<u>Lección n°3</u>: **La Transformación de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$.**

USFQ, septiembre 2017

Índice

1. Introducción

En la Lección n°2 de este curso definimos y estudiamos algunas de las principales propiedades de la transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pues este espacio funcional nos provee un marco de trabajo cómodo y a la vez bastante general para estudiar la función $\mathcal{F}(f)$. Sin embargo, en la practica, es muy útil disponer de una noción de transformación de Fourier en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^d)$. En efecto, la noción de la transformación de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ es la pieza clave para la definción de otros espacios funcionales: los espacios de Sobolev, que son de gran utilidad en el análisis armónico y en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

De esta manera, el objetivo de esta lección es básicamente dar una construcción clara y ordenada de la transformación de Fourier en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^d)$. Además demostrar una de las más útiles propiedades de la transformación de Fourier en este espacio: la identidad de Plancherel.

2. Construcción de la Transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

El objetivo es definir la transformación de Fourier para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y para ello parecería natural considerar la expresión dada en la Definición 1 de la Lección n°2:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1}$$

Sin embargo, tenemos el siguiente problema: para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la cantidad $\mathcal{F}(f)(\xi)$ dada en (1) *no siempre está bien definida!*

Ejemplo 1 *Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y la función $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$. Se tiene entonces que $f \in L^2(\mathbb{R})$ pero la integral $\mathcal{F}(f)(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+|x|}dx$ diverge para todo $\xi \in \mathbb{R}$.*

En efecto, mostremos para empezar que la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ pertenece al espacio $L^2(\mathbb{R})$. Para ello, una astucia clásica consiste en partir la integral aquí abajo de la siguiente manera: para $R > 0$ escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+|x|)^2}dx = \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{(1+|x|)^2}dx + \int_{|x|>R} \frac{dx}{(1+|x|)^2}dx,$$

y se quiere mostrar que cada integral a la derecha es convergente. Vemos sin problema que la primera integral converge pues estamos integrando una función acotada sobre un conjunto acotado por lo basta estudiar la segunda integral. Para ello basta notar que se tiene $|x|+1>|x|$ de donde $(|x|+1)^2>|x|^2$ y entonces podemos escribir

$$\frac{1}{(1+|x|)^2} \leq \frac{1}{|x|^2}.$$

De esta manera, la segunda integral es controlada por una integral convergente:

$$\int_{|x|>R} \frac{dx}{(1+|x|)^2} \leq \int_{|x|>R} \frac{dx}{|x|^2} < +\infty.$$

Mostremos ahora que $\mathcal{F}(f)(\xi)$ diverge. Usando (1) escribimos

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{(1+|x|)} dx - i \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{(1+|x|)} dx,$$

donde veremos que las dos integrales aquí arriba no son convergentes. En efecto, estudiemos la primera integral (la segunda integral sigue el mismo razonamiento). Sabemos que la función $\cos(2\pi x\xi)$ es una función periódica, acotada y que oscila entre -1 y 1 por lo que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\dfrac{-1}{1+|x|} \leq \dfrac{\cos(2\pi x\xi)}{1+|x|} \leq \dfrac{1}{1+|x|}$ y entonces podemos escribir

$$-\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{1+|x|} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|} dx.$$

Vemos entones que la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{1+|x|} dx$ se comporta como la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|}$ la cual es divergente. Para convencerse de ello basta cortar esta integral en dos partes:

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{1+|x|} + \int_{|x|>1} \frac{dx}{1+|x|},$$

y observar que la segunda parte no es convergente.

Vemos entonces que, de manera general, para una funcón $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ no puede ser definida directamente por (1). Sin embargo, existe una manera natural de extender la transformación de Fourier $\mathcal{F}$ definida sobre el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ al espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$:

- Consideremos el espacio de las funciones de test $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Como se tiene $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces por la Proposición 1 de la Lección n°2 sabemos que $\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$ y entonces la función $\mathcal{F}(\varphi)$ definida por (1) está bien definida para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

- Sabemos además que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y en la Proposición 1 más adelante mostraremos que para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene:

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2},$$

  es decir, se tiene que $\mathcal{F}$ envía funciones de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $L^2(\mathbb{R}^d)$ y además es una isometría.

