ANALISIS / Series de Taylor, Superficies, Integrales
Paul D. Toasa C.
01.12.2009

** Ejercicio 1 — Serie de Taylor (*Ver Ejercicio 2*)

Se tiene la función

$$f(x) = \frac{1-3^{-x}}{1-2^{-x}}, \qquad x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\tag{1}$$

que es aproximadamente lineal en su dominio.

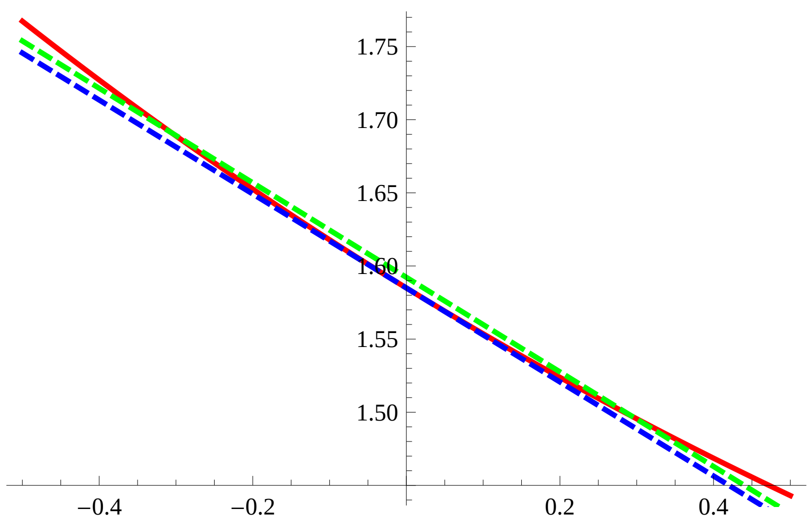
1. Demostrar que la aproximación lineal que se obtiene usando su serie de Taylor esta dada por

$$f(x) = \frac{\log 3}{\log 2} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\log 3}{\log 4}x + R_2(x) \tag{2}$$

2. Compare el resultado con la aproximación dada por el modelo lineal elemental $A + Bx$

Solución Ejercicio 1

En el siguiente gráfico están representados la función $f(x)$ en rojo, aproximación por Taylor en azul y la regresión lineal en verde.



*** Ejercicio 2 — Aproximación de funciones (*Ver [1]*)

Queremos resolver la Ecuación

$$f(x) = \frac{1-3^{-x}}{1-2^{-x}} = \frac{3b_2 - b_0}{2b_1 - b_0} \tag{3}$$

sean $w = \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0}$, $l = \frac{\log 2}{\log 3}$

1. Demostrar que una aproximación de la solución está dada por

$$x = 7,859(w-l) + 2,9554(w-l)^2 \tag{4}$$

Siga teniendo en cuenta que en el intervalo $]-0,5;0,5[$ la función $f(x)$ es aproximadamente lineal. De hecho solo éste intervalo es relevante en [1].

Solución Ejercicio 2

La persona que consiga resolver este problema por favor contactarse con el autor para incluir su solución y darle los créditos respectivos.

** Ejercicio 3 — Intersección de cilindros (*Personal*)

A menudo en ingeniería nos topamos con intersecciones cilíndricas. Este problema se originó de la necesidad de calcular la cantidad de suelda -longitud de la curva de intersección en Fig.(1)- que se necesita para unir 2 cilindros de acero cuyos radios son diferentes, sus ejes se intersecan y que además poseen un ángulo de inclinación θ respecto a la vertical.
Sin perder generalidad se puede trabajar con radios proporcionales, de modo que se puede asigna a un cilindro el radio 1 y al otro el radio a.

