Lección n°3: Tres aplicaciones. EPN 2021

1. Solucionario

Ejercicio 1.1. *Analicemos la representación exacta de* $\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}$ *por casos. Si* $x\in]1,2[\setminus\mathbb{Q}$*, se tiene que para* $r>0$

$$\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{|]x-r,x+r[\cap[1,2]\setminus\mathbb{Q}|}{|]x-r,x+r[|}.$$

Si tomamos $r<\min\{|x-1|,|x-2|\}$ *entonces* $]x-r,x+r[\subset[1,2]$ *y por lo tanto la igauldad anterior se convierte en*

$$\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{|]x-r,x+r[\setminus\mathbb{Q}|}{|]x-r,x+r[|}=\frac{|]x-r,x+r[|}{|]x-r,x+r[|}=1.$$

Así, tomando $r\longrightarrow 0$ *en la igualdad anterior obtenemos*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=1,$$

lo que implica que el límite existe para todo $x\in[1,2]\setminus\mathbb{Q}$*. Si consideramos* $x\in]1,2[\setminus\mathbb{Q}$*, siguiendo el mismo razonamiento tenemos que*

$$\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{|]x-r,x+r[\setminus\mathbb{Q}|}{|]x-r,x+r[|}=\frac{|]x-r,x+r[|}{|]x-r,x+r[|}=1,$$

para $r<\min\{|x-1|,|x-2|\}$*. Por lo tanto el límite obtenido es el mismo*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=1.$$

Ahora, analicemos qué pasa si $x=1$*. En este caso, si tomamos* $r<1$ *obtenemos la igualdad*

$$\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{|]1,1+r[\setminus\mathbb{Q}|}{|]x-r,x+r[|}=\frac{|]1,1+r[|}{|]x-r,x+r[|}=\frac{1}{2}.$$

Así, tomando $r\longrightarrow 0$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{1}{2}$$

y de manera análoga para $x=2$*. Por último, analicemos* $x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$*. Así, para* $r<\min\{|x-1|,|x-2|\}$ *se tiene que* $]x-r,x+r[\cap[1,2]\setminus\mathbb{Q}=\emptyset$

$$\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=\frac{|]x-r,x+r[\cap[1,2]\setminus\mathbb{Q}|}{|]x-r,x+r[|}=\frac{|\emptyset|}{|]x-r,x+r[|}=0.$$

Donde, para valores cercanos al 0*, se tiene la igualdad*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|]x-r,x+r[|}\int_{x-r}^{x+r}\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}(y)dy=0,$$

lo que muestra que en estos puntos, el límite si existe. En resumen, tenemos que la representación exacta está dada por:

$$\left(\mathbb{1}_{[1,2]\setminus\mathbb{Q}}\right)_*(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in]1,2[\\ \frac{1}{2} & si\ x=1,x=2\\ 0 & caso\ contrario.\end{cases}$$

■

Ejercicio 1.2.

1. *Consideremos la función* $\mathbb{1}_E$. *Puesto que esta función es localmente integrable, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, se tiene la igualdad*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \mathbb{1}_E(y)dy = \mathbb{1}_E(x) \qquad c.t.p. \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Puesto que para cualquier $r>0$, *se tiene*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \mathbb{1}_E(y)dy = \frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}.$$

De donde se concluye directamente, al reemplazar esta igualdad en (1), *el resultado buscado*

$$\lim_{r\to 0} \frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \mathbb{1}_E(x),$$

casi todo punto $x\in\mathbb{R}^n$.

2. *Supongamos que* $|E|>0$ *y que no existen puntos de Lebesgue. Es decir que la funciín* $\mathbb{1}_E$ *no tiene puntos de Lebesgue dentro del conjunto* E. *Como el complemento del conjunto de Lebesgue es de medida nula, y* E *estaría contenido en este conjunto entonces se concluiría que* $|E|=0$, *lo que contradice que* $|E|>0$. *Por tanto* E *debe tener puntos de Lebesgue de* $\mathbb{1}_E$.

Reciprocamente, supongamos que $x\in E$ *es un punto de Lebesgue y mostremos que* $|E|>0$. *Así se tiene para la función* $\mathbb{1}_E$ *del numeral anterior que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1.$$

Así, para $0<\varepsilon<1$, *existe* $\delta>0$ *tal que si* $r<\delta$ *entonces*

$$\left|\frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} - 1\right| < \varepsilon,$$

de donde

$$(1-\varepsilon)|B(x,r)| < |E\cap B(x,r)| < |E|.$$

Como $1-\varepsilon>0$, *se concluye que* $|E|>0$.