- Luego, como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces en el Teorema 1 extendemos la isometría $\mathcal{F} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ a la aplicación $\mathcal{F}' : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ que satisface, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

  y la cual definiremos como la transformación de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 1 *(Identidad de Plancherel para las funciones de test) Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.*

Prueba. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, se tiene entonces

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi)}(\xi)\, d\xi.$$

Por otro lado, para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ en la Proposición 1 de la Lección 4 mostraremos que $\mathcal{F}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ de donde tenemos que $\phi = \overline{\mathcal{F}(\varphi)} \in L^1$. Entonces, por la Proposición 10 de la Lección 2 podemos escribir:

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi)}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathcal{F}(\phi)(x)dx.$$

Finalmente calculamos $\mathcal{F}(\phi)$, donde, por la Proposición 13 de la Lección 2 tenemos

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(\varphi)})(x) = \overline{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi))}(x).$$

Pero, como $\mathcal{F}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el Teorema 1 de la Lección 2 (Inversión de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$) se tiene la identidad $\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi))$ y entonces podemos escribir

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \overline{\varphi}(x).$$

De esta forma, se tiene

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathcal{F}(\phi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx = \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

■

Observamos entones que $\mathcal{F} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ es una isometría, ahora, extendemos esta isometría a todo el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la siguiente manera: sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$ sabemos que existe une sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$f = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi_n, \tag{2}$$

donde este limite debe comprenderse en el marco del espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$, es decir, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2} = 0$.

Como la suceseción $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces sabemos que esta sucesión es de Cauchy. Pero también se tiene que la suceción $(\mathcal{F}(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, por la Proposición 1 podemos escribir, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi_m)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(\varphi_n - \varphi_m)\|_{L^2} = \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2}.$$

De esta manera, como la suceción $(\mathcal{F}(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$ sabemos que es convergente y entonces definimos la función $\mathcal{F}'(f)$ como el límite de esta suceción:

$$\boxed{\mathcal{F}'(f) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n). \qquad (3)}$$

Observación 1 *La defınción de la función $\mathcal{F}'(f)$ es independiente de la suceción $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tomada.*

En efecto, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $f = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \phi_n$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entones, siempre por la Proposición 1 podemos escribir, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{F}(\phi_n) - \mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(\phi_n - \varphi_n)\|_{L^2} = \|\phi_n - \varphi_n\|_{L^2},$$

de donde, como $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|\phi_n - \varphi_n\|_{L^2} = 0$ (pues ϕ_n y φ_n convergen a f) entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|\mathcal{F}(\phi_n) - \mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2} = 0$ y de esta manera se tiene $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\phi_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)$. Finalmente por (3) se tiene $\mathcal{F}'(f) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\phi_n)$.

Luego tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $\mathcal{F}' : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ la aplicación definida por (3). Entonces $\mathcal{F}'$ es la única aplicación que satisface:*

1) *$\mathcal{F}'$ es lineal.*
2) *Extensión: sea $\mathcal{F}' \mid_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ la restricción de $\mathcal{F}'$ a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $\mathcal{F}' \mid_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)}= \mathcal{F}$.*
3) *Identidad de Plancherel: para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|\mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*

Demostración.

