Valores extremos, optimización

21/12/2010

Ejercicio 1 Puntos críticos

Sean a, y b dos reales no nulos. Consideremos la función definida por $\phi(x,y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$

1. Mostrar que para todo valor de a y b el punto $(0,0)$ es un punto crítico de ϕ.
2. Mostrar que ϕ tiene 4 puntos críticos adicionales, que dependen de los valores de a, y de b.
3. Clasifique todos los puntos críticos de ϕ.

* Ejercicio 2 Elipse de área mínima

Determine cuáles son los valores de a y de b tales que la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ tenga la menor área posible, pero conteniendo al círculo $x^2 + y^2 = 2y$.

Ejercicio 3 Distancia de plano al origen

Consideremos el plano de ecuación $x + 2y + 3z = 3$. Determine la distancia del origen al plano:

1. Usando un argumento geométrico.
2. Reduciendo el problema a un problema de dos variables.
3. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejercicio 4 Continuidad y derivadas parciales

Sean a, b dos reales no nulos. Para $(x,y) \neq (0,0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3 + ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}$$

1. Evalúe los límites
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$
y concluya que si $a \neq b$ entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.
2. En el caso en que $a = b$, demuestre que es posible definir $f(0,0)$ de modo que la función f sea contínua en todo $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(0,0)$? Justifique.
3. Siempre en el caso en que $a = b$, y considerando el prolongamiento por continuidad de f definido en el literal precedente, demuestre que
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 1 = -\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

Ejercicio 5 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

1. Determine el máximo y el mínimo de la expresión $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ sabiendo que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.
2. Utilice lo anterior para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, a saber:
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$