Topología sobre los espacios métricos y los espacios vectoriales normados

04/02/2008

1. Generalidades

1.1. Normas y Distancias

Definición 1 (Norma) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y notemos x un elemento de E. Una* norma *es una función $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow [0, +\infty[$ que verifica las propiedades:*

(N.1) $\|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$ *(separabilidad)*

(N.2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K},$ *(homogeneidad)*

(N.3) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ *para todo* $x, y \in E$ *(desigualdad triangular).*

Notaremos a los espacios vectoriales normados $(E, \|\cdot\|_E)$.

Observación 1 Cuando solamente las propiedades *(N.2)* y *(N.3)* de la definición anterior son verificadas, se dice que la aplicación $\|\cdot\|_E$ es una *semi-norma*.

Definición 2 (Distancia) *Un espacio métrico (E, d_E) está dado por un conjunto E dotado de una aplicación $d_E : E \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ llamada* distancia *o* métrica *que verifica los siguientes puntos:*

(D.1) *para todo* $x, y \in E$, $d_E(x, y) = d_E(y, x)$ *(propiedad de simetría),*

(D.2) $d_E(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$ *(separabilidad),*

(D.3) *para todo* $x, y, z \in E$: $d_E(x, y) \leq d_E(x, z) + d_E(z, y)$ *(desigualdad triangular).*

Observación 2 Todo espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio métrico dotado de la *distancia inducida* por la norma $\|\cdot\|_E$ determinada por la fórmula $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$.

El espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ estará siempre dotado de la distancia inducida.

1.2. Diámetro de una parte, distancia entre dos partes.

Definición 3 *Sea (E, d_E) un espacio métrico. Si $A \subset E$ es un subconjunto no vacío de E definimos el* diámetro *de A como el elemento de $[0, +\infty]$ dado por:*

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A \times A} d_E(x, y).$$

Se dice que A es acotado *si $\delta(A) < +\infty$.*

Definición 4 *Sean A y B dos partes no vacías de un espacio métrico (E, d_E). Se llama distancia de A a B al real*

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d_E(x, y).$$

Cuando x es un elemento de E, se llama distancia de x a A al real

$$d(x, A) = d(\{x\}, A) = \inf_{y \in A} d_E(x, y).$$

1.3. Bolas y esferas

Definición 5 *Sea (E, d_E) un espacio métrico. Para todo $x \in E$ y para todo real $r > 0$, se llama:*

- bola abierta *de centro x de radio r el conjunto $B(x, r) = \{y \in E : d_E(x, y) < r\}$,*
- bola cerrada *de centro x de radio r el conjunto $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d_E(x, y) \leq r\}$,*
- esfera *de centro x de radio r el conjunto $S(x, r) = \{y \in E : d_E(x, y) = r\}$.*

Proposición 1 *Sean (E, d_E) un espacio métrico, A una parte de E y $x \in E$. El conjunto A es acotado si y solamente si existe un real $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.*

1.4. Topología de un espacio métrico

Definición 6 (Topología) *Una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de un conjunto E define una topología sobre E si las tres condiciones son verificadas:*

(T.1) El conjunto vacío $\emptyset$ así como el conjunto E pertenecen a $\mathcal{T}$,

(T.2) La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$,

(T.3) La reunión cualquiera de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Los elementos de $\mathcal{T}$ son llamados conjuntos abiertos, sus complementarios son llamados cerrados y el espacio $(E, \mathcal{T})$ es llamado espacio topológico.

Definición 7 (Vecindades) *Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se llama* vecindad *de un elemento x de E toda parte V de E que contenga un abierto que contenga x. El conjunto de vecindades de x es notado $\mathcal{V}(x)$.*

Definición 8 *Un espacio topológico E se dice* separado *si para todos los elementos $x, y \in E$, $x \neq y$, existe $V \in \mathcal{V}(x)$ y $W \in \mathcal{V}(y)$ tales que $V \cap W = \emptyset$.*

Observación 3 Todo espacio métrico es un espacio topológico dotado de una topología *natural* inducida por la distancia. Esta topología se define por medio de las bolas abiertas de la definición 5.