1) La linealidad de $\mathcal{F}'$ se sigue directamente (3) y de la linealidad de $\mathcal{F}$ (Definición 1 de la Lección 2).
2) Para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ basta tomar en (2) la sucesión constante $\varphi_n = \varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera por (3) obtenemos directamente $\mathcal{F}'(\varphi) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n) = \mathcal{F}(\varphi)$.
3) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $f = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varphi_n$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Como se tiene, por definición, $\mathcal{F}'(f) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entones podemos escribir
$$\|\mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2},$$
pero, por la Proposición 1 sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2} = \|\varphi_n\|_{L^2}$ y de esta forma escribimos
$$\|\mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\varphi_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$
donde la ultima igualdad se justifica por el hecho que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Finalmente verificamos que la aplicación $\mathcal{F}'$ definida en (3) es la única que satisface los puntos 1), 2) y 3) aquí arriba. En efecto, supongamos que existe $\mathcal{F}'_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que satisface 1), 2) y 3). Sea entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ escribimos
$$\|\mathcal{F}'_2(f) - \mathcal{F}'(f)\|_{L^2} \quad\leq\quad \|\mathcal{F}'_2(f) - \mathcal{F}'_2(\varphi_n)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}'_2(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}'(f)\|_{L^2},$$
donde se quiere mostrar que cada término aquí arriba tiende a cero cuando $n \longrightarrow +\infty$.

Para el primer término, como $\mathcal{F}'_2$ satisface 1) y 3) y además, como φ_n converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\mathcal{F}'_2(f) - \mathcal{F}'_2(\varphi_n)\|_{L^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\mathcal{F}'_2(f - \varphi_n)\|_{L^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2} = 0.$$

Para el segundo término, como $\mathcal{F}'_2$ satisface 2) sabemos que $\mathcal{F}'_2(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y entonces $\|\mathcal{F}'_2(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi_n)\|_{L^2} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, para el tercer término, por la definicón de $\mathcal{F}'$ dada en (3) se sigue directamente que $\lim\limits_{n\longrightarrow} \|\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = 0$.

De esta manera vemos que $\|\mathcal{F}'_2(f) - \mathcal{F}'(f)\|_{L^2} = 0$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto $\mathcal{F}'$ es única. ■

Definición 1 *(Transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$) Definimos la transformación de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ como la isometría $\mathcal{F}' : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dada por (3).*

Una vez que hemos definido la transformación la transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$ pasamos a estudiar su transformación inversa.

3. Transformación de Fourier inversa en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y la formula de inversión

La construcción de la transformación de Fourier inversa en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$, la cual notaremos como $(\mathcal{F}')^{-1}$, sigue el mismo esquema de la construcción de la transformación de Fourier $\mathcal{F}'$ en este espacio:

(A) Recordemos que para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la transformación de Fourier inversa se define como

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi) d\,\xi, \tag{4}$$

ver la Defincón 3 de la Lección 2. Pero esta formula no siempre es valida si consideramos ahora una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Para verificar esto se puede tomar la misma función $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ dada en el Ejemplo 1.

(B) Consideremos entones el espacio de las funciones de test $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^d)$ pero se tiene también que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, por lo que para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, la función $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ dada en (4) está bien definida.

Mostramos entonces que $\mathcal{F}^{-1}$ envía funciones de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $L^2(\mathbb{R}^d)$ y que es además una isometría.

Proposición 2 *Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.*

Prueba. La prueba sigue esencialmente las mismas lineas de la prueba de la Proposición 1.

(C) La Proposición 2 es la *pieza clave* para extender la isometría $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ a una única ismotría $(\mathcal{F}')^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$: para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos $(\mathcal{F}')^{-1}(f) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ como el limite en $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\boxed{(\mathcal{F}')^{-1}(f) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_n). \qquad (5)}$$

Siguiendo las mismas lineas de la demostración del Teorema 1 se tiene:

Teorema 2 *Sea la aplicación $(\mathcal{F}')^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ definida por (5). Entonces $(\mathcal{F}')^{-1}$ es la única aplicación que satisface:*

1) $(\mathcal{F}')^{-1}$ es lineal.

2) Extensión: sea $(\mathcal{F}')^{-1}\,|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ la restricción de $(\mathcal{F}')^{-1}$ a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $(\mathcal{F}')^{-1}\,|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F}^{-1}$.

3) Identidad de Plancherel: para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|(\mathcal{F}')^{-1}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Así tenemos la siguiente definición:

Definición 2 *(Transformación de Fourier inversa en $L^2(\mathbb{R}^d)$) La isometría $(\mathcal{F}')^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ dada por (5) se define como la transformación de Fourier inversa en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

A continuaci'on estudiamos la principal propiedad de la transformación de Fourier inversa la cual justifica este nombre.

