Series, convergencia

05/04/2014

Ejercicio 1 — Estudio de una serie

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de reales positivos o nulos tales que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge. El objetivo de este ejercicio es estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{x_n}}{n^\alpha} \tag{1}$$

en función de los valores del parámetro $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

1. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz estudiar el caso $\alpha > \frac{1}{2}$.
2. Considerando la sucesión $y_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, mostrar que la serie $\sum_{n\geq 1} y_n$ es divergente.
3. ¿Qué se puede decir de la serie (1) cuando $\alpha = \frac{1}{2}$?

Ejercicio 2 — Comparación de series

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones estrictamente positivas. Suponemos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ diverge y que se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{y_n}\frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}}\right) = \ell.$$

El objetivo de este ejercicio es mostrar que si $\ell > 0$ entonces la serie $\sum x_n$ converge y que si $\ell < 0$ entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

1. Suponiendo que $\ell > 0$ y que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ diverge, mostrar que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$ diverge.
2. Verificar que las cantidades $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ son positivas para un cierto N suficientemente grande y obtener que
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) = +\infty$$
3. Mostrar que $\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) = \frac{x_0}{y_0} - \frac{x_{N+1}}{y_{N+1}}$, obtener una contradicción y deducir que si $\ell > 0$ entonces la serie $\sum x_n$ converge.
4. Suponer ahora que $\ell < 0$ y que la serie $\sum x_n$ converge. Proceder de forma similar, es decir razonando por el absurdo, para obtener el resultado buscado.

Ejercicio 3 — Convergencia de una serie

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales estrictamente positivos que decrece hacia 0. El objetivo de este ejercicio es estudiar la naturaleza de la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n}. \tag{2}$$

1. Si $x_n = \frac{1}{n}$, ¿ cuál es la naturaleza de esta serie?
2. Sea $N \geq 1$ y $m \geq 0$. Mostrar que
$$\sum_{n=N}^{N+m} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{x_N - x_{N+m+1}}{x_N}$$
3. A partir de esta estimación deducir que la suma $\sum_{n=N}^{N+m}\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n}$ es superior o igual a $\frac{1}{2}$ si m es suficientemente grande.
4. Deducir la naturaleza de la serie (2).

Ejercicio 4 — Una estimación

Determinar la parte entera de la suma

$$\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Para ello seguir las siguientes etapas:

1. Mostrar que para $n \geq 2$ se tienen las desigualdades

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} < \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}$$

2. Mostrar que se tiene

$$3\big(\sqrt[3]{10^9+1} - \sqrt[3]{2}\big) < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} < 3\big(\sqrt[3]{10^9} - 1\big)$$

3. Deducir que

$$2997 < \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} < 2998$$

   y obtener la parte entera de esta suma.

Ejercicio 5 — Una desigualdad

Mostrar que existe una constante C tal que para toda serie convergente a términos positivos $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ se tiene la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} x_n. \tag{3}$$

1. Demostrar la desigualdad artimético-geométrica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

   ¿Por qué esta desigualdad no es suficiente para demostrar (3)? Considerar la familia $u_{k,n} = \frac{x_k}{n}$ con $1 \leq k \leq n$ y verificar que si $x_k \neq 0$ entonces $\sum_{n=k}^{+\infty} u_{k,n}$ diverge.

2. Mostrar que se tiene la desigualdad

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} k x_k$$

3. Deducir que se tiene la estimación

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k x_k}{n(n+1)}.$$

4. Mostrar que la familia $(v_{k,n})_{k,n\geq 1}$ determinada por $v_{k,n} = \frac{k x_k}{n(n+1)}$ para $1 \leq k \leq n$ y 0 sino, verifica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=k}^{+\infty} v_{k,n} = x_k$$

   y deducir que esta familia es sumable.

5. Dar el límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ (utilizar la fórmula de Stirling) y obtener que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leq C \sum_{k=1}^{n} v_{k,n}$$

6. Mostrar que se tiene

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq C \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

7. Concluir.