Funciones de varias variables 09/07/2010

Ejercicio 1 — Continuidad

El objetivo de este ejercicio es estudiar la prolongación de una función por continuidad. Para esto se pide estudiar la existencia y el valor eventual de un límite en $(0,0)$ (punto llamado "especial") para las funciones f siguientes, para las cuales se da $f(x,y)$:

1. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$.

   Indicación: Considerar $f(u(t))$ con $u(t)=(0,t)$.

2. $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$.

   Indicación: Considerar $f(u(t))$ con $u(t)=(t,0)$ y $(t,t^{\frac{3}{2}})$ (cuidado con el signo de t en la expresión $t^{\frac{3}{2}}$).

3. $\dfrac{x^4y^3}{x^6+y^8}$.

   Indicación: Considerar la notación $X=|x|^3$, $Y=y^4$, luego $\rho=(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$ y mostrar que $|f(x,y)|\leq g(\rho)$ donde $g(\cdot)$ debe ser explicitada.

4. $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$.

   Indicación: Considerar $f(u(t))$ con $u(t)=(t,0)$ y $(t,-t+t^2)$

5. $\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{|xy|}\right)}{|y|}$.

   Indicación: Este ejercicio es más delicado, utilizaremos una función equivalente a la función $\cos(\cdot)$ alrededor de 0. Seguir los pasos siguientes:

   a) Mostrar con la ayuda de un desarrollo de orden 2 de la fórmula de Taylor-Lagrange que $(1-\cos t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^2}{2}$.

   b) Deducir que existe $\alpha>0$ tal que $\forall t\in]-\alpha,\alpha[$, $0\leq 1-\cos t\leq t^2$.

   c) Considerar una pareja $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tal que $|x|<\alpha$ y $|y|<\alpha$ aplicar la última desigualdad para encontrar un mayorante de $|f(x,y)|$

   d) Demostrar que tiende a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, es decir queremos demostrar que esta función <u>es prolongable por continuidad en 0</u>.

* Ejercicio 2 — Derivadas parciales primeras (dpp)

Para las funciones siguientes $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ estudiar la continuidad de f, y la existencia y continuidad de las derivadas parciales de f.

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   Indicaciones: Esta función es $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ (abierto) gracias a los teoremas generales, entonces el único punto especial es el origen.

   Continuidad de f: Intentar varios caminos $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ y verificar que los límites son iguales. Luego utilizar $\sin t\underset{t\to 0}{\sim}t$ para encontrar un mayorante de $|f(x,y)-f(0,0)|$ para $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ y mostrar su continuidad en 0.

Existencia de las ddp: Definir las funciones parciales $f(x,0)$ y $f(0,y)$ y utilizando la definición de derivada (es decir, $\lim\limits_{x\to 0}|f(x,0)-f(0,0)|/x$) mostrar que en $(0,0)$ las dpp existen y valen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$.

Continuidad de las ddp: Calcular les derivadas parciales para $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ y para $(x,y)=(0,0)$. Para estudiar la continuidad consideraremos las aplicaciones parciales (técnica muy práctica que hay que dominar) $\frac{\partial f}{\partial x}(u(t))$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(u(t))$, para mostrar que estas dpp no son continuas.

2. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

   Indicaciones: Los puntos especiales de esta función se encuentra en el conjunto $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$, en el exterior de este conjunto la función es $\mathcal{C}^1$, es decir, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})$ (justificar). Una vez más encontramos que el origen $(0,0)\in U$ es un punto especial que merece un tratamiento particular, el origen será muy importante en el estudio de la existencia y continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

   Continuidad de f: No olvidar que en este caso no tenemos solamente un punto especial sino un conjunto y que la continuidad debe ser verificada sobre todo U. Para esto, en lugar de considerar solamente $|f(x,0)-f(0,0)|$ (lo que demostraría la continuidad en el origen solamente) debemos considerar $|f(x,y_0)-f(0,y_0)|$ para $y_0\in\mathbb{R}$.