La formula de inversión de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Teorema 3 *(Inversión de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$) Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene la identidad en $L^2(\mathbb{R}^d)$: $f = (\mathcal{F}')^{-1}(\mathcal{F}'(f)) = \mathcal{F}'((\mathcal{F}')^{-1}(f))$.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y por la Proposición 1 de la Lección 4 sabemos además que $\mathcal{F}(\varphi_n) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces, por el Teorema 1 de la Lección 2 (formula de inversión de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$) podemos escribir

$$\varphi_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_n)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi_n)),$$

de donde, al tomar el limite cuando $n \longrightarrow +\infty$, por la defininción de $(\mathcal{F}')^{-1}$ y $\mathcal{F}'$ dada por (5) y (3) respectivamente se tiene el resultado. ■

Observación 2 *Es interesante observar que en el marco del espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ la formula de inversión de Fourier es valida para toda función de este espacio, mientras que, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ necesitamos la hipótesis adicional $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para poder escribir $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$.*

4. Relación con la Transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Consideremos ahora una función $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Por un lado, como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sabemos por la Proposición 1 de la Lección 2 que su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ dada por (1) está bien definida en el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Por otro lado, como $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sabemos además que su transformación de Fourier $\mathcal{F}'(f)$ dada por (3) está bien definida en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$.

⇒ La pregunta es: si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces para cual definición de transformación de Fourier, $\mathcal{F}(f)$ o $\mathcal{F}'(f)$, deberíamos usar?

En la siguiente proposición mostramos que estas dos definiciones de transformación de Fourier y sus transformaciones de Fourier inversas respectivas coinciden en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 3 *(Transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$) Para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene:*

1) $\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}'(f)(\xi)$, para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

2) $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (\mathcal{F}')^{-1}(f)(x)$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Prueba.

1) Como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y además, como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces podemos escoger $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y también $\varphi_n \longrightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

   De esta manera, como $\varphi_n \longrightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y como la transformación de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ es un operador lineal y continuo se tiene que $\mathcal{F}(\varphi_n) \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir
   $$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi)(\xi). \tag{6}$$

   Por otro lado, como $\varphi_n \longrightarrow f$ en L^2, por la defininción de la transformación de Fourier $\mathcal{F}'$ dada en (3) sabemos que $\mathcal{F}'(f) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, pero, por el Teorema 6 de la Lección 1 tenemos que, para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$,
   $$\mathcal{F}'(f)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi). \tag{7}$$

   Finalmente, por (6) y (7), para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir $\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}'(f)(\xi)$.

2) La prueba de este punto sigue las misma lineas que la prueba de 1). ■

5. Principales propiedades de la transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

En la Sección 3 de la Lección 2 estudiamos algunas propiedades utiles de la transformación de Fourier $\mathcal{F}$ definida en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ y es natural preguntarse si estas mismas propiedades son validas para la transformación de Fourier $\mathcal{F}'$ definida en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$. En esta sección estudiamos dichas propiedades.

Empecemos con algunas notaciones y observaciones:

- En lo que sigue, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siempre denotará la sucesión de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y a partir de la cual definimos la transformación de Fourier $\mathcal{F}'(f) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)$.
- Además, dado que este limite se satisface en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$, siempre por el Teorema 6 de la Lección 1 sabemos que, para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, se tiene el limite puntual

$$\mathcal{F}'(f)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi). \tag{8}$$

Este limite nos será de gran utilidad para estudiar propiedades de $\mathcal{F}'$ análogas a las propiedades de $\mathcal{F}$ y la idea de base es la siguiente: como las propiedades de $\mathcal{F}$ se verifican para todo $\mathcal{F}(\varphi_n)$ entonces usando (8) intentaremos verificar las mismas propiedades para $\mathcal{F}'(f)$.

