Funciones de varias variables 09/07/2010

1. Límites y continuidad para las funciones de varias variables

- Para estudiar la existencia y el valor eventual de un límite para una función f en un punto, $(0,0)$ por ejemplo, para el cual los teoremas generales no se aplican, considerar primero las aplicacions parciales $f(\cdot, 0)$ y $f(0, \cdot)$. Si una de esas dos aplicaciones parciales no tiene límite en 0, o si esas aplicaciones parciales tienen límites diferentes, entonces f no tiene límite en $(0,0)$.

  Si $f(\cdot, 0)$ y $f(0, \cdot)$ admiten un mismo límite finito l en 0, considerar funciones compuestas del tipo $x \mapsto f(x,x)$, $x \mapsto f(x, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, o más complicadas verificando siempre la pertinencia respecto al problema considerado.

  Si a pesar de todos los esfuerzos, las dos aplicaciones parciales siguen teniendo el mismo límite l en 0, se puede entonces intentar establecer que f admite l por límite en $(0,0)$ formando $|f(x,y) - l|$ y mayorando esa expresión por una expresión más simple y de límite 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Para conseguirlo puede ser a veces necesario el uso de un cambio a cordenadas polares.

- Para estudiar la continuidad de una función f de dos variables reales x, y en la cual la expresión de $f(x,y)$ no es la misma según la posición (x,y), examinar primero los puntos de la vecindad en los cuales la expresión de $f(x,y)$ es la misma, aplicando los teoremas generales. Luego para un punto especial, notado (x_0, y_0) por ejemplo, examinar el comportamiento de $f(x,y)$ cuando la pareja (x,y) tiende hacia la pareja (x_0, y_0).

- Para demostrar que una función de una o más variables reales es continua, intentar primero aplicar los teoremas generales.

2. Derivadas parciales primeras

- Para estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la existencia y continuidad de las derivadas parciales primeras de f, en un ejemplo en el cual la expresión de $f(x,y)$ varía según la posición de (x,y), comenzar por aplicar los teoremas generales sobre un abierto conveniente. En el (o los) punto(s) especiales, para la continuidad ver la sección 1 precedente. En ese(os) punto(s) especiales, por ejemplo $(0,0)$, para la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, formar la función parcial $f(\cdot, 0)$, y ver si $f(\cdot, 0)$, que es una función de una variable real, es derivable en 0.

  Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sobre el abierto considerado, para ver si $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua, regresamos al punto precedente.

  No olvidar que una función parcial, por ejemplo $f(\cdot, 0)$, es una función de una variable real, mientras que una función derivada parcial, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x}$, es una función de dos variables reales.

- Para estudiar una tasa de crecimiento $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, donde f es una función de una variable real, x, y son variables y $x < y$, se puede considerar la utilización el teorema de crecimientos finitos (teorema del valor medio en la literatura anglosajona) (si f es derivable sobre un intervalo que contiene x y y): existe z entre x y y (entonces z depende de x y y) tal que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z)$.

3. Diferenciabilidad

- Para demostrar que una aplicación $f : U \longrightarrow F$, donde U es un abierto de un e.v.n. E y F es un e.v.n., es diferenciable en un punto a de U, en un marco más bien abstracto, expresar $f(a+h)$ bajo la forma $f(a) + L_a(h) + o(||h||)$, donde $L_a : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal (y continua si $dim(E) < +\infty$).

- Para mostrar que una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite en $(0,0)$ derivadas parciales primeras no es diferenciable en $(0,0)$, formar $f(h,k) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$ y mostrar que esa expresión no tiende a 0 cuando la pareja (h,k) tiende a $(0,0)$.

4. $\mathcal{C}^1$-difeomorfismos

- Para mostrar que una aplicación ϕ de clase $\mathcal{C}^1$ sobre un abierto U de E es un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo de una vecindad V de un punto a de U sobre $\phi(V)$, es suficiente, según el teorema de inversa local, de mostrar que la diferencial $d_a\phi$ de ϕ en a es biyectiva, o que la matriz jacobiana $J_\phi(a)$ es inversible.

- Para mostrar que una aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ es un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo de un abierto U de E sobre un abierto V de F, basta mostrar que:

  · ϕ es de clase $\mathcal{C}^1$ sobre U,

  · ϕ es biyectiva,

  · para todo $a \in U$, $d_a\phi$ es una biyección de E sobre F.

- Para mostrar que una aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ es un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo, es suficiente mostrar que ϕ es de clase $\mathcal{C}^1$ y biyectiva, de expresar ϕ^{-1} (si el ejemplo lo permite), y demostrar que ϕ^{-1} es de clase $\mathcal{C}^1$.

5. Extremos de funciones numéricas de varias variables reales

- Para determinar los **extremos locales** de una aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ sobre un abierto U de $\mathbb{R}^2$, comenzar por determinar el o los *puntos críticos* de f, es decir, los puntos (x, y) de U tales que:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$$

  Según la teoría, si f admite un extremo local, éste es necesariamente un punto crítico de f.

  En un punto crítico (x_0, y_0) de f, calcular r, s, t:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

  luego calcular $s^2 - rt$.

  · Si $s^2 - rt < 0$ y $r > 0$, entonces f admite un mínimo local en (x_0, y_0).

  · Si $s^2 - rt < 0$ y $r < 0$, entonces f admite un máximo local en (x_0, y_0).

  · Si $s^2 - rt > 0$ entonces f no admite extremo local en (x_0, y_0); se dice que f admite un punto-silla en (x_0, y_0).

  · Si $s^2 - rt = 0$ intentar:

    ◦ ya sea mostrar que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ no es de signo constante cuando (h, k) es vecino de $(0, 0)$ (considerando, por ejemplo, de relacionar las variables (h, k), y entonces concluimos que f no admite extremo local en (x_0, y_0).

    ◦ o mostrar que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ es de signo constante cuando (h, k) es vecino de $(0, 0)$, y entonces f admite un extremo local en (x_0, y_0).

  - Para tratar los **extremos globales**. Sabemos gracias a la teoría que para una función $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$, es decir:

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \in \mathbb{R}^p, \ (||x|| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

    Entonces f admite un mínimo global.

    Si para una función f de dos variables x, y, relacionando x et y, construimos una función compuesta, por ejemplo $x \longmapsto f(x, x)$, $x \longmapsto f(x, x^2)$, ..., de límite $+\infty$ o $-\infty$, entonces f no admite extremo global.

  - Si f admite un extremo global en a, entonces f admite un extremo local en a; podremos buscar los extremos globales de f entre sus extremos locales (si estos han sido determinados con anterioridad). Para mostrar que f admite, por ejemplo, un mínimo global en un punto (x_0, y_0), formar $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ y mostrar que esta expresión es ≥ 0 para todo (h, k).