■

Ejercicio 1.3. *Gracias al Teorema de diferenciación de Lebesgue, para casi todo* $x\in\mathbb{R}^n$ *se tiene la igualdad*

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy.$$

Así, sabiendo que $f(x)\le |f(x)|$ *se tiene*

$$f(x) \le \left|\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy\right| \le \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Recordando que el límite está mayorado por el supremo, se sigue de la anterior desigualdad el resultado

$$f(x) \le \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \mathcal{M}(f)(x)$$

casi todo punto $x\in\mathbb{R}^n$. ■

Ejercicio 1.4. *Se recuerda que los puntos de Lebesgue de una función* $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *son los puntos* $x\in\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|^p dy = 0, \tag{2}$$

para $1 \leq p < +\infty$. Reescribiendo esta defnción de la siguiente manera

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\|f - f(x)\|^p_{L^p(B(x,r))} = 0,$$

al considerar $p = +\infty$, es natural intentar definirla como los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\|f - f(x)\|_{L^\infty(B(x,r))} = 0. \tag{3}$$

sin embargo hay un problema con esta definición, pues si consideramos la función

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

en el punto $x_0 = 0$ se tiene que el límite en (3) diverge. En efecto, puesto que

$$\|f - f(0)\|_{L^\infty(]-r,r[)} = \|f\|_{L^\infty(]-r,r[)} = r^{\frac{1}{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\|f - f(0)\|_{L^\infty(]-r,r[)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r^{\frac{1}{2}}} = +\infty.$$

Entonces si $p = +\infty$ tenemos que el punto $x = 0$ no es un punto de Lebesgue para f, pero si $1 \leq p < +\infty$ en cambio se tiene que si lo es. Esto se tiene gracias a que para cualquier $r > 0$ y $1 \leq p < +\infty$

$$\frac{1}{|]-r,r[|}\int_{-r}^{r} |f(y) - f(0)|^p dy = \frac{1}{2r}\left(\int_{-r}^{r} |y|^{\frac{p}{2}} dy\right) = \frac{2r^{\frac{p}{2}+1}}{2r\left(\frac{p}{2}+1\right)} = \frac{r^{\frac{p}{2}}}{\frac{p}{2}+1}.$$

Con lo cual, se tiene el límite

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|]-r,r[|}\int_{-r}^{r} |f(y) - f(0)|^p dy = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\frac{p}{2}}}{\frac{p}{2}+1} = 0,$$

lo que implica que $x_0 = 0$ es un punto de Lebesgue de f para $1 \leq p < +\infty$. ■

Ejercicio 1.5.

1. *Puesto que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, se tienen los valores:*

   $$|]x-h, x+h[| = 2h \quad y \quad |]x, x+h[| = h,$$

   Basta tomar $C = 2$ para concluir que

   $$|]x-h, x+h[| \leq 2|]x, x+h[|,$$

   para todo $h > 0$.

2. *Del numeral anterior se tiene que para cualquier $h > 0$*

   $$\frac{1}{|]x, x+h[|} \leq \frac{2}{|]x-h, x+h[|}.$$

   De esto, y del hecho de que $]x, x+h[\subset]x-h, x+h[$ se tiene la siguiente mayoración

   $$0 \leq \frac{1}{|]x, x+h[|}\int_x^{x+h} |f(y) - f(x)|dy \leq \frac{2}{|]x-h, x+h[|}\int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)|dy. \tag{5}$$

   Gracias al Corolario 1,2 de la Lección n°3, se sabe que

   $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|]x-h, x+h[|}\int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)|dy = 0 \qquad c.t.p.\ x \in \mathbb{R},$$

   por tanto si tomamos $h \longrightarrow 0$ en (5) obtenemos

   $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|]x, x+h[|}\int_x^{x+h} |f(y) - f(x)|dy = 0 \qquad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}.$$

3. *Del numeral anterior se tiene que*

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{|]x,x+h[|}\int_x^{x+h} f(y)-f(x)dy\right| \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{|]x,x+h[|}\int_x^{x+h}|f(y)-f(x)|dy = 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|]x,x+h[|}\int_x^{x+h} f(y)-f(x)dy = 0.$$

Notando que $f(x)$ no depende de la variable de integración en la anterior igualdad, se concluye

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = f(x).$$

■

Ejercicio 1.6.