$\boxed{\text{Un espacio métrico } (E, d_E) \text{ estará siempre dotado de su topología natural.}}$

Definición 9 (Adherencia) *La* adherencia *de una parte de A de E, notada $\overline{A}$, es el más pequeño conjunto cerrado que contiene a A.*

Proposición 2 *Sea (E, d_E) un espacio métrico dotado de su topología natural y sea A una parte de E. Un elemento x de E pertenece a $\overline{A}$ si y solamente si unas de las siguientes afirmaciones es verificada:*

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$, $d_E(a, x) < \varepsilon$.

ii) Para toda vecindad V de x, $V \cap A \neq \emptyset$.

iii) $d_E(x, A) = 0$.

Definición 10 (Densidad) *Una parte de A de E se dice* densa *en E si $\overline{A} = E$.*

Definición 11 (Interior) *Sea (E, d_E) un espacio métrico. El* interior *de una parte A de E, notada $\overset{\circ}{A}$, es el más grande abierto contenido en A.*

Proposición 3 *Sea A una parte de E y un elemento x de A. Se tiene que $x \in \overset{\circ}{A}$ si y solamente si una de las siguientes afirmaciones es verificada:*

i) A es una vecindad de x.

ii) Existe un real $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Definición 12 (Frontera) *La* frontera *de una parte A de E, es el conjunto $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Se la nota $Fr(A)$ o ∂A.*

Definición 13 *Sea (E, d_E) un espacio métrico y sea A una parte de E.*

- *Se dice que $x \in E$ es un* punto de acumulación *de A si para toda vecindad V de x, $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \{x\}$, lo que también se escribe como*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \ y \ \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}.$$

- *Se dice que $x \in A$ es un* punto aislado *de A si existe una vecindad V de x tal que $V \cap A = \{x\}$, lo que se escribe también como*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}.$$

Observación 4 *Si x es un punto de acumulación de A, entonces $x \in \overline{A}$ y además para todo $\varepsilon > 0$, la bola $B(x, \varepsilon)$ contiene una infinidad de puntos de A.*

Sea (E, d_E) un espacio métrico y $A \subset E$. Una manera natural de hacer de A un espacio métrico considerando la restricción de la distancia d_E de E a $A \times A$.

Proposición 4 *Sea (E, d_E) un espacio métrico y sea A una parte de E.*

- *Los abiertos de A son los conjuntos de la forma $\Omega \cap A$, en donde Ω es un abierto de E.*

- *Los cerrados de A son los conjuntos de la forma $F \cap A$, con Ω un cerrado de E.*

- *Si $x \in A$, las vecindades de x en A son los conjuntos de la forma $V \cap A$, donde V es una vecindad de x en E.*

1.5. Límites y Continuidad

Definición 14 (Límites) *Sean (E, d_E) y (F, d_F) dos espacios métricos, sea f una aplicación de E en F y sea A un subconjunto de E. Sean $x_0 \in \overline{A}$ y $y_0 \in F$, diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \in A$ tiende o converge hacia x_0 es igual a y_0 y lo notaremos*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0,$$

si para cada vecindad W de y_0, existe una vecindad V de x_0 tal que $f(V \cap A) \subset W$. Nótese en particular que si el límite existe, es único.

Definición 15 (Continuidad en un punto) *Sea $f : (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ una aplicación. Diremos que f es continua en x_0 si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0).$$

Es equivalente decir que la imagen recíproca de toda vecindad de $f(x_0)$ es una vecindad de x_0. En términos de ε y δ esta definición se escribe:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_x > 0)(\forall x \in E) : d_E(x, x_0) \leq \delta_x \Longrightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Diremos que f es continua sobre E, o simplemente continua, si es continua en cada uno de los puntos de E.

