Los números reales

24/10/2014

Ejercicio 1 — Relación de orden en los números reales

Demuestre las proposiciones siguientes:

1. Sean a, b dos numeros reales tales que $a < b$. Para todo $\lambda \in]0,1[$ se tiene que $a < \lambda a + (1-\lambda)b < b$.
2. Para todo $x > 0$ se tiene que $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \geq \sqrt{2}$.
3. Si x, y son dos reales tales que $0 \leq x \leq y$ entonces $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

Ejercicio 2 — Desigualdades

Resolver en el conjunto de los números reales las siguientes desigualdades.

1. $|x^2 - 3| + 2x + 1 \geq 0$.
2. $\sqrt{4-x} - \sqrt{5+2x} \geq 0$.

Ejercicio 3 — Valor absoluto

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Sean a, b, c tres números reales tales que $a < b < c$. Mostrar que $|b| < \text{máx}(c, -a)$.
2. Mostrar que si $|x-2| \leq \frac{1}{2}$ entonces $\left|x - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$ y $\left|1 - \frac{2}{x}\right| \leq \frac{1}{7}$.

Ejercicio 4 — Aplicaciones de la desigualdad triangular

Para todo x, y y z numéros reales mostrar las siguientes desigualdades.

1. $|x+y| \leq 2\,\text{máx}(|x|, |y|)$.
2. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
3. $||x| - |y|| \leq |x + z| + |y + z|$.

Ejercicio 5 — Inducción

Usando inducción sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ realizar los siguientes ejercicios.

1. Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Calcular $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$.
3. Sea $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Mostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Ejercicio 6 — Parte entera de un número real

Sea $E[x]$ la función parte entera de un número real, es decir para todo $x \in \mathbb{R}$ $E[x]$ es el mayor entero tal que se tenga la desigualdad $E[x] \leq x$.

1. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ mostrar que $E[x] + E[y] \leq E[x+y]$.
2. Mostrar para todo $n \in \mathbb{N}^*$ la generalización siguiente
$$\sum_{k=1}^{n} E[x_k] \leq E\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right].$$
3. Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $nE[x] \leq E[nx]$ y $E[x] \leq E\left[\frac{E[nx]}{n}\right]$.