \frac{x}{t}$,

$$\|\phi_t\|_{L^1} = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(u)| t^n du = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(u)| du = \|\phi\|_{L^1}.$$

■

Ejercicio 1.7.

1. *De la desigualdad dada en el enunciado tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+\delta)}dx$$

Por tanto para probar que $\phi \in L^1$ *basta analizar* $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+\delta)}dx$. *Para ello, notemos que* $(1+|x|)^{-(n+\delta)}$ *es una función radial, por tanto podemos calcular la integral de la siguiente manera:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+\delta)}dx = s_n \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}}d\rho = s_n \left(\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}}d\rho + \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}}d\rho \right) \tag{2}$$

donde s_n *es el área de la* $n-$*esfera. Luego, puesto que* $\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}} < C$ *entonces*

$$\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}}d\rho \leq C. \tag{3}$$

Por otro lado, para $\rho \geq 1$ *se tiene que* $\frac{1}{(1+\rho)^{n+\delta}} \leq \frac{1}{\rho^{n+\delta}}$ *y por tanto*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}}d\rho \leq \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+\delta}}d\rho = \int_1^{+\infty} \rho^{-(1+\delta)}d\rho \leq C < +\infty. \tag{4}$$

De (3) y (4) en (2) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+\delta)}dx < +\infty,$$

Lo que nos permite concluir que $\|\phi\|_{L^1} < +\infty$.

2. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *cualquiera. Gracias al Teorema 2.1 tenemos que*

$$\mathcal{M}_\phi(f)(x) \leq \|\phi\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x),$$

de donde se puede concluir directamente que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}_\phi(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|\phi\|_{L^1}|\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\}.$$

Así

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}_\phi(f)(x)| > \alpha\}| \leq \left|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\phi\|_{L^1}|\mathcal{M}_(f)(x)| > \alpha\}\right|. \tag{5}$$

Del Teorema 3.1 se sabe que $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$, *con lo cual*

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\phi\|_{L^1}|\mathcal{M}_(f)(x)| > \alpha\}\right| \leq \frac{C\|\phi\|_{L^1}}{\alpha}\|f\|_{L^1}. \tag{6}$$

De (5) y (6) se tiene que

$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|\phi\|_{L^1}\|f\|_{L^1}.$$

3. *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *cualquiera. Gracias al Teorema 4.1, tenemos que*

$$|\mathcal{M}_\phi(f)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1}|\mathcal{M}(f)(x)|$$

casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. *De esto*

$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1}\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p},$$

y junto con la acotación en L^p *del Teorema 3.1 se obtiene*

$$\|\mathcal{M}_\phi(f)\|_{L^p} \leq C\|\phi\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

Donde C *depende únicamente de* p. ■

Ejercicio 1.8.

1. *Sea* $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{B_i}$*, donde* $a_i > 0$ *y* $B_i = B(0, r_i)$ *con* $r_i > 0$*, para cada* $1 \leq i \leq N$*. Así, por propiedades de la convolución y razonando como en la demostración del Teorema 4.1*

$$|(f * \phi)(x)| \leq \sum_{i=1}^{N} a_i |(f * \mathbb{1}_{B_i})(x)| \leq \sum_{i=1}^{N} a_i |B_i| \mathcal{M}(f)(x),$$

   donde $\|\phi\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{N} a_i |B_i|$*. Por tanto podemos escribir*

$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x),$$

   más aún, si suponemos que ϕ *está mayorado por* Φ *una función en* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *acotada, radial y radialmente decreciente, tenemos que* $\|\phi\|_{L^1} \leq \|\Phi\|_{L^1}$*. Por lo tanto*

$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

2. *Ahora supongamos que* ϕ *positiva, con mayorante* Φ *descrito en el enunciado del ejercicio. Así, existe una sucesión de funciones simples* $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\phi_n(x) \leq \Phi$ *y* $\phi_n(x)$ *converge a* $\phi(x)$ *casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^n$*. Del numeral anterior, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$|(f * \phi_n)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

   Gracias al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, tomando $n \longrightarrow +\infty$ *en la desigualdad anterior*

$$|(f * \phi)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

3. *En el numeral anterior encontramos una cota uniforme para* $|(f * \phi)(x)|$*, por tanto para cada* $t > 0$ *se puede decir que*

$$|(f * \phi_t)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

   Tomando supremo sobre los $t > 0$ *en la desigualdad anterior se concluye que*

$$\mathcal{M}_\phi(f)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

$\blacksquare$