1. *Aplicando la transformada de Fourier a $I_\alpha(f)$ y por el Teorema de Fubini se obtiene:*

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}\widehat{(\mathfrak{g}_t * f)}(\xi)dt.$$

Como $\widehat{(h*g)}(\xi) = \widehat{h}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ se obtiene

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}\widehat{\mathfrak{g}}_t(\xi)\widehat{f}(\xi)dt = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}\widehat{\mathfrak{g}}_t(\xi)dt.$$

Recordando que $\widehat{\mathfrak{g}}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$, reemplazando en la igualdad anterior se obtiene

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}e^{-t|\xi|^2}dt. \tag{6}$$

2. *Tomando el cambio de variable $\tau = t|\xi|^2$ en (6) se obtiene*

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\Gamma(\alpha/2)}\frac{1}{|\xi|^{\alpha-2}|\xi|^2}\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha/2-1}e^{-\tau}d\tau = \frac{\hat{f}(\xi)|\xi|^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha/2-1}e^{-\tau}d\tau.$$

Recordando que $\Gamma(\alpha/2) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha/2-1}e^{-\tau}d\tau$, de la integral anterior se obtiene

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)|\xi|^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha/2)}\Gamma(\alpha/2) = \widehat{f}(\xi)|\xi|^{-\alpha},$$

lo que se quería mostrar. Como la transformada de Fourier es invertible, esto verifica que efectivamente se tiene la caracterización.

■

Ejercicio 1.7.

1. *Sea $\tau \in \mathbb{R}^n$, arbitrario pero fijo. Por definición se tiene*

$$\|I_\alpha(f_\tau)\|_{L^p}^p = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f_\tau(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\right|^p dx = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x+\tau-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\right|^p dx.$$

Tomando el cambio de variable $z = x+\tau$ y aprovechando la unimodularidad de $\mathbb{R}^n$, se obtiene

$$\|I_\alpha(f_\tau)\|_{L^p}^p = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(z-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\right|^p dz = \|I_\alpha(f)\|_{L^p}^p,$$

de donde se sigue el resultado.

2. *Sea $\lambda > 0$, cualquiera. Siguiendo la idea del numeral anterior tenemos que*

$$\|I_\alpha(\delta_\lambda(f))\|_{L^p}^p = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda x-\lambda y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\right|^p dx.$$

Tomando primero como cambio de variable $w=\lambda y$, la integral interna se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda x-\lambda y)}{|y|^{n-\alpha}}dy = \lambda^{n-\alpha}\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda x-w)}{|w|^{n-\alpha}}dw = \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda x-w)}{|w|^{n-\alpha}}dw.$$

Luego, tomando $z=\lambda x$ y gracias a la desigualdad anterior se obtiene

$$\|I_\alpha(\delta_\lambda(f))\|_{L^p}^p = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(z-w)}{|w|^{n-\alpha}}dw\right|^p\lambda^{-n}dz = \lambda^{-n-\alpha p}C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(z-w)}{|w|^{n-\alpha}}dw\right|^p dz.$$

Esto nos permite concluir que $\|I_\alpha(\delta_\lambda(f))\|_{L^p}^p = \lambda^{-n-\alpha p}\|I_\alpha(f)\|_{L^p}^p$, de donde se deduce el resultado. ■

Ejercicio 1.8. *En el desarrollo del ejercicio se denotarán a las constantes que dependan de n o α como C.*

1. *Supongamos f es una función constante de la forma $f(x)=k$ con $k\in\mathbb{R}$. Para cada $x\in\mathbb{R}^n$, se puede ver que*

$$I_\alpha(f)(x) = C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy = kC\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}dy = C'\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-\alpha}}d\rho = \frac{C'}{\alpha}\rho^\alpha\bigg|_0^{+\infty} = +\infty,$$

pues $\alpha>0$. Así, $I_\alpha(f)(x)=+\infty$ para cada $x\in\mathbb{R}^n$ y para todo $0<\alpha<n$.

2. *Sea $g(x)=(1-|x|)^{-(n+\delta)}$, y estudiemos $I_\alpha(g)(x)$, con $x\in\mathbb{R}^n$. Tenemos que el potencial de Riesz de esta función se escribe como*

$$I_\alpha(g)(x) = C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy \tag{7}$$

a) *Supongamos que $|x|<1$. Podemos escribir a (7) de la siguiente manera*

$$I_\alpha(g)(x) = C\left(\int_{\{|y|<1\}}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy + \int_{\{|y|\geq 1\}}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy\right). \tag{8}$$

Puesto que $\delta>0$, se tiene que $\dfrac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}\leq 1$ y por tanto en la primera integral

$$\int_{\{|y|<1\}}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy \leq \int_{\{|y|<1\}}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}dy < +\infty$$

pues $\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}$ es localmente integrable. Para la segunda integral, puesto que $|y|\leq|x-y|+|x|\leq|x-y|+1$, se deduce que

$$\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} \leq \frac{1}{|y|^{n+\delta}}.$$

