Lección n°4: Introducción a los pesos A_p. EPN 2021

1. Solucionario

Ejercicio 1.1. *Puesto que $\omega \in A_1$, entonces existe una constante C tal que*

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dy\right)\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)} = [\omega]_{A_1} = C < +\infty.$$

De este modo, para toda bola B, tenemos la estimación

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dy\right)\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)} \leq C,$$

que por definición de $\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)}$, se tiene que $\omega(x)^{-1} \leq \|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)}$ para casi todo $x \in B$. Con esto podemos minorar la anterior desigualdad, obteniendo

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dy\right)\omega(x)^{-1} \leq C,$$

y como ω es positivo (puesto que es un peso), se obtiene que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(y)dy\right) \leq C\omega(x),$$

para toda bola B y en casi todo punto $x \in B$. Así, tomando el supremo sobre las bolas que contengan a x y recordando que $\mathcal{M}(\omega)(x) \leq \mathscr{M}(\omega)(x)$ se concluye que

$$\mathcal{M}(\omega)(x) \leq \mathscr{M}(\omega)(x) \leq C\omega(x).$$

■

Ejercicio 1.2.

1. *Consideremos una bola $B(x_0, r)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ arbitrarios. Tomando el cambio de variable $y = \lambda x$ obtenemos la igualdad*

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \omega(\lambda x)dx\right)\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \omega(\lambda x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{\lambda^{-n}}{|B(x_0,r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} \omega(y)dy\right)\left(\frac{\lambda^{-n}}{|B(x_0,r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} \omega(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Recordando que $|B(\lambda x_0, \lambda r)| = \lambda^n |B(\lambda x_0, r)| = \lambda^n |B(x_0, r)|$ y reemplazando en la expresión anterior obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \omega(\lambda x)dx\right)\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \omega(\lambda x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{1}{|B(\lambda x_0,\lambda r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} \omega(y)dy\right)\left(\frac{1}{|B(\lambda x_0,\lambda r)|}\int_{B(\lambda x_0,\lambda r)} \omega(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Puesto que $B(x_0, r)$ y $B(\lambda x_0, \lambda r)$ son bolas arbitrarias, tomando el supremo sobre todas las bolas se obtiene la igualdad $[\delta_\lambda(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$.

2. Procediendo de manera análoga a la anterior, tomando el cambio de variable $z = x + y$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\omega(x+y)dx\right)\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\omega(x+y)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0+y,r)}\omega(z)dz\right)\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0+y,r)}\omega(z)^{-\frac{1}{p-1}}dz\right)^{p-1}.$$

Del mismo modo, reemplazando el hecho de que $|B(x_0,r)| = |B(x_0+y,r)|$ en la expersión anterior obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\omega(x+y)dx\right)\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\omega(x+y)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac{1}{|B(x_0+y,r)|}\int_{B(x_0+y,r)}\omega(z)dz\right)\left(\frac{1}{|B(x_0+y,r)|}\int_{B(x_0+y,r)}\omega(z)^{-\frac{1}{p-1}}dz\right)^{p-1},$$

de manera que tomando el supremo sobre las bolas se concluye finalmente que $[\tau_y(\omega)]_{A_p} = [\omega]_{A_p}$.

3. Por último aplicando directamente la definición de constante característica para el peso $\lambda\omega$ obtenemos

$$\begin{aligned}[\lambda\omega]_{A_p} &= \sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\lambda\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\lambda^{-\frac{1}{p-1}}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\ &= \sup_B\lambda\lambda^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\ &= \sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} = [\omega]_{A_p}.\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.3. *Sea $\omega \in A_1$. Notemos que para cualquier bola B, se tiene la desigualdad*

$$\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx \le \frac{1}{|B|}\left\|\omega^{-\frac{1}{p-1}}\right\|_{L^\infty(B)}\int_B dx = \left\|(\omega^{-1})^{\frac{1}{p-1}}\right\|_{L^\infty(B)} = \|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

con la cual se puede deducir que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \le \left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)\|w^{-1}\|_{L^\infty(B)}.$$

tomando el supremo sobre todas las bolas en la desigualdad anterior, y recordando la definición de la constante característica de A_p y A_1, obtenemos

$$[\omega]_{A_p} \le [\omega]_{A_1}.$$

Como $\omega \in A_1$, entonces $[\omega]_{A_p} < +\infty$ y por tanto $\omega \in A_p$. ■