Proposición 5 *Sean (E, d_E), (F, d_F) y (G, d_G) tres espacios métricos y dos aplicaciones $f : E \to F$ y $g : F \to G$. Si f es continua en $x_0 \in E$ y g es continua en $f(x_0) \in F$, entonces la aplicación $g \circ f : E \to G$ es continua en x_0.*

Proposición 6 *Sea $f : E \to F$ una aplicación. Las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f es continua sobre E.

ii) La imagen recíproca por f de todo abierto es un abierto de E, es decir, para todo B abierto de F el conjunto $\{x \in E : f(x) \in B\}$ es un abierto de E.

iii) La imagen recíproca por f de todo cerrado es un cerrado de E, es decir, para todo C cerrado de F el conjunto $\{x \in E : f(x) \in C\}$ es un cerrado de E.

Observación 5 Cuando la imagen por f de todo abierto es un abierto, se dice que f es una aplicación abierta. Una aplicación continua no es necesariamente una aplicación abierta. De igual manera, la imagen por una aplicación continua de un cerrado no es necesariamente un cerrado.

Observación 6 Sea $f : D \subset E \longrightarrow F$ una función. Si f no está definida en x_0 y si se tiene

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y_0$$

para un y_0 en F, entonces la función g definida sobre $D \cup \{x_0\}$ por $g(x) = f(x)$ sobre D y $g(x_0) = y_0$ es continua en x_0 y es llamada la *prolongación por continuidad* de f en x_0.

Definición 16 *Sean $f : D \subset (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ y $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. Se dice que*

- *f es* continua por la derecha *en x_0 si* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$,

- *f es* continua por la izquierda *en x_0 si* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Se dice que f presenta una discontinuidad de primera especie *en x_0 si $y_i = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ y $y_d = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existen, y si $y_i \neq y_d$.*

Definición 17 (Homeomorfismos) *Sea una aplicación $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$. Se dice que f es un* homeomorfismo *si f es biyectiva, continua y si f^{-1} es continua.*

Observación 7 Una aplicación puede ser continua y biyectiva sin que la aplicación recíproca lo sea. Bajo ciertas hipótesis de compacidad, es igualmente posible concluir la continuidad de la aplicación recíproca.

Definición 18 (Equivalencia de distancias y de normas)

- *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un mismo e.v. E son* equivalentes *si existen dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para todo $x \in E$,*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1.$$

- *Dos distancias d y d' sobre E son* equivalentes *si existen dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para todo $x, y \in E$, $C_1\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2\, d(x, y)$.*

Observación 8

- Dos normas equivalentes inducen dos distancias equivalentes.

- Sobre un e.v. de dimensión finita todas las normas son equivalentes (teorema).

Definición 19 (Convergencia simple) *Sean (E, d_E) y (F, d_F) dos espacios métricos, sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones de E en F y sea A un subconjunto de E. Diremos que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplemente sobre A hacia f si*

$$(\forall x \in A)\, (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N_{\varepsilon,x},\ \forall n \in \mathbb{N}) \ :\ n \geq N_{\varepsilon,x} \Longrightarrow d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Definición 20 (Aplicaciones uniformemente continuas) *Sean* (E, d_E) *y* (F, d_F) *dos espacios métricos y sea* f *una aplicación de* E *en* F*. Decimos que* f *es uniformemente continua si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E) : \; d_E(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Observación 9

- Una función uniformemente continua es continua, el matiz del concepto es que una función *uniformemente* continua verifica $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todas las parejas $(x, y) \in E \times E$ tales que $d_E(x, y) < \delta$, donde δ es independiente de x, mientras que para una función continua el parámetro δ depende de x. La uniformidad de este $\delta > 0$ para una función uniformemente continua f hace de ella una función de fácil empleo. Así, ciertos teoremas son verdaderos para las funciones uniformemente continuas pero no para todas las funciones continuas.

- Cuidado! La continuidad uniforme no es una noción topológica. Dicho de otra manera, no basta con definir solamente la topología de E y F para definir la continuidad uniforme.