Mayorando la segunda integral con la anterior desigualdad, se logra concluir que

$$\int_{\{|y|\geq 1\}}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy \leq \int_{\{|y|\geq 1\}}\frac{1}{|y|^{2n-\alpha+\delta}} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{\rho^{n-\alpha+\delta+1}}d\rho < +\infty,$$

pues $\delta>0>\alpha-n$. Así, de las desigualdades anteriores en (8), tenemos que $I_\alpha(g)(x)<+\infty$ para $\delta>0$ y $|x|<1$.

b) *Por simplicidad, denotaremos como*

$$A = \left\{y\in\mathbb{R}^n : |y|\leq\frac{|x|}{2}\right\}.$$

Notemos que para $y\in A$, se tiene que $|x|\leq|x-y|+|y|\leq|x-y|+\frac{|x|}{2}$, y como $\delta>0$ se deduce que

$$\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta}}.$$

Así, podemos mayorar la integral

$$\int_A \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy,$$

obteniendo

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy &\leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta}} \int_A \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta}} \int_0^{|x|/2} \rho^{\alpha-1} d\rho = \frac{C|x|^\alpha}{(1+|x|)^{n+\delta}} \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta-\alpha}}.\end{aligned}$$

c) *Por facilidad de escritura se denotará*

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |x-y| > \frac{|x|}{2} \right\}.$$

Notemos que sobre A^c, $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 3|y|$, *de donde se deduce*

$$\frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \leq \frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}},$$

con lo cual, podemos obtener la siguiente mayoración

$$\begin{aligned}\int_{A^c \cap B} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy &\leq \int_{A^c \cap B} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \\ &\leq \int_{A^c \cap B} \frac{1}{|x-y|^{2n-\alpha+\delta}} dy \\ &\leq \int_B \frac{1}{|x-y|^{2n-\alpha+\delta}} dy \\ &\leq \int_B \frac{1}{|x|^{2n-\alpha+\delta}} dy = \frac{C}{|x|^{n+\delta-\alpha}} \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}},\end{aligned}$$

lo cual se cumple pues $\delta > \alpha - n$.

d) *Notemos que sobre* $A^c \cap B^c$ *se tiene* $\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq \frac{3|x|}{2}$, *lo que implica*

$$\frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}}.$$

De este modo, se obtiene la siguiente mayoración

$$\int_{A^c \cap B^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} \int_{A^c \cap B^c} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} \int_{B^c} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} dy.$$

Tomando como cambio de variable $z = x - y$ *en la anterior integral se tiene la desigualdad*

$$\int_{A^c \cap B^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} \int_{\{|z| \leq \frac{|x|}{2}\}} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\delta}} dz.$$

Ahora, puesto que $\delta > 0$, *tenemos que*

$$\begin{aligned}\int_{\{|z| \leq \frac{|x|}{2}\}} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\delta}} dz &= \int_{\{|z| \leq 1\}} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\delta}} dz + \int_{\{1 < |z| \leq \frac{|x|}{2}\}} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\delta}} dz \\ &\leq C + C' \int_1^{|x|/2} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{n+\delta}} d\rho \\ &\leq C + C' \int_1^{|x|/2} \frac{1}{\rho^{\delta+1}} d\rho \\ &\leq C + C' \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{\delta+1}} d\rho < +\infty.\end{aligned}$$

Resumiendo, se obtuvo la mayoración buscada

$$\int_{A^c \cap B^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}} \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}}.$$

e*) Notemos que podemos escribir* (7) *como sigue*

$$I_\alpha(g)(x) = C\left(\int_A \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy + \int_{A^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy\right),$$

y la segunda integral se la puede abrir de la siguiente manera

$$\int_{A^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy = \int_{A^c\cap B} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy + \int_{A^c\cap B^c} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\frac{1}{(1+|x-y|)^{n+\delta}}dy.$$

De los literales anteriores tenemos que si $|x| < 1$*, entonces* $I_\alpha(g)(x)$ *es acotada, y si* $|x| \leq 1$ *entonces se puede mayorar al potencial de Riesz de la función* g *de la siguiente manera*

$$I_\alpha(g)(x) \leq \frac{C}{|x|^{n+\delta-\alpha}} + \frac{C}{|x|^{n-\alpha}}.$$

Así, como $\delta > 0$*, se deduce para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *que*

$$I_\alpha(g)(x) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n-\alpha}}, \tag{9}$$

la cual es acotada y por tanto finita. Así, $|I_\alpha(g)(x)| < +\infty$ *siempre que* $\delta > 0$.