Ejercicio 1.4. *Puesto que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, entonces $p' = \frac{p}{p-1}$ y por tanto $p'-1 = \frac{1}{p-1}$. Esto nos permite escribir lo siguiente:*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left(\omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)\right)^{-\frac{1}{p'-1}}dx\right)^{p'-1}$$
$$=\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

para toda bola B. Tomando el supremo sobre las bolas en la igualdad anterior muestra que $[\omega^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{p'}} = [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$. ■

Ejercicio 1.5.

1. *Primero notemos que para cualquier bola B se puede escribir*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx\right)^p = \frac{1}{|B|^p}\left(\int_B f(x)\omega(x)^{\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{p}}dx\right)^p. \tag{1}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder al lado derecho de la igualdad anterior nos entrega

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|^p}\left(\int_B f(x)\omega(x)^{\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{p}}dx\right)^p &\leq \frac{1}{|B|^p}\left[\left(\int_B (f(x)\omega(x)^{\frac{1}{p}})^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{p}{p(p-1)}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]^p \\ &\leq \frac{1}{|B|^p}\left(\int_B f(x)^p\omega(x)dx\right)\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \\ &\leq \frac{1}{|B|}\left(\int_B f(x)^p\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

De esta mayoración y de la identidad (1) *concluimos que*

$$\frac{1}{|B|^p}\left(\int_B f(x)dx\right)^p \leq \frac{1}{|B|}\left(\int_B f(x)^p\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

2. *Si multiplicamos y dividimos en la parte derecha de la desigualdad anterior por $\omega(B) = \displaystyle\int_B \omega(x)dx$ obtenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|^p}\left(\int_B f(x)dx\right)^p &\leq \frac{1}{\omega(B)}\left(\int_B f^p(x)\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \\ &\leq \frac{[\omega]_{A_p}}{\omega(B)}\int_B f^p(x)\omega(x)dx,\end{aligned}$$

en donde, en la última estimación hemos utilizado la definición de constante característica $[\omega]_{A_p}$. Recordando la definición de promedio de una función f sobre una bola B, reescribimos esta desigualdad como

$$\underset{B}{prom}(f)^p \leq \frac{[\omega]_{A_p}}{\omega(B)}\int_B f^p(x)\omega(x)dx,$$

lo que se quería demostrar.

$\blacksquare$

Ejercicio 1.6.

1. *Del Ejercicio 1.3 se tiene directamente que* $\lim\limits_{p\to 1}[\omega]_{A_p} \leq [\omega]_{A_1}$.

2. *Sabemos que para cualquier bola B*

$$\lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} = \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{|B|^{\frac{1}{q}}}\left(\int_B \omega(x)^{-q}dx\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{|B|^{\frac{1}{q}}}\|\omega^{-1}\|_{L^q(B)} = \|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)}.$$

De este modo, tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq \lim_{p\to 1}[\omega]_{A_p}.$$

Puesto que esto se cumple para cualquier bola B, se concluye que

$$[\omega]_{A_1} \leq \lim_{p\to 1}[\omega]_{A_p}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 1.7.