Translación, Dilatación y Reflexión

Proposición 4 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces, para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ se tiene:*

1) ***Traslación.*** *Para todo $y \in \mathbb{R}^d$: $\mathcal{F}'(f(\cdot - y))(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathcal{F}'(f)(\xi)$ y $\mathcal{F}'(f)(\xi - y) = \mathcal{F}'(e^{2\pi y\cdot x} f)(\xi)$.*

2) ***Dilatación.*** *Para todo $\varepsilon > 0$: $\mathcal{F}'(f(\varepsilon\cdot))(\xi) = \dfrac{1}{\varepsilon^d}\mathcal{F}'(f)\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)$.*

3) ***Reflexión.*** $\mathcal{F}'\left(\widetilde{f}\right)(\xi) = \widetilde{\mathcal{F}'(f)}(\xi)$.

Prueba. Probaremos solamente el punto 1). Los puntos 2) y 3) siguen exactamente las misma lineas.

Para empezar, observemos que la traslación respecto a $y \in \mathbb{R}^d$ es un operador lineal y acotado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. En efecto, de la definición de esta operación se sigue inmediatamente que: para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $(\lambda f + g)(\cdot - y) = \lambda f(\cdot - y) + g(\cdot - y)$. Además, con un cambio de variable podemos escribir $\|f(\cdot - y)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

De esta manera, como $\varphi_n \longrightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y como la traslación respecto a $y \in \mathbb{R}^d$ es un operador lineal y acotado se tiene $\varphi_n(\cdot - y) \longrightarrow f(\cdot - y)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, de donde, por definición de la transformación de Fourier $\mathcal{F}'$ se tiene

$$\mathcal{F}'(f(\cdot - y)) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n(\cdot - y)),$$

y luego, por (8), para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir

$$\mathcal{F}'(f(\cdot - y))(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n(\cdot - y))(\xi).$$

Pero, por el punto 1) de la Proposición 3 de la Lección 2 sabemos que $\mathcal{F}(\varphi_n(\cdot - y))(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi)$ y entonces, siempre por (8), en el limite precedente podemos escribir

$$\mathcal{F}'(f(\cdot - y))(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi)\right) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathcal{F}'(f)(\xi).$$

Para la prueba de la segunda identidad del punto 1) de esta proposición basta notar que $e^{2\pi i y\cdot x}$ es una función acotada y entonces $e^{2\pi i y\cdot x}\varphi_n$ converge a $e^{2\pi i y\cdot x} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. De esta manera, nuevamente por el punto 1) de la Proposición 3 de la Lección 2 podemos escribir:

$$\mathcal{F}'(e^{2\pi i y\cdot x} f)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(e^{2\pi i y\cdot x}\varphi_n)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi - y) = \mathcal{F}'(f)(\xi - y).$$

■

Transformación de Fourier de una función radial

Proposición 5 *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es una función radial entones $\mathcal{F}'(f)$ es una función radial.*

Prueba. Como $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es radial entonces podemos escoger la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ la función φ_n es una función radial y entonces por la Proposición 4 de la Lección 2 sabemos que $\mathcal{F}(\varphi_n)$ es también una función radial.

De esta manera, por (8), para casi todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ tales que $|\xi_1| = |\xi_2|$ podemos escribir

$$\mathcal{F}'(f)(\xi_1) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_1) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_2) = \mathcal{F}'(f)(\xi_2).$$

■

Continuidad

Recordemos, para empezar, que para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ su transformación de Fourier $\mathcal{F}'(f)$ se define por (3) como un limite de funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto $\mathcal{F}'(f)(\xi)$ está definida para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$. Sin embargo, en el marco de los espacio de Lebesgue consideramos que dos funciones son "iguales" si ellas son iguales en casi todo punto y de esta forma nos formulamos la siguiente pregunta: ¿ si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces $\mathcal{F}'(f)$ es igual a una función continua en casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$?

La respuesta a esta pregunta es no y a continuación presentamos un ejemplo simple.

Ejemplo 2 *Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y la función $\dfrac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$\mathcal{F}'(f)(\xi) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi),$$

donde la función $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ vale 1 sobre el intervalo $[-1, 1]$ y 0 fuera de este intervalo y por lo tanto no es continua.

