Sucesiones en un espacio métrico

08/09/2010

1. Generalidades

1.1. Sucesiones, limite y adherencia

Definición 1 (Sucesión convergente) *Sea (E, d_E) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E. Se dice que x_n* converge *hacia el límite $x \in E$ si, para toda vecindad $V \subset E$ de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se tenga $x_n \in V$. Dicho de otra manera tenemos:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})[\forall n \geq N \Longrightarrow d_E(x_n, x) \leq \varepsilon].$$

Si el límite x existe, entonces x es único y notaremos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Definición 2 (Subsucesión) *Sea (E, d_E) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E. Una* sub-sucesión *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de la forma $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en donde $y_n = x_{\varphi(n)}$ y $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.*

Observación 1 La noción de convergencia de una sucesión es una noción puramente topológica.

Proposición 1 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en un espacio métrico (E, d_E) y sea $x \in E$. Los puntos siguientes son equivalentes:*

1) *el punto x es un punto de adherencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2) *existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge hacia x*
3) *para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in \overline{A_m}$ en donde $A_m = \{x_n : n \geq m\}$*
4) *x es un punto de acumulación del conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, o x es un punto de repetición de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (es decir que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ es infinito).*

El conjunto de los puntos de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{A_m}$ y es un conjunto cerrado.

Observación 2 Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede tener varios puntos de adherencia sin ser necesariamente convergente: 1 y -1 son puntos de adherencia de la sucesión $x_n = (-1)^n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, entonces x es el único punto de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2. Caracterización de la adherencia, de los conjuntos cerrados y de la continuidad

Proposición 2 *Sean (E, d_E) un espacio métrico y A un subconjunto de E.*

1) *Un punto $x \in E$ pertenece a $\overline{A}$ si y solo si existe una sucesión de puntos de A que converge hacia x.*
2) *Un subconjunto F de E es cerrado si y solo si toda sucesión de puntos de F converge hacia un elemento de F.*

Proposición 3 *Sea $f : (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ una aplicación y sea $x \in E$. La aplicación f es continua en x si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E que converge hacia x, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido de la distancia d_F hacia $f(x)$.*

1.3. Sucesiones de Cauchy y espacios completos

Definición 3 *Sea* (E, d_E) *un espacio métrico. Diremos que la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy si*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)[d_E(x_n, x_m) \leq \varepsilon]$$

De forma equivalente, se tiene para una sucesión de Cauchy:

$$\lim_{n,m\to+\infty} d_E(x_n, x_m) = 0.$$

Observación 3

- Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no se tiene la recíproca.
- Una sucesión de Cauchy es actodada
- La noción de sucesión Cauchy no es una noción topológica (no se puede definirla únicamente por medio de abiertos y cerrados).

Definición 4 *Diremos que un espacio métrico* (E, d_E) *es completo si toda sucesión de* Cauchy *es convergente. Un espacio vectorial normado completo es un espacio de* Banach.

Proposición 4 *Sean* (E, d_E) *un espacio métrico y* $A \subset E$.

1) Si E *es completo y* A *es cerrado, entonces* A *es completo.*

2) Si A *es completo, entonces* A *es cerrado en* E.

Proposición 5 *Sean* (E, d_E) *un espacio métrico y* (F, d_F) *un espacio métrico completo. Sea* $f : D \subset E \longrightarrow F$ *una aplicación. Sean* $A \subset D$ *y* $x \in \overline{A}$. *La función* f *admite un límite cuando* x *tiende hacia* $\overline{x}$ *si y solo si*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in A)\ [d_E(x, \overline{x}) \leq \delta \text{ y } d_E(y, \overline{x}) \leq \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon]$$