Números complejos, raíces de la unidad, aplicaciones trigonométricas complejas 10/04/2010

Ejercicio 1 — Aplicaciones complejas

Encontrar todas las aplicaciones $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ que verifican la identidad

$$(\forall z\in\mathbb{C})\qquad f(z)+zf(-z)=1+z.$$

Indicación: verificar que se tiene la identidad $(1+z^2)f(z)=1+z^2$ *y estudiar los casos cuando* $z=i,-i$ *y* $z\neq i,-i$.

Ejercicio 2 — Identidades y desigualdades importantes

1. Mostrar que se tiene
$$(\forall z_1,z_2\in\mathbb{C})\qquad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$
2. Verificar que se tiene
$$(\forall z_1,z_2\in\mathbb{C})\qquad z_1z_2=\frac{1}{4}\left(|z_1+\overline{z_2}|^2-|z_1-\overline{z_2}|^2+i|z_1+i\,\overline{z_2}|^2-i|z_1-i\,\overline{z_2}|^2\right)$$
3. Mostrar que todo número complejo de módulo 1, tal que $z\neq 1$, se escribe de la forma siguiente
$$z=\frac{x+i}{x-i},\qquad x\in\mathbb{R}.$$
4. Mostrar que se tiene
$$(\forall z_1,z_2\in\mathbb{C})\qquad |z_1+z_2|^2\leq\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$$
y estudiar el caso de igualdad.
5. Verificar
$$(\forall z\in\mathbb{C})\qquad |z-1|\leq\Big||z|-1\Big|+|z|\,|Arg(z)|$$
en donde $Arg(z)$ es el argumento del número complejo z.

Ejercicio 3 — Ecuaciones complejas

1. Para $\alpha\in\mathbb{R}$, resolver el sistema de ecuaciones siguiente de incógnitas $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\begin{cases}\cos(\alpha)+\cos(\alpha+x)+\cos(\alpha+y)= & 0\\ \sin(\alpha)+\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha+y)= & 0\end{cases}$$
2. Resolver las ecuaciones a continuación de incógnita $z\in\mathbb{C}$:

   a) $z^2-2z\cos(\theta)+1=0$ con $\theta\in\mathbb{R}$.

   b) $z^4=z+\overline{z}$

   c) $\overline{z^7}=\frac{1}{z^3}$

Ejercicio 4 — Raíces n-ésimas de la unidad

1. Sea $n\in\mathbb{N}^*$ y sea ω una raíz n-ésima de la unidad. Calcular las sumas $\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{n-1}\omega^{kp}$, con $p\in\mathbb{Z}$.

2. Si $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ y si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; mostrar que se tiene
$$|z_1| + |z_2| \leq \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |z_1 + \omega^k z_2|.$$

* Ejercicio 5 — Linearización de funciones trigonométricas

1. Sean $\theta \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$. Utilizando la fórmula $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ mostrar que $2^p \cos^p(\theta) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^p$ y $(2i)^p \sin^p(\theta) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^p$
2. Verificar las identidades $1 + e^{i\theta} = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \cos(\theta/2)$ y $1 - e^{i\theta} = -2ie^{\frac{i\theta}{2}} \sin(\theta/2)$
3. Calcular las sumas $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \cos^3(kx)$.
5. Mostrar que se tiene $\sum_{k=1}^{n} |\sin(k)| \geq \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin(1)}$.

** Ejercicio 6 — Un ejercicio de verdad

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sean $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^*$. El objetivo de este ejercicio es mostrar que existe un subconjunto I de $\{1, ..., n\}$ tal que se tenga la desigualdad
$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

1. Definimos la recta D_θ del plano complejo que pasa por 0 y que es perpendicular al vector $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ y definimos el conjunto $S_\theta \subset \{1, ...n\}$ tal que
$$S_\theta = \left\{j \in \{1, ...n\} : \ \theta - \frac{\pi}{2} \leq Arg(z_j) \leq \theta + \frac{\pi}{2}\right\}$$
Mostrar que S_θ es el conjunto de índices $j \in \{1, ..., n\}$ tales que los puntos z_j pertenezcan al semi-plano delimitado por la recta D_θ y que contiene $e^{i\theta}$.
2. Notemos $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ con $r_k = |z_k| > 0$ y $\theta_k \in [0, 2\pi[$. Mostrar que se tiene la desigualdad
$$\left|\sum_{j\in S_\theta} z_j\right| \geq \Re e\left(\sum_{j\in S_\theta} z_j e^{-i\theta}\right) = \sum_{j\in S_\theta} r_j \cos(\theta_j - \theta)$$
3. Definimos la función $f(\theta) = \left|\sum_{k\in S_\theta} z_k\right|$. Mostrar que f es una función escalonada sobre $[0, 2\pi[$.
4. Definimos la función $\varphi(\theta) = \sum_{j\in S_\theta} r_j \cos(\theta_j - \theta)$. Mostrar que φ es una función continua por pedazos.
5. Si definimos la función $\delta_j(\theta)$ como $\delta_j(\theta) = 1$ si $j \in S_\theta$ y $\delta_j(\theta) = 0$ si $j \notin S_\theta$; mostrar que se tiene la mayoración
$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \geq \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} \cos(\theta_j - \theta)\delta_j(\theta)d\theta.$$
6. Mostrar que si j es un índice, se tiene $j \in S_\theta$ si y solo si $\theta \in [\theta_j - \pi/2, \theta_j + \pi/2]$ $mod(2\pi)$. Más precisamente verificar que
   a) $\delta_j(1)^{-1} = [\theta_j - \pi/2, \theta_j + \pi/2]$ si $\theta_j \in [\pi/2, 3\pi/2]$
   b) $\delta_j(1)^{-1} = [0, \theta_j + \pi/2] \cup [\theta_j + 3\pi/2, 2\pi]$ si $\theta_j \in [0, \pi/2]$
   c) $\delta_j(1)^{-1} = [\theta_j - \pi/2, 2\pi] \cup [0, \theta_j - 3\pi/2]$ si $\theta_j \in [3\pi/2, 2\pi]$
7. Mostrar que se tiene, en cado uno de los casos anteriores la identidad (utilizar la periodicidad de la función coseno):
$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta_j - \theta)\delta_j(\theta)d\theta = \int_{\theta_j-\pi/2}^{\theta_j+\pi/2} \cos(\theta_j - \theta)d\theta = 2$$
8. Verificar que se tiene la estimación
$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \geq 2\sum_{j=1}^{n} |z_j|$$
9. Concluir mostrando que el subconjunto S_θ es el subconjunto buscado.