3. Puesto que $\delta > 0$*, de la estimación en e) basta ver que la función* $\dfrac{C}{(1+|x|)^{n-\alpha}}$ *sea cuadrado integrable. Así, notemos que*

$$C^2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}dx = C^2\int_{B(0,1)} \frac{1}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}dx + C^2\int_{B(0,1)^c} \frac{1}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}dx$$

Donde la primera integral es finita ya que $\dfrac{C}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}$ *es localmente integrable, por tanto se lo puede mayorar de la siguiente manera*

$$C^2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}dx \leq C' + C''\int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{2n-2\alpha}}d\rho \leq C' + C''\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{n-2\alpha+1}}d\rho < +\infty$$

siempre que $n - 2\alpha > 0$*, es decir que* $\alpha < \frac{n}{2}$ *para que la integral anterior sea finita. Así, de* (9)*, se deduce que*

$$\|I_\alpha(g)\|_{L^2}^2 \leq C^2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{2n-2\alpha}}dx < +\infty,$$

para $\alpha < \frac{n}{2}$ *y* $\delta > 0$. ■

Ejercicio 1.9.

1. a*) Derivando respecto a* x *se tiene la expresión*

$$\frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{|x|^2}{4}}\right) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

cuyo gráfico es el siguiente:

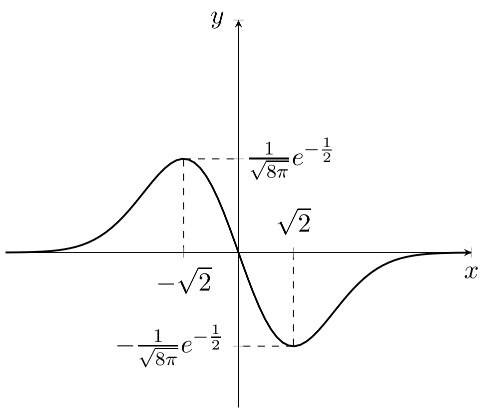

Figura 1: Gráfico de $\dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx}(x)$.

De la forma que tiene esta función, se puede notar que su integral es nula.

b*) Usando la definición del producto en convolución se calcula directamente que*

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{g}_t(y)\mathfrak{g}_1(x-y)dy &= \frac{1}{4\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|y|^2}{4t}-\frac{|x-y|^2}{4}}dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t+1}{4t}y^2+\frac{xy}{2}-\frac{t}{4(t+1)}x^2+\frac{t}{4(t+1)}x^2-\frac{x^2}{4}}dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{t}} e^{\frac{t}{4(t+1)}x^2-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{t+1}{4t}}y-\sqrt{\frac{t}{4(t+1)}}x\right)^2} dy.
\end{aligned}
$$

Tomando el cambio de variable $u = \sqrt{\dfrac{t+1}{4t}}y - \sqrt{\dfrac{t}{4(t+1)}}x$*, de modo que* $dy = \sqrt{\frac{4t}{t+1}}du$*, en la integral anterior se obtiene*

$$
(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}\sqrt{\frac{4t}{t+1}}e^{\frac{t}{4(t+1)}x^2-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} = \mathfrak{g}_{t+1}(x),
$$

como se quería mostrar.

c*) Recordando que* $\left(\mathfrak{g}_t * \dfrac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)(x) = \dfrac{d}{dx}(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)$ *y gracias al literal anterior, se obtiene la igualdad buscada derivado* $\mathfrak{g}_{t+1}$ *respecto a* x *como sigue*

$$
\begin{aligned}
\left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)(x) = \frac{d\mathfrak{g}_{t+1}}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) \\
&= -\frac{x}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}.
\end{aligned}
$$

d*) Por el resultado obtenido en el literal anterior, se puede escribir lo siguiente*

$$
\sup_{t>0}\left|\left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)(x)\right| = \sup_{t>0}\left|-\frac{x}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right| = \sup_{t>0}\left\{\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right\}. \tag{10}
$$

Para estudiar el supremo sobre $t > 0$*, haremos uso del criterio de la primera derivada respecto a la variable* t*. Suponiendo que* $|x| > \sqrt{6}$ *y derivando respecto a* t *el argumento del supremo en* (10) *se obtiene sin mayor dificultad que*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) &= \frac{|x|}{4\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) \\
&= \frac{|x|}{4\sqrt{\pi}}\left(-\frac{3}{2(t+1)^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} + \frac{|x|^2}{4(t+1)^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) \\
&= (|x|^2 - 6(t+1))\frac{|x|}{16\sqrt{\pi}(t^2+1)^{7/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t^2+1)}}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Igualando esta expresión a 0 *con la finalidad de encontrar puntos críticos, obtenemos que*

$$
\begin{aligned}
|x|^2 - 6(t+1) &= 0 \\
t+1 &= \frac{|x|^2}{6} \\
t &= \frac{|x|^2}{6} - 1,
\end{aligned}
$$