1. *Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos la estimación*

$$\int_B \omega(x)^{\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{p}}dx \leq \left(\int_B \omega(x)^{\frac{p}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{p}{p(p-1)}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\leq \left[\left(\int_B \omega(x)dx\right)\left(\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Recordando la definicón de $[\omega]_{A_p}$ *podemos mayorar la parte derecha de esta desigualdad obteniendo así el resultado*

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{p}}dx \leq [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p}},$$

2. *Puesto que*

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{p}}dx = \frac{1}{|B|}\int_B dx = 1, \tag{2}$$

podemos reemplazarlo en el resultado del primer punto para obtener la desigualdad $1 \leq [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p}}$. *Elevando esta expresión a la potencia p obtenemos el resultado.*

3. *Supongamos ahora que* $\omega(x) = C$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *donde* C *una constante positiva. En este caso tenemos que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} = \left(\frac{C}{|B|}\int_B dx\right)\left(\frac{C^{-\frac{1}{p-1}}}{|B|}\int_B dx\right)^{p-1} = CC^{-1} = 1,$$

para cuaquier bola B. *Tomando el supremos sobre todas las bolas obtenemos el resultado* $[\omega]_{A_p} = 1$.

■

Ejercicio 1.8.

1. *Queremos demostrar que se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1+|x|)^\sigma dx \leq C\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx, \tag{3}$$

para toda bola de la forma $B(x_0, r)$ *y donde* C *es una constante independiente de la bola. A lo largo del desarrollo de este ejercicio, por motivos de simplicidad, denotaremos por* C *a las constantes que no dependan de* r *y* x_0.

   a) *Encontremos los valores para los cuales la medida* $(1+|x|)^\sigma dx$ *es sigma finita. Para esto, basta mostrar que la cantidad* $\int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx$ *es finita para cualquier valor de* $r > 0$. *En efecto, aplicando un cambio de variable a coordenadas esféricas tenemos la acotación*

$$\int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx = C\int_0^r (1+\rho)^\sigma \rho^{n-1}d\rho \leq C\int_0^r (1+\rho)^{\sigma+n-1}d\rho,$$

   donde $\int_0^r (1+\rho)^{\sigma+n-1}d\rho < +\infty$, *cuando* $\sigma + n > 0$. *Es decir, necesitamos que* $\sigma > -n$.

   b) *Supongamos que* $B(x_0, r)$ *es una bola de tipo I. Notemos que si* $x \in B(x_0, 2r)$ *se tiene la estimación* $1 + |x| \leq 1 + |x_0| + |x - x_0| \leq 1 + |x_0| + 2r$ *y por lo tanto, cuando* $\sigma \geq 0$ *se tiene*

$$(1+|x|)^\sigma \leq (1+|x_0|+2r)^\sigma.$$

   Esta desigualdad nos permite obtener la siguiente mayoración:

$$\int_{B(x_0,2r)} (1+|x|)^\sigma dx \leq (1+|x_0|+2r)^\sigma |B(x_0,2r)| = 2^n r^n v_n (1+|x_0|+2r)^\sigma, \tag{4}$$

donde $v_n = |B(0,1)|$. *Del mismo modo, se puede deducir que* $1 + |x_0| \leq 1 + |x| + 2r$ *y por lo tanto, cuando* $-n < \sigma < 0$, *se tiene que*

$$(1 + |x|)^\sigma \leq (1 + |x_0| - 2r)^\sigma,$$

con lo cual podemos escribir

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq 2^n r^n v_n (1 + |x_0| - 2r)^\sigma. \tag{5}$$

Resumiendo, de (4) *y* (5) *podemos escribir la siguiente mayoración:*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq 2^n r^n v_n \begin{cases} (1 + |x_0| + 2r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ (1 + |x_0| - 2r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases} \tag{6}$$

c*)* *Si* $x \in B(x_0, r)$, *manipulando las desigualdades como en el literal anterior podemos obtener similarmente que*

$$1 + |x| \leq 1 + |x_0| + r \quad y \quad 1 + |x| \geq 1 + |x_0| - r,$$

por lo tanto, cuando $-n < \sigma < 0$ *se tiene que* $(1 + |x|)^\sigma \geq (1 + |x_0| + r)^\sigma$, *y cuando* $\sigma \geq 0$ *se tiene que* $(1 + |x|)^\sigma \geq (1 + |x_0| - r)^\sigma$. *Es decir, tenemos la minoración:*

$$\int_{B(x_0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx \geq r^n v_n \begin{cases} (1 + |x_0| - r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ (1 + |x_0| + r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases} \tag{7}$$

d*)* *Suponiendo que* $B(x_0, r)$ *es de tipo* I, *tenemos por definición que* $|x_0| \geq 3r$ *y por lo tanto*

$$1 + |x_0| + 2r \leq 4\,(1 + |x_0| - r) \quad y \quad 1 + |x_0| - 2r \geq \frac{1}{4}(1 + |x_0| + r).$$