Definición 21 *Sean* (E, d_E) *y* (F, d_F) *dos espacios métricos, sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de aplicaciones de* E *en* F *y sea* A *un subconjunto de* E*. Diremos que la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre* A *hacia* f *si*

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists N_\varepsilon, \, \forall n \in \mathbb{N}) : \; n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow (\forall x \in A) \; d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

La expresión anterior es equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists N_\varepsilon, \, \forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{x\in A} d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Definición 22 (Aplicación lipschitziana) *Sean* (E, d_E) *y* (F, d_F) *dos espacios métricos y sea* f *una aplicación de* E *en* F*. Si para todo* $x, y \in E$ *existe una constante* $k > 0$ *tal que*

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y),$$

entonces diremos que la aplicación f *es* k*-lipschitziana. En particular si* $0 < k < 1$ *diremos que* f *es contractante.*

Recuérdese que una aplicación k-lipschitziana es uniformemente continua y por lo tanto continua, pero que no se tienen las implicaciones recíprocas.

$$\boxed{k\text{-lipschitz} \Longrightarrow \text{uniformemente continua} \Longrightarrow \text{continua}}$$

1.6. Producto de espacios métricos

Nos damos un número finito de espacios métricos $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ y ponemos $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Vamos a hacer de E un espacio métrico. Un forma natural de hacerlo es construyendo una distancia d_E a partir de las distancias d_i. Podemos, por ejemplo, definir para $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ en E, $d_E(x, y) = \sup\limits_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$. Así definida, esta distancia se llama *distancia producto sobre* E. Salvo mención de lo contrario, es esta distancia que utilizaremos por defecto sobre un producto de espacios métricos.

Observación 10 No existe una manera única de definir una distancia sobre un espacio producto:

- Escribiendo
$$d'_E(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \quad y \quad d''_E(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2},$$
también se definen distancias sobre E. Estas distancias son equivalentes a la distancia producto d_E, puesto que
$$(\forall x, y \in E), \quad d_E(x, y) \leq d''_E(x, y) \leq d'_E(x, y) \leq n \, d_E(x, y).$$
Es, entonces, indiferente trabajar con cualquiera de estas distancias. Hemos escogido d_E como distancia producto puesto que es la de más fácil utilización.

- En el espacio métrico producto (E, d_E) que acabamos de construir, la bola abierta de centro $a = (a_1, ..., a_2)$ de radio $r > 0$, verifica

$$B(a, r) = B(a_1, r) \times \cdots \times B(a_n, r).$$

Proposición 7 *Si $O_1, ..., O_n$ son abiertos de $E_1, ..., E_n$ (respectivamente), el producto $O_1 \times \cdots \times O_n$ es un abierto de E llamado abierto elemental.*

En esta definición queda sobre entendido (y es verdadero) que un abierto de E no es en general un abierto elemental.

Proposición 8 *La proyección de índice i definida por*

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : E = E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, ...x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

es una aplicación continua y abierta.

Proposición 9 *Una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} f : (F, d_F) & \longrightarrow & E = E_1 \times \cdots \times E_n \\ x & \longmapsto & f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n)) \end{array}$$

es continua en $x_0 \in F$ si y solamente si para todo i, $f_i = \pi_i \circ f$ es continua en x_0.

Proposición 10 *Sea una aplicación $f : E = E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow (F, d_F)$ y $a = (a_1, ..., a_n) \in E$. Para todo i, notamos*

$$f_i : E_i \longrightarrow F \qquad x \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$$

(f_i se llama aplicación parcial *de indice i en el punto a). Si f es continua en a, entonces para todo i, la aplicación parcial f_i es continua en a_i.*

Observación 11 Cuidado! La recíproca de este último resultado es falsa. Dicho de otra manera, puede suceder que todas los f_i sean continuas en a_i sin que f sea continua en a.

Proposición 11 (Continuidad de la distancia) *Sea (E, d_E) un espacio métrico. Entonces la aplicación distancia $d_E : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es lipschitziana, en particular continua.*

Proposición 12 (Continuidad de las operaciones en un e.v.n.) *Sea E un e.v.n sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Las aplicaciones*

$$E \times E \longrightarrow E \quad (x, y) \longmapsto x + y \quad y \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

son continuas.

Proposición 13 (Teorema del sánduche) *Sean f, g, h tres aplicaciones $f, g, h : (E, d_E) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si para todo $x \in E$ se tiene $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} h(x) = y_0$ entonces $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} g(x) = y_0$.*