Ejercicios varios (integrales, límites, sucesiones) 31/12/2009

Ejercicio 1 — Polinomios.

Sea $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $n \in \mathbb{N}$, un polinomio de indeterminada X. Definimos las cinco aplicaciones siguientes de $\mathbb{C}[X]$ (conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ de indeterminada X) en $\mathbb{R}^+$.

$$N_0(P) = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|, \qquad N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad N_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|,$$
$$N_3(P) = \sup\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, \quad N_4(P) = \int_0^1 |P(t)|dt.$$

1. Mostrar que estas aplicaciones son normas de $\mathbb{C}[X]$.
2. Mostrar que N_0, N_1, N_2, N_4 son dos a dos no equivalentes de igual forma que N_0, N_2, N_3, N_4.

Indicación: Considerar los polinomios $P_n = X^n$, $P_n = 1 + X + ... + X^n$ *y* $Q_n = X^n - X^{n+1}$.

Ejercicio 2 — Integral y cambio de variable.

Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))dx.$$

Indicación: utilizar la identidad $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

Ejercicio 3 — Limite.

Determinar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} x \exp\left(-\int_0^x \frac{dt}{3 + \sqrt{t^2 + 4t}}\right).$$

Indicación: hacer el cambio de variable $t = 2ch(\theta) - 2$.

Ejercicio 4 — Desigualdad.

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Definimos:

$$\alpha = \min_{t\in[0,1]} f(t) \quad ; \quad \beta = \max_{t\in[0,1]} f(t).$$

Mostrar que se tiene la siguiente desigualdad $\int_0^1 f^2(t)dt \leq -\alpha\beta$.

Indicación: considerar $0 \leq (f - \alpha)(\beta - f)$.

Ejercicio 5 — Sucesion.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números reales tal que $a_0 = 1$. Definimos:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}.$$

Mostrar que $b_n \in [0, 1]$.

Ejercicio 6 — Parte entera.

Determinar la parte entera de

$$\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Indicación: comparar la suma con una integral.

Ejercicio 7 — Limite e integral.

Para todo $n \geq 1$ definimos $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Determinar el valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   Indicación: considerar $n \geq 2$ y encuadrar $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ entre dos integrales.

2. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

   Indicación: calcular nu_n y verificar que $u_n = \ln \frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

Ejercicio 8 — Mas sucesiones.

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida por:

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

1. ¿Bajo qué condiciones sobre el valor de u_n, la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida?
2. Sea $f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$. Estudiar el comportamiento de f.
3. Mostrar que
$$f(x) - x = \frac{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{2-\sqrt{x}}.$$
4. Sea $g(x) = f(x) - x$. Estudiar el signo de $g(x)$.
5. Observando que la monotonía de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está dada por el signo de la función g, determinar el límite de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en los siguientes casos:

$$(i)\ u_n \in [0,1[, \quad (ii)\ u_n = 1, \quad (iii)\ u_n \in]1; \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}[,$$

$$(iv)\ u_n = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad (v)\ u_n \in]\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 4[.$$

Ejercicio 9 — Sucesiones adyacentes.

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que:

$$0 < v_0 < u_0 \qquad y \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Mostrar que:

1. Las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son positivas.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $v_n < u_n$.
3. La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.
4. ¿Estas dos sucesiones tienen el mismo límite?

Ejercicio 10 — Otra desigualdad.

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones positivas y continuas tales que

$$f(x)g(x) \geq 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Mostrar que

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \geq 1.$$

Ejercicio 11 — Un calculo.

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} E[\sqrt{k}]$$

en donde $E[\cdot]$ es la función parte entera.

Ejercicio 12 — Naturaleza.

El objetivo de este ejercicio es el de determinar la naturaleza[1] de la serie $\sum_{n\geq 1} f(n)$ en donde $f(n) = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

1. Mostrar que se tiene la identidad:

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt.$$

2. Mostar que las series $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} f(t)dt$ y $\sum_{n\geq 1} f(n)$ son de la misma naturaleza.
3. ¿Cual es la naturaleza de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$?

Ejercicio 13 — EDO.

Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' + y = 2e^x + 4\sin(x) + 3\cos(x).$$

[1] convergente o divergente