lo cual tiene sentido pues $|x| > \sqrt{6}$*. Más aún, se puede ver que el signo de la derivada en* (11) *es dado por el factor* $|x|^2 - 6(t+1)$ *ya que* $t > 0$*. Así, si* $t < \dfrac{|x|^2}{6} - 1$*, entonces* $|x|^2 - 6(t+1) > 0$ *y por lo tanto* (11) *es positiva para dichos valores de* t*. Por otro lado, si* $t > \dfrac{|x|^2}{6} - 1$ *entonces* $|x|^2 - 6(t+1) < 0$ *y* *por tanto* (11) *es negativa. Esto nos indica que existe un máximo en* $t = \dfrac{|x|^2}{6} - 1$, *de donde se obtiene que*

$$\sup_{t>0}\left\{\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right\} = \frac{|x|}{4\sqrt{\pi}\left(\frac{|x|^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\frac{|x|^2}{6}}} = \frac{6^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{|x|^2},$$

cuando $|x| > \sqrt{6}$.

e) *Suponiendo ahora que* $|x| \leq \sqrt{6}$, *entonces*

$$|x|^2 - 6(t+1) < 0,$$

ya que $t+1 > 1$. *De esto, tenemos que la derivada en* (11) *es negativa para cualquier valor de* t, *lo que implica que la función* $\dfrac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}$ *es decreciente respecto a* t. *Esto nos indica que el supremo de la función se alcanza cuando* t *tiende a* 0, *de donde se deduce lo siguiente*

$$\sup_{t>0}\left\{\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} = \frac{|x|}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

que es lo que se quería mostrar.

f) *Gracias a los resultados obtenidos en d) y e), se puede escribir lo siguiente*

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)\right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}}\sup_{t>0}\left|\left(\mathfrak{g}_t * \frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)(x)\right|dx \\ &= \int_{\{|x|\leq\sqrt{6}\}}\frac{|x|}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}dx + \int_{\{|x|>\sqrt{6}\}}\frac{6^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{|x|^2}dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Como $\dfrac{|x|}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ *es localmente integrable, la primera integral en* (12) *es finita. La segunda integral se puede calcular sin difucltad como sigue:*

$$\int_{\{|x|>\sqrt{6}\}}\frac{6^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{|x|^2}dx = \frac{6^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}}\left(2\int_{\sqrt{6}}^{+\infty}\frac{1}{|x|^2}dx\right) = \frac{6^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}}\left(-2\left.\frac{1}{x}\right|_{\sqrt{6}}^{+\infty}\right) = \frac{6}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{2}} < +\infty.$$

Con esto, se ha mostrado que cada integral en (12) *es finita, lo que nos permite concluir finalmente que* $\left\|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{d\mathfrak{g}_1}{dx}\right)\right\|_{L^1} < +\infty$.

2. a) *En el literal b) de la pregunta* 1. *se obtuvo que*

$$(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}},$$

y por lo tanto, se tiene

$$\sup_{t>0}|(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)| = \sup_{t>0}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right\}.$$

Suponiendo que $|x| > \sqrt{2}$ *y procediendo de manera análoga a la del literal d) de la pregunta anterior, calculemos la derivada respecto a* t *de* $(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)$ *con la finalidad de buscar puntos críticos. Así,*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(-\frac{1}{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} + \frac{|x|^2}{4(t+1)^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right) \\ &= (|x|^2 - 2(t+1))\frac{1}{8\sqrt{\pi}(t+1)^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Igualando la anterior expresión a 0, obtenemos

$$\begin{aligned}|x|^2 - 2(t+1) &= 0\\ t+1 &= \frac{|x|^2}{2}\\ t &= \frac{|x|^2}{2} - 1,\end{aligned}$$

lo cual tiene sentido pues $|x| > \sqrt{2}$. Nuevamente se puede apreciar que el signo de la derivada en (13) es dado por el factor $|x|^2 - 2(t+1)$, de modo que si analizamos como en el literal d) de la pregunta anterior se obtiene que, si $t < \frac{|x|^2}{2} - 1$, entonces (13) es positiva, y si $t > \frac{|x|^2}{2} - 1$, entonces (13) es negativa. Esto muestra que en $t = \frac{|x|^2}{2} - 1$ existe un máximo y por tanto

$$\sup_{t>0}\left|\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{4\pi\frac{|x|^2}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\frac{|x|^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{|x|},$$

siempre que $|x| > \sqrt{2}$.

