Sucesiones, monotonía, subsucesiones 05/03/2014

Ejercicio 1 — Estudio de una sucesión

El objetivo de este ejercicio es estudiar la monotonía de la sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ de término general

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_k^n \ln(k)$$

Se trata entonces de decir si la sucesión es creciente, decreciente, etc. Para ello seguir las siguientes etapas.

1. Verificar que $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$ y que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n = 0$.
2. Mostrar que se tiene la relación $u_{n+1} = u_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(k+1)$.
3. Para todo $x > 0$ notamos $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(x+k)$. Calcular $f'(x)$.
4. Consideramos la fracción $F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_k^n}{X+k}$. Verificar que $F(X)$ puede escribirse como
$$F(X) = \frac{\mathbb{P}(X)}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$
en donde $\mathbb{P}$ es un polinomio de grado menor o igual a n.
5. Sea $0 \leq k \leq n$. Multiplicando ambos lados de la fórmula precedente por $(X+k)$ y evaluando en $-k$ mostrar que se tiene la expresión
$$(-1)^{k+1}C_k^n = \frac{\mathbb{P}(-k)}{(-k)(-k+1)\cdots(-k+k-1)(-k+k+1)\cdots(-k+n)} = \frac{\mathbb{P}(-k)}{(n-k)!(-1)^k(k!)}$$
y deducir que $\mathbb{P}(-k) = -n!$ para todo $0 \leq k \leq n$. Obtener que $\mathbb{P} = -n!$.
6. A partir de la pregunta anterior deducir que la función f es decreciente sobre $]0, +\infty[$.
7. Mostrar que la función f puede escribirse como
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_k^n \ln(1 + k/x)$$
(usar la primera pregunta).
8. Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y deducir que la función $f(x)$ es estrictamente positiva.
9. Deducir la monotonía de la sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$.

Ejercicio 2 — Estudio de una sucesión recurrente

En este ejercicio se desea encontrar una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ de reales tal que para todo $n \geq 1$ se tenga $u_n u_{n+1} = n$ y tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

1. Comprobar que los datos u_1 y $u_n u_{n+1} = n$ determinan la sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ de manera única. Esto muestra que para encontrar una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ con las características deseadas, solo basta determinar u_1.
2. Mostrar que se tiene
$$u_{2n} = \frac{2n-1}{4^{n-1}}C_{n-1}^{2(n-1)}u_2 \quad \text{y} \quad u_{2n+2} = \frac{2n+1}{4^n}C_n^{2n}u_2$$
3. Mostrar que
$$u_{2n+1} = \frac{4^n}{C_n^{2n}}u_1$$

4. Usando la fórmula de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ verificar que

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \sim \frac{2}{\pi u_1^2} \quad \text{y que} \quad \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \sim \frac{\pi u_1^2}{2}$$

5. Encontrar las sucesiones que verifican estas condiciones.

Ejercicio 3 — Límite de una sucesión

A toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales tal que $x_0 = 1$, se le asocia la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \frac{1}{x_k}$$

1. Mostrar que $y_n \in [0, 1]$.
2. Mostrar que y_n converge.
3. Sea $c \in [0, 1[$ un real fijo. Encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = c$.

Ejercicio 4 — Sistema dinámico perturbado

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de reales tal que $x_{n+1} - x_n - x_n^2$ tiende hacia cero. Mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia cero. Para ello seguir las siguientes etapas:

1. Notamos X_u el conjunto de valores de adherencia de la sucesión, ℓ y L los límites inferiores y superiores de la sucesión. Mostrar que si $u_{\varphi(n)}$ es una subsucesión que tiende hacia L, entonces $u_{\varphi(n)+1}$ tiende hacia $L^2 + L$. Deducir que $L = 0$.
2. Sea $a_n = u_n + u_n^2$, verificar que $X_u = X_a$. Deducir que existe una subsucesión $a_{\varphi(n)}$ tal que $a_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)}^2$ tiende hacia ℓ.
3. Verificar que $\ell \geq -1/4$.
4. Suponiendo que $u_{\varphi(n)} \geq -1/2$, expresar $u_{\varphi(n)}$ en función de $a_{\varphi(n)}$.
5. Deducir que $\ell \leq \frac{-1+\sqrt{1+4\ell}}{2}$ y obtener que $\ell = 0$.
6. Concluir.