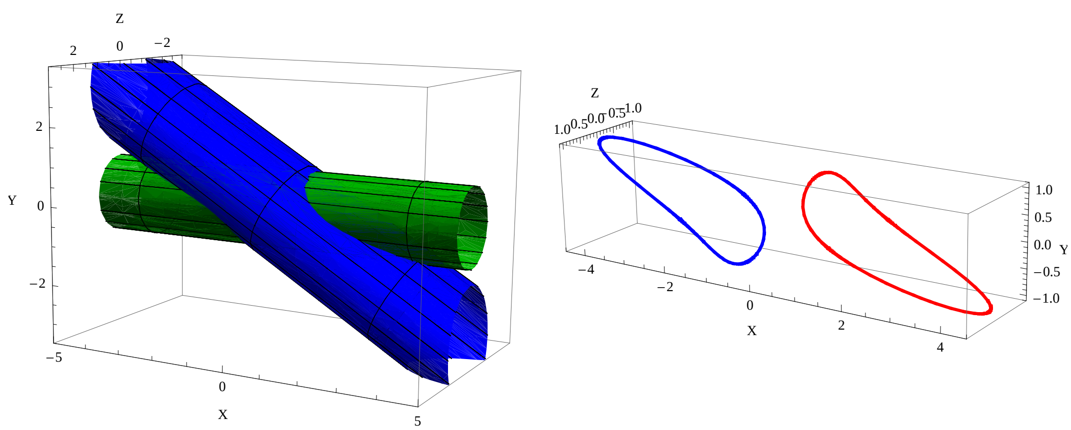


Figura 1: Intersección de 2 cilindros y sus respectivas curvas

1. Demostrar que la cantidad de suelda necesaria está dada por

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\cos(t)^2}{\cos(\theta)^2}\left[\frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - \cos(t)^2}} - \sin(\theta)\right]^2} \mathrm{d}t \tag{5}$$

2. Sugiera un método de cálculo de ésta integral y que consideraciones deben hacerse.

Solución Ejercicio 3

Consideremos que el cilindro verde horizontal tiene radio $r = 1$ y que el cilindro inclinado azul tiene un radio proporcional $r = a$ y que forma un angulo θ con la vertical.

Las ecuaciones parámetricas del cilindro horizontal son

$$x = u_2 \qquad y = \sin(v_2) \qquad z = \cos(v_2) \tag{6}$$

Ahora recordemos que la matriz de rotación alrededor del eje z está dada por

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

por otra parte las ecuaciones paramétricas de un cilindro vertical son

$$x = a\cos(v_1) \qquad y = u_1 \qquad z = a\sin(v_1) \tag{8}$$

Por la Ec.(7) y Ec.(8) obtenemos las ecuaciones paramétricas del cilindro inclinado que rota alrededor del eje z.

$$x = a\cos(v_1)\cos(\theta) - u_1\sin(\theta) \qquad y = a\cos(v_1)\sin(\theta) + u_1\cos(\theta) \qquad z = a\sin(v_1) \tag{9}$$

Por Ec.(6) y Ec.(9) se puede expresar la ecuación de la curva de intersección de los cilindros mediante

$$x = u_2 \qquad = a\cos(v_1)\cos(\theta) - u_1\sin(\theta) \tag{10}$$
$$y = \sin(v_2) = a\cos(v_1)\sin(\theta) + u_1\cos(\theta) \tag{11}$$
$$z = \cos(v_2) = a\sin(v_1) \tag{12}$$

de Ec.(10) se tiene

$$\cos(v_1) = \frac{\sqrt{a^2 - \cos(v_2)^2}}{a} = g(v_2) \tag{13}$$

luego se reemplaza la Ec.(13) en la Ec.11 y se tiene

$$u_1 = \frac{\sin(v_2) - ag(v_2)\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \tag{14}$$

entonces se reemplaza la Ec.(13) y la Ec.(14) en la Ec.(10) y haciendo a la vez el cambio de variable $v_2 = t$ se tiene la ecuación paramétrica de la curva de intersección dada por las ecuaciones (10)-(12)

$$x(t) = \frac{\sqrt{a^2 - \cos(t)^2} - \sin(t)\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \tag{15}$$
$$y(t) = \sin(t) \tag{16}$$
$$z(t) = \cos(t) \tag{17}$$

de la Ec.(15) se tiene

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{\cos(t)^2}{\cos(\theta)^2}\left[\frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - \cos(t)^2}} - \sin(\theta)\right]^2 \tag{18}$$

las demás derivadas son triviales. Finalmente se aplica la fórmula para la longitud de arco para ecuaciones paramétricas

$$L = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

con los límites de integración adecuados y la demostración queda lista.

La solución numérica de la integral debe hacerse en el intervalo $[0, \pi]$ pues la otra mitad tiene exactamente la misma longitud.

