



Índice

1. Introducción	1
2. Espacios de Lebesgue	1
2.1. Dos teoremas clásicos en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$	2
2.2. Desigualdad de Hölder	2
2.3. Desigualdad de Interpolación	2
2.4. Convolución y desigualdad de Young	2
2.5. Convergencia	2
2.6. El espacio de la funciones de test	3

1. Introducción

En esta lección haremos un corto resumen de las herramientas de base que utilizaremos a lo largo de las lecciones posteriores: los espacios de Lebesgue.

Algunas notaciones

En todo este curso introductorio a la transformación de Fourier trabajaremos sobre el espacio \mathbb{R}^d , donde el entero positivo d es su dimensión y donde:

- para dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ denota el producto escalar usual y $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ denota la norma euclidiana.
- Consideraremos siempre a \mathbb{R}^d como un espacio medido: $(\mathbb{R}^d, \text{Bor}(\mathbb{R}^d), dx)$, donde $\text{Bor}(\mathbb{R}^d)$ es la sigma-álgebra boreliana y dx es la medida de Lebesgue.

2. Espacios de Lebesgue

Definición 1 (*Espacio de Lebesgue*) Sea $p \in [1, +\infty]$. El espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ se define como

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_{L^p} < +\infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

- Para $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ son espacios de Banach con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$.
- Para $1 < p < +\infty$ son espacios reflexivos y se tiene $(L^p(\mathbb{R}^d))' = L^q(\mathbb{R}^d)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A continuación enunciamos los resultados que utilizaremos constantemente en las lecciones posteriores.

2.1. Dos teoremas clásicos en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$

Teorema 1 (Convergencia dominada) Sea $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una familia de funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si:

1) para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y

2) existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene $|f_\varepsilon(x)| \leq g(x)$,

entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$.

Teorema 2 (Teorema de Fubini) Sea $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Si:

1) la función $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dy$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^d)$ y

2) la función $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^d)$,

entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ y se tiene $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dy \right) dx$.

2.2. Desigualdad de Hölder

Teorema 3 Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ y sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ y se tiene $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

2.3. Desigualdad de Interpolación

Teorema 4 Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ y $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, para todo $1 \leq p \leq +\infty$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$, donde $\theta \in [0, 1]$, se tiene $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}$.

2.4. Convolución y desigualdad de Young

Definición 2 (Convolución) Sean $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones medibles. El producto de convolución entre f y g , notado por la función $f * g$, se define de la siguiente manera: para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy.$$

Teorema 5 (Desigualdad de Young) Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Si $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ y se tiene $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

2.5. Convergencia

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$ (donde $1 \leq p \leq +\infty$) y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Recordemos que $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

Teorema 6 Si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^d)$ entonces:

- 1) Existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$.
- 2) Además, existe una función $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$.

En el punto 1) de este teorema vemos si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la función f en $L^p(\mathbb{R}^d)$ entonces, casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$ la subsucesión $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, pero, por abuso de notación, escribiremos $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

2.6. El espacio de la funciones de test

Introducimos rápidamente el espacio de las funciones de test el cual nos será de gran utilidad. Para empezar, conviene fijar algunas notaciones y definiciones.

(A) **Multi-índices.** Un multi-índice es un vector $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ cuyas componentes son números naturales. Notaremos por $[a] = a_1 + \dots + a_d \geq 0$ su tamaño.

- Para un multi-índice $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ y una función φ suficientemente regular, la expresión $\partial^a \varphi$ denota la derivada $\partial_1^{a_1} \dots \partial_d^{a_d} \varphi$ y $[a]$ nos indica el orden total de derivación de $\partial^a \varphi$.
- Por otro lado, para un multi-índice $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ y $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definimos la cantidad $x^a = x_1^{a_1} \times \dots \times x_d^{a_d} \in \mathbb{R}$.

(B) **Funciones de clase C^∞ .** Decimos que la función $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^∞ si es continua y para todo multi-índice a , la función $\partial^a \varphi$ existe y es continua.

Vemos entonces que la función φ es de clase C^∞ si es infinitamente derivable y todas sus derivadas parciales son funciones continuas.

(C) **Soporte de una función.** Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos su soporte, notado por $\text{sop}(\varphi)$, como $\text{sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}}$, donde la línea en encima de este conjunto denota su clausura en \mathbb{R}^d .

Vemos de esta manera que $\text{sop}(\varphi)$ es el más pequeño conjunto cerrado de \mathbb{R}^d donde $\varphi \neq 0$ y además, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ que no pertenece a $\text{sop}(\varphi)$ se tiene $\varphi(x) = 0$.

Definición 3 (Funciones de test) Una función $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ se dice función de test si φ es de clase C^∞ y además $\text{sop}(\varphi)$ es compacto en \mathbb{R}^d . Notaremos por $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las funciones de test.

Un ejemplo clásico de una función de test es el siguiente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Enunciamos ahora las principales propiedades de las funciones de test que utilizaremos después.

Teorema 7 (Funciones de test y espacios de Lebesgue)

- 1) Para $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.
- 2) Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y para todo multi-índice $a \in \mathbb{N}^n$ se tiene $\partial^a \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p \leq +\infty$).
- 3) Para $1 \leq p < +\infty$, el espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$: para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi_n \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$.