Sucesiones, monotonía, subsucesiones 10/04/2010

Ejercicio 1 — Convergencia y limite

1. Para las sucesiones siguientes, mostrar la convergencia y encontrar su límite:

   a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   b) $x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(5k+1)}{\sum_{k=1}^{n}(3k+2)}$

   c) $x_n = (4 + \sin(n))^{1/2n}$

2. En las siguientes sucesiones, determinar su límite.

   a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $x_0 \in \mathbb{C}$ y $x_{n+1} = \frac{1}{4}(5x_n + 2\overline{x}_n)$.

   b) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $y_0 \in \mathbb{C}^*$ y $y_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + |y_n|)$.

3. Sean $N \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ y $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}_+^*$. Mostrar:
   a) $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i^k\right)^{1/k} = \max\limits_{1\leq i\leq N} x_i$
   b) $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i^{-k}\right)^{-1/k} = \min\limits_{1\leq i\leq N} x_i$

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $b^2 - 4ac < 0$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que:
$$ax_n^2 + bu_ny_n + cy_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Mostrar que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores en $\mathbb{R}_+^*$ tal que
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Mostrar que $(x_n)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

6. Usando la estimación $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}_+$, mostrar la existencia del límite
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$$
   y calcular el valor de este límite.

7. En función del parámetro fijo $a \in \mathbb{R}_+^*$, encontrar el valor del límite
$$\lim_{n\to+\infty} [a^n]^{1/n}$$
   en donde $[a]$ es la parte entera de a (el entero N tal que $N \leq a < N+1$).

8. En las siguientes sucesiones, determinar su límite.

   a) $u_0 \in \mathbb{C}$, y para $n \geq 0$: $u_{n+1} = \frac{1}{n+3}\left(nu_n - \frac{1}{n+1}\right)$
   b) $u_1 \in \mathbb{C}$, y para $n \geq 1$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$
   c) $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$, y para $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$

d) $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$, y para $n \geq 1$: $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$

9. Para las siguientes sucesiones, mostrar la convergencia y determinar su límite.
   a) $x_n = \frac{\cos(n)}{n}$

   b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

   c) $x_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

   d) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$
10. Mostrar por recurrencia que se tiene, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$ la identidad

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} z^j.$$

Utilizar este resultado para mostrar que, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, se tiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

Ejercicio 2 — Sucesiones monotonas

A toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales tal que $x_0 = 1$, se le asocia la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$y_n = \sum_{k+1}^{n} \left(1 - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \frac{1}{x_k}$$

1. Mostrar que $y_n \in [0, 1]$.
2. Mostrar que y_n converge.
3. Sea $c \in [0, 1[$ un real fijo. Encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} y_n = c$.

Ejercicio 3 — Sistema dinamico perturbado

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de reales tal que $x_{n+1} - x_n - x_n^2$ tiende hacia cero. Mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia cero.

Indicación: estudiar el límite inferior y superior.

Ejercicio 4 — Estudio de una sucesion

Estudiar la sucesión $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^n$.

Indicaciones: recordar que $(1 - \frac{p}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-p}$ *y que* $\ln(1 + x) \leq x$ *para todo* $x > -1$.

* Ejercicio 5 — Estudio de un sistema dinamico

Sea $\lambda \in]0, 1]$. El objetivo de este ejercicio es estudiar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_0 \in]0, 1[$ y para $n \in \mathbb{N}$ por $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$.

1. Considerar la función $f(x) = 1 - \lambda x^2$ y mostrar que el intervalo $]0, 1[$ es estable por f. Deducir que x_n pertenece a $]0, 1[$.
2. Mostrar que f es decreciente sobre $]0, 1[$ y que $f \circ f$ es creciente sobre $]0, 1[$. Deducir que las sucesiones $(x_{2n})_{n\geq1}$ y $(x_{2n+1})_{n\geq0}$ son monótonas y convergentes.
3. Verificar que
$$(f \circ f)(x) - x = (-\lambda x^2 - x + 1)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda)$$
Mostrar que $f(x) - x$ admite un solo punto fijo en $[0, 1]$ (es decir resolver la ecuación $f(x) - x = 0$).
4. Si $\lambda = \frac{3}{4}$, mostrar que las sucesiones $(x_{2n})_{n\geq1}$ y $(x_{2n+1})_{n\geq0}$ convergen hacia un mismo límite.
5. Concluir (es decir, encontrar el límite de la sucesión x_n en el caso cuando $\lambda = \frac{3}{4}$). ¿Qué sucede si $\lambda \neq \frac{3}{4}$?