Usando estas desigualdades junto con (6) *y* (7) *podemos escribir lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx &\leq 2^n r^n v_n \begin{cases} (1 + |x_0| + 2r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ (1 + |x_0| - 2r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases} \\ &\leq 2^n r^n v_n \begin{cases} 4^{|\sigma|}(1 + |x_0| - r)^\sigma & \sigma \geq 0 \\ 4^{|\sigma|}(1 + |x_0| + r)^\sigma & \sigma < 0. \end{cases} \\ &\leq 2^n 4^{|\sigma|} \int_{B(x_0,r)} (1 + |x|)^\sigma dx. \end{aligned}$$

Es decir, se tiene (3) *para las bolas de tipo* I.

e*)* *Consideremos* $B(x_0, r)$ *una bola de tipo* II. *En este caso se tiene que* $B(x_0, 2r) \subset B(0, 5r)$ *y por lo tanto tenemos la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq \int_{B(0,5r)} (1 + |x|)^\sigma dx = C \int_0^{5r} (1 + \rho)^\sigma \rho^{n-1} d\rho. \tag{8}$$

Puesto que tenemos la desigualdad $(1 + \rho)^\sigma \leq C(1 + \rho^\sigma)$ *podemos obtener la siguiente estimación*

$$\int_0^{5r} (1 + \rho)^\sigma \rho^{n-1} d\rho \leq C \int_0^{5r} (1 + \rho^\sigma) \rho^{n-1} d\rho \leq C(r^n + r^{\sigma+n}).$$

Ahora, dependiendo de los valores de σ *y* r *en la anterior desigualdad, podemos mayorar la integral en* (8) *obteniendo la siguiente estimación:*

$$\int_{B(x_0,2r)} (1 + |x|)^\sigma dx \leq C \begin{cases} r^n & si\ \sigma \geq 0\ y\ 0 < r \leq 1, \\ r^{\sigma+n} & si\ \sigma \geq 0\ y\ r > 1, \\ r^{\sigma+n} & si\ \sigma < 0\ y\ 0 < r \leq 1, \\ r^n & si\ \sigma < 0\ y\ r > 1. \end{cases} \tag{9}$$

f*) Si $\sigma \geq 0$ entonces $(1+|x|)^\sigma$ es radialmente creciente y por tanto se tiene la desigualdad*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq \int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx. \tag{10}$$

Puesto que se tiene la desigualdad $(1+\rho)^\sigma > 1$, entonces podemos escribirla estimación

$$\int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx = C\int_0^r (1+\rho)^\sigma \rho^{n-1} d\rho \geq C\int_0^r \rho^{n-1} d\rho = Cr^n,$$

y como $(1+\rho)^\sigma > \rho^\sigma$, tenemos también la estimación

$$\int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx = C\int_0^r (1+\rho)^\sigma \rho^{n-1} d\rho \geq C\int_0^r \rho^{\sigma+n-1} d\rho = Cr^{\sigma+n},$$

lo que implica directamente que

$$\int_{B(0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq C \max\{r^n, r^{\sigma+n}\}.$$

Así, mayorando (9) con la desigualdad anterior, se deduce la desigualdad (3) para $\sigma \geq 0$ y para todo $r > 0$.

g*) Si $-n < \sigma < 0$ entonces $(1+|x|)^\sigma$ es radialmente decreciente y por lo tanto se tiene que*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq \int_{B\left(3r\frac{x_0}{|x_0|},r\right)} (1+|x|)^\sigma dx,$$

y puesto que sobre la bola $B\left(3r\frac{x_0}{|x_0|},r\right)$ se tiene la estimación $1+|x| \leq 4(r+1)$, obtenemos a su vez la desigualdad $4^\sigma(1+r)^\sigma < (1+|x|)^\sigma$ pues $-n < \sigma < 0$. Así, tenemos que