   Existencia de las ddp: La derivada parcial en y no es complicada, para la derivada parcial en x consideraremos para $y_0\in\mathbb{R}$ la aplicación parcial:

$$\begin{array}{rccl} f(\cdot,y_0): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\dfrac{y_0}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}$$

   esta función es una función de UNA variable. Tener especial cuidado en el caso $y_0=0$. En este ejercicio es necesario explicitar el dominio de definición de las dpp.

   Continuidad de las ddp: Calcular las derivadas parciales para $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus U$ y para $(x,y)\in U$ donde f admite derivadas parciales. Utilizando $u(t)$ adecuadas (por ejemplo, (t,t) para la derivada en x y (t^2,t) para la derivada en y) se podrá demostrar facilmente que los límites de las dpp no están definidos en los puntos de U donde f admite ddp.

Ejercicio 3 — Derivada de una función compuesta

En este ejercicio se pide calcular las derivadas primeras de una función compuesta.

1. Función compuesta de una variable real. Sean las funciones siguientes:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^4\end{array} \qquad \begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & t & \longmapsto & h(t)=(h_1(t),h_2(t))=(t^3,\, e^t-t^2),\end{array}$$

   definimos $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$ para $x\in\mathbb{R}$. Calcular, utilizando la fórmula de derivación de una función compuesta,

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

   y confirmar los cálculos explicitando la función $f(\cdot)$.

2. Función compuesta de dos variables reales. Sean las funciones siguientes:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y,z) & \longmapsto & x+yz\end{array} \qquad \begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{aligned} h(u,v) &= (h_1(u,v),h_2(u,v),h_3(u,v))\\ &= (uv,\, u+v,\, u-v),\end{aligned}\end{array}$$

   definimos $f(x,y)=(g\circ h)(x,y)=g(h(x,y))$ para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. calcular, utilizando la fórmula de derivación de una función compuesta,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

y confirmar los cálculos explicitando la función $f(\cdot,\cdot)$.

Ejercicio 4 — Un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo

Se propone demostrar que la función f siguiente es un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x^3+3xe^y,\, y-x^2) \end{array}$$

Indicaciones: Para mostrar que su matriz Jacobiana $J_f(x,y)$ es inversible, será suficiente mostrar que su determinante es siempre positivo (es decir, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; det(J_f(x,y)) > 0$). Luego para verificar la biyectividad de f considerar el sistema de ecuaciones:

$$f(x,y) = (X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X & = & x^3+3xe^y \\ Y & = & y-x^2 \end{array} \right. \tag{1}$$

y estudiando la función $\phi : x \longmapsto 3e^Y xe^{x^2} + x^3 - X$ mostrar que (1) admite una solución única. Para esto se estudiará la monotonía de ϕ y sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. ¿ Por qué la biyectividad de ϕ implica la de f?

Ejercicio 5 — Extremos

Determinar los extremos locales et globales de las aplicaciones f siguientes, para las cuales se da el conjunto de salida y de llegada.

1. $\mathbb{R}^2$, $y^2 - 3x^2y + 2x^4$
   Indicación: Verificar que en el (solamente hay uno) punto crítico (x_0, y_0) de esta función tenemos $s^2 - rt = 0$. Vamos entonces, para determinar si este punto es un extremo local o global, a considerar (es del punto (h,k) que hablamos) $(h,0)$ y el vector $(h, \frac{3}{2}h^2)$ y estudiar el signo de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$, ¿es un extremo local?

   Por otro lado, calcular el límite cuando $x \to +\infty$ para las funciones $x \longmapsto f(x,0)$ y $x \longmapsto f(x, \frac{3}{2}x^2)$, ¿la función f admite extremo global?

2. $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

   Indicación: Determinar la naturaleza del único punto crítico de esta función, luego considerar la función $x \longmapsto f(x,x)$ y estudiarla cuando $x \to +\infty$ y $x \to 0^+$.

3. $\mathbb{R}^2$, $x^3 + y^3 - 9xy + 27$
   Indicación: ¿Cuál es la naturaleza de estos puntos críticos? considerar $x \longmapsto f(x,0)$, ¿es mayorada o minorada? ¿f admite entonces un extremo global?