Normas, distancias y espacios normados 04/02/2008

Ejercicio 1 — Normas y distancias sobre $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo n-dimensional. Para todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}. \end{aligned}$$

1. Mostrar que las aplicaciones $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.
2. Definimos las distancias $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ para $i = 1, 2, \infty$. Para $n = 2$, dibujar las bolas unidades determinadas por el conjunto
$$B_i(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_i(x, 0) < 1\}.$$
3. Demostrar las desigualdades siguientes
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$
4. Deducir que estas tres normas son equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$.

Moraleja: todas las normas definidas sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Ejercicio 2 — Normas sobre el conjunto de funciones $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$

Definimos $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ como el conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ a valores en $\mathbb{R}$. Definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty[\\ f &\longmapsto \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty[\\ f &\longmapsto \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty[\\ f &\longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \end{aligned}$$

1. Verificar que en la definición de la aplicación $\|\cdot\|_\infty$ se puede reemplazar el supremo por el máximo.
2. Mostrar que las aplicaciones $\|\cdot\|_i$ para $i = 1, 2, \infty$ son normas sobre el conjunto $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$.
3. Demostrar las desigualdades siguientes para toda función $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$
$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b - a}\|f\|_2 \qquad y \qquad \|f\|_2 \leq \sqrt{b - a}\|f\|_\infty.$$

4. ¿Son estas normas equivalentes?
5. Considere la sucesión de funciones definidas por $f_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$.

   a) Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$.

   b) Verifique que $\|f_n\|_1 = \frac{b-a}{n+1}$.

   c) Verifique que $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{b-a}{2n+1}}$.

   d) Verifique que $\|f_n\|_\infty = 1$ para todo n.

   e) Muestre que $\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pero que no se tiene $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. Definimos una sucesión de funciones escribiendo $g_n(x) = n^{\frac{3}{4}} f_n(x)$ para todo entero n. Muestre que

$$\|g_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad y \qquad \|g_n\|_2 \approx n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{b-a}{2}}.$$

7. Concluya que ninguna de las normas anteriores son equivalentes entre sí.

   Moraleja: en dimensión infinita las normas no son necesariamente equivalentes.

Ejercicio 3 — Continuidad de la distancia y de la norma

1. Sea (E, d_E) un espacio métrico. Sea $x_0 \in E$ un elemento de E. Mostrar que la aplicación φ_{x_0} definida por

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{x_0} : E & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \varphi_{x_0}(x) = d_E(x,x_0) \end{array}$$

   es continua
2. Mostrar que la aplicación distancia $d_E : E \times E \longrightarrow [0,+\infty[$ es continua. ¿Esta aplicación es lipschitziana?
3. Sea ahora $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado. Mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_E : E & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$$

   es continua.

Ejercicio 4 — Necesidad de las condiciones *(N.1)*, *(N.2)*, *(N.3)*

1. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \ln(1+|x|). \end{array}$$

   ¿Es φ una norma? Estudie si esta aplicación satisface los puntos *(N.1)*, *(N.2)* y *(N.3)* de la definición de norma.
2. Sea ahora la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x = (x_1,x_2) & \longmapsto & \psi(x) = \begin{cases} \max(|x_1|,|x_2|) & \text{si } x_2 \neq 0 \\ 2|x_1| & \text{si } x_2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

   ¿Es ψ una norma? Estudie si esta aplicación satisface los puntos *(N.1)*, *(N.2)* y *(N.3)* de la definición de norma.
3. Definimos finalmente

$$\begin{array}{rcl} \Theta : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \Theta(x) = |x_1|. \end{array}$$

¿Es Θ una norma? Estudie si esta aplicación satisface los puntos *(N.1)*, *(N.2)* y *(N.3)* de la definición de norma.

** Ejercicio 5 — Equivalencia de distancias

Sea E un espacio métrico dotado de dos distancias d_1 y d_2. Decimos que d_1 y d_2 son *topológicamente equivalentes* si la aplicación identidad Id_E es un homeomorfismo de (E, d_1) sobre (E, d_2). Si además la aplicación identidad Id_E es uniformemente continua de (E, d_1) sobre (E, d_2) y de (E, d_2) sobre (E, d_1), diremos que las distancias d_1 y d_2 son *uniformemente equivalentes.*

1. Sea $E =]0,1[$ y $d_1(x,y) = |x-y|$ una distancia sobre E. Definimos

$$\begin{array}{rcl} d_2 : E \times E & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ (x,y) & \longmapsto & d_2(x,y) = \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right|. \end{array}$$

   a) Mostrar que se tiene la desigualdad $d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$.
   b) Utilizando la pregunta anterior, muestre que Id_E es una biyección lipschitziana de (E, d_2) en (E, d_1).
   c) Sea $F = [1, +\infty[$ un espacio métrico dotado de la distancia $d(x,y) = |x-y|$. Mostrar que las aplicaciones
   $$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} g : F & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & g(t) = \frac{1}{t} \end{array}$$
   son biyecciones.
   d) Mostrar que la aplicación f es una biyección continua de (E, d_1) sobre (F, d).
   e) Mostrar que para todos los elementos $x, y \in F$ se tiene la identidad $d_2(g(x), g(y)) = d(x,y)$ y mostrar que g es una biyección continua de (F, d) sobre (E, d_2).
   f) Calcule $g \circ f$ y concluya que Id_E es una biyección continua de (E, d_1) sobre (E, d_2). Es decir que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

2. Sea $(u_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos de E tal que $u_n = 1/n$.
   a) Mostrar que $d_1(u_n, u_{n+1}) = \frac{1}{n(n+1)}$.
   b) Calcular $d_2(u_n, u_{n+1})$.
   c) Sea $\varepsilon > 0$ un real. Nótese que para todo ε existe un entero N tal que, para todo $n \geq N$ se tenga $\frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon$.
   Muestre que para todo $n \geq N$ se tiene $d_1(u_n, u_{n+1}) < \varepsilon$ y que $d_2(u_n, u_{n+1}) = 1$.
   d) ¿Es la aplicación $Id_E : (E, d_1) \longrightarrow (E, d_2)$ una aplicación uniformemente continua?
   e) ¿Qué puede decir sobre las distancias d_1 y d_2? ¿Son uniformemente equivalentes?