Sucesiones de Cauchy y espacios completos 04/02/2008

Ejercicio 1 — Sucesiones de Cauchy y espacios completos.

Sea el espacio $]0,+\infty[$ dotado de la distancia $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

1. Mostrar que d define una distancia sobre $]0,+\infty[$.
2. Demostrar que esta distancia define sobre $]0,+\infty[$ la misma topología que la topología usual.
3. Demostrar que el espacio métrico $(]0,+\infty[, d)$ no es completo.
4. Restringimos la distancia d al espacio $]0,1]$. Mostrar que $]0,1]$ dotado de esta distancia es completo.

Ejercicio 2 — Espacio funcional completo

Sea X un conjunto cualquiera. Notamos $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : \forall x \in X\ \exists C < +\infty, |f(x)| \leq C\}$). Dotamos a este espacio de una norma definida de la siguiente manera:

$$\forall f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \quad ||f|| = \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

1. Mostrar que dotado de esta norma, $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ es un espacio completo.
   Indicación: recordemos que un espacio de *Banach* es un e.v.n completo. La prueba de completitud de un espacio métrico es clásica y se procede de la siguiente manera:
   - Se considera una sucesión de Cauchy.
   - Se construye su límite eventual.
   - Se verifica que este límite pertenece al conjunto inicial.
   - Se muestra que la sucesión de Cauchy converge hacia este límite.

Ejercicio 3 — Dos resultados del teorema del punto fijo.

1. Sea (E,d) un espacio métrico completo y una aplicación $f : E \to E$. Suponemos la existencia de un entero natural no nulo r tal que la aplicacion f^r (la compuesta r veces de f) es k- contractante $(0 < k < 1)$. Mostrar que f admite un único punto fijo.
2. (Punto fijo a parámetro). Sean (X, d_X) y (E, d_E) dos espacios métricos, suponemos (E, d_E) completo. Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} F : X \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & F(\lambda, x) \end{array}$$

continua, y k-contractante en la segunda variable, es decir

$$\exists k \in]0,1[,\ \forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2, \quad d_E(F(\lambda,x), F(\lambda,y)) \leq k\, d_E(x,y).$$

Mostrar que para todo $\lambda \in X$, la aplicación $F(\lambda,\cdot) : x \mapsto F(\lambda,x)$ admite un único punto fijo, al cual lo notaremos x_λ. Mostrar a continuación que la aplicación $X \to E$ que asocia $\lambda \mapsto x_\lambda$ es continua.

Ejercicio 4 — Densidad.

Sean (E, d_E) y (F, d_F) dos espacios métricos, A una parte de E densa en E.

1. Si una aplicación $f : (A, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ es continua, y si

$$\forall x \in E \setminus A \quad \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) \quad \text{existe},$$

mostrar que existe una única función $g : E \longrightarrow F$, continua, tal que la restricción $g_{|A}$ de g en A sea igual a f.

2. Supongamos ahora que (F, d_F) es completo. Sea $f : (A, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ una aplicación uniformemente continua. Mostrar la existencia de una única función $g : E \longrightarrow F$ uniformemente continua, tal que $g_{|A} = f$.

Ejercicio 5 — Conjuntos.

Sean (E, d_E) y (F, d_F) dos espacios métricos. Suponemos que (E, d_E) es completo. Sean $f : E \longrightarrow F$ continua y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos cuyo diámetro $\delta(E_n)$ tiende a 0.

Mostrar que se tiene la identidad

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n).$$

Ejercicio 6 — Completado de un espacio métrico.

Sea (E, d) un espacio métrico. Notamos $\mathcal{C}$ el conjunto de de sucesiones de Cauchy $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. El objetivo del ejercicio es de sumergir (E, d_E) en un espacio completo cuya distancia prolonga la de E.

1. **a)** Sean $U = (u_n)$ y $V = (v_n) \in \mathcal{C}$. Mostrar que la sucesión $(d(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notamos $\delta(U, V)$ su límite.

   b) Mostrar que δ es simétrica y que verifica la desigualda triangular.

2. Consideramos la relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$ definida por $(U \sim V) \Leftrightarrow (\delta(U, V) = 0)$. Se nota $\hat{E}$ el espacio cociente $\mathcal{C}/\sim$ y $\hat{U}$ la clase de equivalencia en $\hat{E}$ de $U \in \mathcal{C}$.

   a) ¿Cuál es la clase de una sucesión convergente en E?

   b) Mostrar que si $U \sim U'$ y $V \sim V'$, entonces $\delta(U, V) = \delta(U', V')$. Cuando $\hat{U}$, $\hat{V} \in \hat{E}$, el número real $\delta(U, V)$ es entonces independiente de la elección de los representantes de U y V de $\hat{U}$ y $\hat{V}$. Lo notamos $\delta(\hat{U}, \hat{V})$.

   c) Demostrar que, siendo definida de esta manera, δ es una distancia sobre $\hat{E}$.

   d) Desmotrar que existe una inyeccción natural $i : E \to \hat{E}$, isométrica, y que $i(E)$ es denso en $\hat{E}$.

3. Mostrar que $\hat{E}$ es completo.

4. Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) dos espacios métricos completos tales que existe una isometría i_1 (resp. i_2) de E en E_1 (resp. en E_2), donde $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) es denso en E_1 (resp. en E_2). Mostrar la existencia de una única isometría φ de E_1 en E_2, biyectiva y que verifica $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ para todo $x \in E$.