b*) Suponiendo que $|x| \leq \sqrt{2}$, y puesto que $t+1 > 1$, se tiene que*

$$|x|^2 - 2(t+1) < 0.$$

Ya que este factor determina el signo de (13), entonces esta derivada es negativa para todo valor de t y por tanto $(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)$ es una función decreciente respecto a t. De esto, concluimos que el supremo se alcanza cuando t tiende a 0, de donde obtenemos la siguiente igualdad

$$\sup_{t>0}|(\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_1)(x)| = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

cuando $|x| \leq \sqrt{2}$.

c*) Gracias a la expresión obtenida en el literal a) de esta pregunta, se puede calcular directamente la integral*

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{|x|}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\,Ln(x)|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = +\infty.$$

d*) Por último, gracias a que $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1) \geq 0$, tenemos la siguiente desigualdad*

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)(x)dx = \|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)\|_{L^1},$$

que junto al resultado del literal anterior, se concluye que $\|\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)\|_{L^1} = +\infty$.

■

Ejercicio 1.10.

1. *Mostremos que tanto ν^+ como ν^- son medidas de Radón. Puesto que los argumentos son idénticos para ambas medidas, haremos el desarrollo con las dos medidas simultaneamente.*

   Primero, consideremos $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, cualquiera. Así, $K \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto

   $$\nu^{\pm}(K) = \int_K f^{\pm}(x)dx.$$

   Puesto que f es localmente integrable, entonces $f^{\pm}$ también lo son y en consecuencia, la anterior integral es finita. Es decir, $\nu^{\pm}(K) < +\infty$ para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

   Ahora, consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ cualquiera. Por definición de $\nu^{\pm}(A)$ se tiene que

   $$\nu^{\pm}(A) \leq \nu^{\pm}(B),$$

para todo $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ tal que $A \subset B$. En particular, se cumple para todo B abierto tal que $A \subset B$. Así, $\nu^{\pm}(A)$ es una cota inferior de estos valores, lo que implica que

$$\nu^{\pm}(A) \leq \text{ínf}\{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \textit{ es abierto}\}. \tag{14}$$

Por otro lado, puesto que los conjuntos abiertos son conjuntos borelianos, se tiene la siguiente inclusión

$$\{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \textit{ es abierto}\} \subset \{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)\},$$

de donde se deduce

$$\text{ínf}\{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \textit{ es abierto}\} \leq \nu^{\pm}(A). \tag{15}$$

De (14) *y* (15) *se concluye que $\nu^{\pm}(A) = \text{ínf}\{\nu^{\pm}(B) : A \subset B, B \textit{ es abierto}\}$.*

Por último, tomemos $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, cualquiera. De esto sabemos que existe una familia numerable creciente de conjuntos compactos que denotaremos por $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ y de modo que

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Por un lado, como para todo compacto $K \subset U$ se tiene que

$$\nu^{\pm}(K) \leq \nu^{\pm}(U),$$

entonces se tiene la desigualdad

$$\sup\{\nu^{\pm}(K) : K \subset U, K \textit{ compacto}\} \leq \nu^{\pm}(U). \tag{16}$$

Por otro lado, gracias a que $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles, se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \nu^{\pm}(K_n) = \nu^{\pm}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) = \nu^{\pm}(U),$$

que a su vez, como $\{\nu^{\pm}(K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, entonces se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \nu^{\pm}(K_n) = \sup\{\nu^{\pm}(K_n) : in\mathbb{N}\}.$$

De estas últimas relaciones y de la siguiente inclusión

$$\{\nu^{\pm}(K_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{\nu^{\pm}(K) : K \subset U, K \textit{ compacto}\},$$

se puede concluir que

$$\nu^{\pm}(U) \leq \sup\{\nu^{\pm}(K) : K \subset U, K \textit{ compacto}\}. \tag{17}$$

De (16) *y* (17) *se obtiene que $\nu^{\pm}(U) = \sup\{\nu^{\pm}(K) : K \subset U, K \textit{ compacto}\}$. Con lo cual se prueba que $\nu^{\pm}$ son medidas de Radón.*

2. *Mostrar que $\nu^{\pm}$ son absolutamente continuas respecto a dx es directo pues debemos considerar un conjunto $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ de medida nula. Esto es $|A| = 0$, y por lo tanto la integral sobre A es 0 pues la integral de Lebesgue sobre un conjunto de medida nula es siempre 0, es decir*

$$\nu^{\pm}(A) = \int_A f^{\pm}(x)dx = 0,$$

que por definición significa que $\nu^{\pm}$ sean absolutamente continuas respecto a dx.

