Series, sucesiones, convergencia

25/07/2014

Ejercicio 1 — Estudio de series

Para las series a continuación, cuyo término general está dado por las expresiones siguientes, mostrar la convergencia y determinar su límite.

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\quad b_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} 3k+1}{\sum_{k=0}^{n} 2k+3}$, $\quad c_n = (3+\sin(n))^{\frac{1}{n}}$.

2. $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$, $\quad e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$, $\quad f_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})$.

Ejercicio 2 — Sucesiones Adyacentes

Dos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *adyacentes* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y se tiene $u_n - v_u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mostrar que las siguientes sucesiones son adyacentes:

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$, $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$, $n \geq 3$.

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha k!}$, $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{\alpha+1} n!}$, con $n \geq 1$ y $\alpha > 0$.

Ejercicio 3 — Sucesiones recurrentes

Estudiar las sucesiones definidas por

1. $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}$, para $n \in \mathbb{N}$ y $u_0 = 1$.
2. $u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)}$, para $n \in \mathbb{N}$ y $u_0 > 0$.
3. $u_{n+1} = 1 + (-1)^n\sqrt{1+u_n}$, para $n \in \mathbb{N}$ y $u_0 \in]-1, 0[$.
4. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1+\cdots+\sqrt{u_0}}}}$, para $n \in \mathbb{N}$ y $u_0 > 0$.

Ejercicio 4 — Promedios de Césaro

Sea $(a_n)_{n\geq1}$ una sucesión a valores reales. Definimos $(b_n)_{n\geq1}$ la sucesión de los promedios de Césaro por medio de la expresión

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Mostrar que si la sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ converge hacia un límite ℓ, entonces $(b_n)_{n\geq1}$ converge hacia el mismo límite. ¿Se tiene la recíproca?

Ejercicio 5 — Una sucesión

Mostrar que la sucesión de término general

$$\frac{n\,n!}{(s+1)\cdots(s+n)}$$

es acotada si y solo si $s \leq 1$.

Ejercicio 6 — Otra sucesión

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Mostrar que se tiene la implicación siguiente: (u_n/n) acotada implica (u_n/n) converge.