En efecto, empecemos por verificar que la función $\dfrac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Para ello cortamos la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right|^2 dx = \int_{|x|<1} \left|\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right|^2 dx + \int_{|x|>1} \left|\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right|^2 dx.$$

Para acotar la primera integral usamos el hecho que $|\sin(x)| \leq c|x|$, de donde

$$\int_{|x|<1} \left|\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right|^2 dx \leq c \int_{|x|<1} dx \leq c < +\infty.$$

Por otro lado, para controlar la segunda integral usamos ahora el hecho que $|\sin(x)| \leq 1$, de donde

$$\int_{|x|>1} \left|\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right|^2 dx \leq c \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^2} < +\infty.$$

Calculemos ahora $\mathcal{F}'\left(\dfrac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right)$. La primera idea que puede venir a la mente es usar la expresión (8), sin embargo, si bien esta expresión nos será útil para estudiar algunas propiedades generales de $\mathcal{F}'$, al momento de calcular la transformación de Fourier de una función en particular como la de aquí arriba, la formula (8) es muy poco útil pues, primero, requiere encontrar una formula explicita para cada función φ_n, luego calcular su transformación y después calcular su limite cuando $n \longrightarrow +\infty$.

De esta manera, para calcular $\mathcal{F}'\left(\dfrac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right)$ usaremos la siguiente astucia: observemos para empezar que la función $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y entonces, usando la Definición 3 de la Leccion 2 podemos calcular su transformación de Fourier inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{[-1,1]}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi}\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} e^{2\pi i x\xi}d\xi = \frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2\pi i x} = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}.$$

Pero, se tiene además que $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y entonces por el punto 2) de la Proposición 3, para casi todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$(\mathcal{F}')^{-1}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}.$$

Finalmente, como la función $\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ tomamos entonces la transformación de Fourier $\mathcal{F}'$ y además por la formula de inversión de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ (Teorema 3) se tiene, para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}'\left(\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right)(\xi) = \mathcal{F}'\left((\mathcal{F}')^{-1}\left(\mathbb{1}_{[-1,1]}\right)\right)(\xi) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi).$$

Observación 3 *Si consideramos ahora $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ entones $\mathcal{F}'(f)$ es continua en casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$*

En efecto, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces por la Proposición 3 se tiene $\mathcal{F}'(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ y además, por la Proposición 6 de la Lección 2 sabemos que $\mathcal{F}(f)$ es una función continua.

Convolución

Para $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ por la desigualdad de Young sabemos que $g * f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y estudiamos entonces su transformación de Fourier.

Proposición 6 *Sean $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\mathcal{F}'(g * f)(\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi)\mathcal{F}'(f)(\xi)$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Prueba. En primer lugar, como φ_n converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces por la desigualdad de Young se tiene que $g * \varphi_n$ converge a $g * f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Luego, por la identidad de Parseval (punto 3) del Teorema 1) sabemos que $\mathcal{F}'$ es un operador continuo de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y entonces se tiene $\mathcal{F}'(g * f) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}'(g * \varphi_n)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir

$$\mathcal{F}'(g * f)(\xi) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}'(g * \varphi_n)(\xi).$$

Por otro lado, como $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por la desigualdad de Young sabemos que $g * \varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y entonces por la Proposición 3 se tiene $\mathcal{F}'(g * \varphi_n)(\xi) = \mathcal{F}(g * \varphi_n)(\xi)$. De esta manera, en el lado derecho del limite precedente podemos escribir

$$\mathcal{F}'(g * f)(\xi) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}(g * \varphi_n)(\xi).$$

En este punto usamos la Proposición 5 de la Lección 2 para obtener:

$$\mathcal{F}'(g * f)(\xi) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}(g)(\xi)\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi)\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi)\right) = \mathcal{F}(g)(\xi)\mathcal{F}'(f)(\xi).$$

$\blacksquare$

Derivación

Para estudiar el comportamiento de $\mathcal{F}'$ con respecto a la derivación, de la misma manera que en la Sección 3.5 de la Lección 2, usamos las funciones de test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pues por el punto 2) del Teorema 7 de la Lección 1, para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^d$ se tiene $\partial^a\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y entonces $\mathcal{F}'(\partial^a\varphi)$ está bien definida en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 7 *Sean $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ y $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice. Entonces:*

1) $\mathcal{F}'(\partial^a \varphi)(\xi) = (2\pi i\xi)^a \mathcal{F}'(\varphi)(\xi)$ *y*

2) $\partial^a \mathcal{F}'(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}'((-2\pi i x)^a \varphi)(\xi)$.