3. *Puesto que $\nu^{\pm}$ son medidas de Radón y absolutamente continuas respecto a dx, podemos aplicar el Teorema fundamental del cálculo para medidas de Radón de modo que*

$$\nu^{\pm}(A) = \int_A D_{dx}(\nu^{\pm})(x)dx \qquad \forall A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),$$

donde $D_{dx}(\nu^{\pm})$ es la derivada de Radón-Nikodym de $\nu^{\pm}$. Por otro lado, puesto que para todo conjunto boreliano A, $\nu^{\pm}$ se definió como

$$\nu^{\pm}(A) = \int_A f^{\pm}(x)dx,$$

se concluye la igualdad buscada

$$\nu^{\pm}(A) = \int_A D_{dx}(\nu^{\pm})(x)dx = \nu^{\pm}(A) = \int_A f^{\pm}(x)dx.$$

Dado que la derivada de Radón-Nikodym es única casi todo punto, entonces $D_{dx}(\nu^{\pm}) = f^{\pm}$ casi todo punto en $\mathbb{R}^n$.

4. *Gracias a que $f = f^+ - f^-$ podemos escribir para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(x)dx = \frac{1}{|B(x,r)|}\left(\int_{B(x,r)} f^+(x)dx - \int_{B(x,r)} f^-(x)dx\right) = \frac{1}{|B(x,r)|}\left(\nu^+(B(x,r)) - \nu^-(B(x,r))\right),$$

pues toda bola es un conjunto boreliano. Tomando $r \longrightarrow 0$ en la anterior igualdad obtenemos

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(x)dx = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\left(\nu^+(B(x,r)) - \nu^-(B(x,r))\right). \tag{18}$$

5. *De (18) y la definición de la derivada de Radón-Nikodym se obtiene que*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(x)dx = \lim_{r\to 0}\frac{\nu^+(B(x,r))}{|B(x,r)|} - \lim_{r\to 0}\frac{\nu^-(B(x,r))}{|B(x,r)|} = D_{dx}(\nu^+)(x) - D_{dx}(\nu^-)(x).$$

Por el numeral 3. podemos reemplazar $D_{dx}(\nu^{\pm})$ por $f^{\pm}$ en casi todo punto, obteniendo

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(x)dx = f^+(x) - f^-(x) = f(x),$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Esto es el Teorema de diferenciación de Lebesgue, como se quería demostrar.

■

Ejercicio 1.11. *Puesto que f es una función boreliana, basta fijar un conjunto abierto y acotado $]a,b[$ y mostrar que se tiene el resultado para casi todo $x \in]a,b[$.*

1. *Sea $r \in \mathbb{Q}$, cualquiera y notemos que μ_r definido como*

$$\mu_r(A) = \int_A |f(y) - r|\mathbb{1}_{]a,b[}dy$$

para cada $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$, es una medida finita. En efecto, como $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces es localmente integrable y por tanto $|f - r|$ es también una función localmente integrable. En consecuencia, para cualquier $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mu_r(A) = \int_{A\cap]a,b[} |f(y) - r|dy \leq \int_{[a,b]} |f(y) - r|dy < +\infty.$$

Puesto que μ_r se define sobre los borelianos,entonces esta es una medida de Radón finita y por tanto, del Teorema de Existencia de Derivadas de medidas (Ver [1, Teorema 2.3.4]), $D_{dx}(\mu_r)$ existe casi todo punto. Así, existe un conjunto N_r de medida nula tal que

$$D_{dx}(\mu_r) = \lim_{d\to 0}\frac{\mu_r(\overline{B}(x,d))}{|\overline{B}(x,d)|} \qquad \forall x \in]a,b[\setminus N_r.$$

2. *Definamos el conjunto $N = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r$, el cual también es de medida nula pues es la unión numerable de conjuntos de medida nula, y tomemos $x \in]a,b[\setminus N$, I un subintervalo cerrado de $]a,b[$ tal qe $x \in I$ y $r \in \mathbb{Q}$. De este modo tenemos que*

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y) - f(x)|dy \leq \frac{1}{|I|}\int_I |f(y) - r|dy + \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - r|dy = \frac{\mu_r(I)}{|I|} + |f(x) - r|.$$

Tomando el límite superior cuando la longitud de I tiende a 0 en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\limsup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dy \leq \limsup_{I \ni x} \frac{\mu_r(I)}{|I|} + |f(x) - r| = |f(x) - r| + |f(x) - r| = 2|f(x) - r|.$$

De la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, siempre podemos tomar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|f(x) - r|$ sea tan pequeño como querramos y por tanto

$$\limsup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

3. *Puesto que*

$$0 \leq \lim_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dy \leq \limsup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dy = 0,$$

se concluye que

$$\lim_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Razonando como en el numeral 3. *del Ejercicio* 1.5 *se deduce el resultado.*

■

Referencias

[1] D Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 2.* Colección de Matemáticas Universitarias, N°2. Amarun, 2017.