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq C(1+r)^\sigma r^n. \tag{11}$$

h*) Si $0 < r \leq 1$ entonces $2^\sigma \leq (1+r)^\sigma \leq 1$. Esto nos permite minorar (11) de la siguiente manera*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq Cr^n. \tag{12}$$

Usando esta desigualdad para mayorar la expresión dada en (9) se deduce la desigualdad (3) para $0 < r \leq 1$ y $-n < \sigma < 0$.

i*) Si $r > 1$ tenemos que existe una constante C tal que $(1+r)^\sigma > Cr^\sigma$ y por tanto en (11) tenemos en realidad que*

$$\int_{B(x_0,r)} (1+|x|)^\sigma dx \geq Cr^{\sigma+n}. \tag{13}$$

Además, como en este caso se tiene que $(1+\rho)^\sigma < \rho^\sigma$ tenemos en realidad una cota más pequeña para (9) dada por

$$\int_{B(x_0,2r)} (1+|x|)^\sigma dx \leq C\int_0^{5r} \rho^{\sigma+n-1} = Cr^{\sigma+n}.$$

Usando esta desigualdad junto con (13) se deduce finalmente (3) para $r > 1$ y $-n < \sigma < 0$.

2. Por definición de las clases A_p, debemos verificar que se tiene

$$[(1+|x|)^\sigma]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B (1+|x|)^\sigma dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (1+|x|)^{-\frac{\sigma}{p-1}} dx\right)^{p-1} < +\infty. \tag{14}$$

Primero notemos que las integrales dentro del supremo en (14) son finitas siempre y cuando se tiene $\sigma > -n$ y $-\frac{\sigma}{p-1} + n > 0$. Es decir, tenemos que $-n < \sigma < n(p-1)$. Además son finitas para toda bola $B(x_0, r)$ y la constante característica $[(1+|x|)^\sigma]_{A_p}$ se comporta como

$$\left(\frac{1}{v_n r^n} v_n r^n (1+|x_0|)^\sigma\right)\left(\frac{1}{v_n r^n} v_n r^n (1+|x_0|)^{-\frac{\sigma}{p-1}}\right)^{p-1} = (1+|x_0|)^\sigma \left((1+|x_0|)^{-\frac{\sigma}{p-1}}\right)^{p-1} = 1,$$

donde $v_n = |B(0,1)|$. Así, hemos mostrado que (14) se cumple y por lo tanto $(1+|x|)^\sigma$ es un peso de tipo A_p cuando $-n < \sigma < n(p-1)$.

■

Ejercicio 1.9. *Primero mostremos que $\varphi\omega$ es un peso. Puesto que φ y ω son positivos, entonces $\varphi\omega$ es también positivo. Además, puesto que se tienen las desigualdades*

$$\int_K \varphi(x)\omega(x)dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_K \omega(x)dx \quad y \quad \int_K \varphi(x)^{-1}\omega(x)^{-1}dx \leq \|\varphi^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_K \omega(x)^{-1}dx,$$

para cualquier conjunto compacto K, entonces $\varphi\omega$ y $(\varphi\omega)^{-1} = \varphi^{-1}\omega^{-1}$ son localmente integrables ya que ω y ω^{-1} son localmente integrables. Esto muestra que en efecto, $\varphi\omega$ es un peso. Ahora mostremos que $\varphi\omega$ pertenece a A_p, lo que se obtiene gracias a la siguiente mayoración:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B \varphi(x)\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \\
&\leq \left(\frac{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{\|\varphi^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p-1}}}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}[\omega]_{A_p},
\end{aligned}$$

para cualquier bola B. Esta desigualdad implica que $[\varphi\omega]_{A_p} \leq C[\omega]_{A_p} < +\infty$ ya que $\omega \in A_p$, y donde la consante es $C = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, lo que muestra que $\varphi\omega$ pertenece a la clase A_p. ■