Prueba. Basta notar que $\partial^a \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y además $(-2\pi i x)^a \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ entonces, por el punto 2) del Teorema 1 se tiene $\mathcal{F}'(\partial^a \varphi) = \mathcal{F}(\partial^a \varphi)$ y $\mathcal{F}'((-2\pi i x)^a \varphi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^a \varphi)$. El resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 7 de la Lección 2. ■

Conjugación

Recordemos que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es una función a valores en $\mathbb{C}$ y que $\overline{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ denota su conjugado complejo. Se tiene la siguiente relación entre la transformación de Fourier de una función y su conjugación compleja.

Proposición 8 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $\mathcal{F}'(\overline{f}) = \overline{(\mathcal{F}')^{-1}(f)}$ y $(\mathcal{F}')^{-1}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}'(f)}$.*

Prueba. Como φ_n converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces $\overline{\varphi_n}$ converge a $\overline{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y por la definición de $\mathcal{F}'(f)$ dada en (3) sabemos que

$$\mathcal{F}'(\overline{f}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}(\overline{\varphi_n}).$$

Pero, por la Proposición 13 de la Lección 2, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathcal{F}(\overline{\varphi_n}) = \overline{\mathcal{F}^{-1}(\varphi_n)}$ y entonces, por la defninción de $(\mathcal{F}')^{-1}(f)$ dada en (5), en el limite anterior podemos escribir

$$\mathcal{F}'(\overline{f}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{F}^{-1}(\varphi_n)} = \overline{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_n)} = \overline{(\mathcal{F}')^{-1}(f)}.$$

La prueba de la segundad identidad $(\mathcal{F}')^{-1}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}'(f)}$ sigue las mimas lineas. ■

La relación de Parseval

Finalmente estudiamos dos propiedades útiles de la transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 9 *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces:*

1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}'(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}'(f)(x)g(x)dx.$

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}'(f)(x)\overline{\mathcal{F}'(g)}(x)dx$ *(Relación de Parseval).*

Prueba. Observemos para empezar que por la desigualdad de Hölder todas la integrales aquí arriba están definidas. Mostremos ahora estas identidades.

1) Sean $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que convergen a f y g en $L^2(\mathbb{R}^d)$ respectivamente. Entonces, por la defninción de $\mathcal{F}'(g)$ dada por (3) y el por el teorema de convergencia dominada se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}'(g)(x)dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\mathcal{F}(\phi_n)(x)dx.$$

Pero, por la Proposición 10 de la Lección 2 se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\mathcal{F}(\phi_n)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_n)(x)\phi_n(x)dx,$$

y entonces, siempre por la defninción de $\mathcal{F}'(f)$ dada en (3) podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}'(g)(x)dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_n)(x)\phi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}'(f)(x)g(x)dx.$$

2) Para $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definimos la función $h = \overline{\mathcal{F}'(g)} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Calculemos $\mathcal{F}'(h)$. Primero, por la Proposición 8 observamos que $h = \overline{\mathcal{F}'(g)} = (\mathcal{F}')^{-1}(\overline{g})$ y entonces por la formula de inversión de Fourier (Teorema 3) obtenemos $\mathcal{F}'(h) = \mathcal{F}'((\mathcal{F}')^{-1}(\overline{g})) = \overline{g}$.

De esta manera, por el punto 1) de esta proposición escribimos directamente:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}'(h)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}'(f)(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}'(f)(x)\overline{\mathcal{F}'(g)}(x)dx.$$

■