** Ejercicio 4 — PWM[1] de la función de distribución de Weibull (*Personal*)

Sea $F(x)$ la función de distribución acumulada de una v.a. Se define los PWM como

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 [x(F)]^p F^r (1-F)^s dF \tag{20}$$

Considere la CDF de la distribucion de Weibull de tres parámetros $W(a, b, c)$ dada por

$$F(x) = 1 - e^{-(\frac{x-a}{b})^c} \qquad x \geq a \tag{21}$$

donde

[1] Probability Weight Moments - Momentos de probabilidda pesada

- $a \in \mathbb{R}$: Localidad
- $b > 0$: Escala
- $c > 0$: Forma

1. Demostrar que

$$M_{1,0,s} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^{1+\frac{1}{c}}}\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) \qquad \frac{1}{c} > -1 \tag{22}$$

donde $\Gamma(z)$ es la función Gamma definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx \qquad z > 0 \tag{23}$$

Solución Ejercicio 4

La función inversa de la Ec.(21) es

$$x(F) = a + b\left[-\log(1-F)\right]^{\frac{1}{c}} \tag{24}$$

entonces reemplazando en Ec.(20) tenemos

$$M_{1,0,s} = a\int_0^1 (1-F)^s dF + b\int_0^1 \left[-\log(1-F)\right]^{\frac{1}{c}}(1-F)^s dF \tag{25}$$

la primera integral I_1 es trivial. En la segunda integral I_2 realizamos el cambio de variable $u = -\log(1-F)$ y se tiene

$$I_2 = b\int_0^\infty u^{\frac{1}{c}}e^{-(s+1)u}du \tag{26}$$

volvemos a hacer un cambio de variable $x = (s+1)u$ y tenemos

$$I_2 = \frac{b}{(s+1)^{1+\frac{1}{c}}}\int_0^\infty x^{\frac{1}{c}}e^{-x}dx = \frac{b}{(s+1)^{1+\frac{1}{c}}}\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) \tag{27}$$

*** Ejercicio 5 — PWM de la función de distribución de Weibull 02 (*Personal*)

Bajo las misma consideraciones del Ejercicio 4.

1. Demostrar que

$$M_{1,r,0} = \frac{a}{r+1} + b\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^i}{(i+1)^{1+\frac{1}{c}}}\binom{r}{i} \qquad \frac{1}{c} > -1 \tag{28}$$

Solución Ejercicio 5

Reemplazando la Ec.(24) en la definición de la Ec.(20)tenemos

$$M_{1,r,0} = a\int_0^1 F^r dF + b\int_0^1 \left[-\log(1-F)\right]^{\frac{1}{c}}F^r dF \tag{29}$$

también en este caso la primera integral es trivial. En la segunda integral I_r realizamos de nuevo el cambio de variable $u = -\log(1-F)$ y se tiene

$$I_r = b\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{c}}\left[1-e^{-u}\right]^r e^{-u}du \tag{30}$$

por el teorema del binomio se tiene lo siguiente

$$\left(1-e^{-u}\right)^r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}e^{-uk}(-1)^k$$

y reemplazando en la Ec.(30) se tiene

$$I_r = b\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{c}}e^{-(k+1)u}du \tag{31}$$

en la integral de la Ec.(31) hacemos el cambio de variable $x=(k+1)u$, luego se tiene

$$J_k = \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{c}}e^{-(k+1)u}du = \frac{1}{(k+1)^{1+\frac{1}{c}}}\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

que reemplazando en Ec(31) nos lleva al resultado requerido.

*** Ejercicio 6 — PWM de la función de distribución de Weibull 03 (*Personal*)

Bajo las misma consideraciones del Ejercicio 4.

1. Demostrar que

$$M_{1,r,s} = a\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k}{k+r+1}\binom{s}{k} + b\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{(k+s+1)^{1+\frac{1}{c}}}\binom{r}{k} \qquad \frac{1}{c} > -1 \tag{32}$$

Solución Ejercicio 6

Usar los mismos criterios de los Ejercicios 4 y 5.
Tener presente que

$$\int_0^1 (1-F)^s = \sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{s}{k} \tag{33}$$

Referencias

[1] J.R.M. Hosking, J.R. Wallis, and E.F. Wood. Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*, 1985.