<u>Lección n°1</u>: **Álgebras hipercomplejas.**

USFQ, 2022

1. Álgebras sobre espacios vectoriales

Se escribirá $[\![1, n]\!]$ para denotar intervalo discreto y $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Definición. Sea K un cuerpo, un *álgebra* sobre K es un K-espacio vectorial V, armado de una operación binaria

$$\begin{aligned} \odot : V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto x \odot y \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. *Distributiva por la izquierda*: Para todo $x, y, z \in V$, se tiene que $x \odot (y + z) = x \odot y + x \odot z$.
2. *Distributiva por la derecha*: Para todo $x, y, z \in V$ se tiene que $(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$.
3. *Compatible con la multiplicación por escalar*: Para todo $x, y \in V$ y $a \in K$ se tiene que $a(x \odot y) = (ax) \odot y = x \odot (ay)$.

A la operación $\odot$ se le dice *producto bilineal* o, simplemente, *producto* del álgebra V.

Definición. Sean V, W, álgebras sobre K. Un *homomorfismo de álgebras* es una aplicación K-lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(x \odot_V y) = T(x) \odot_W T(y)$$

para todo $x, y \in V$; donde $\odot_V$ y $\odot_W$ son los productos de V y W, respectivamente.
Un álgebra V se dice isomorfa a otra álgebra W (notado por $V \cong W$), si es que existe un homomorfismo de álgebras $T : V \to W$, que sea biyectivo.

Definición. Una *subálgebra* de un álgebra V sobre K, es un K-subespacio vectorial U, tal que

$$x \odot y \in U,$$

cuando $x, y \in V$.

Definición. Un producto $\odot$, en un álgebra V, se dice

- *Asociativo*: Si para todo $x, y, z \in V$ se tiene que $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
- *Conmutativo*: Si para todo $x, y \in V$ se tiene que $x \odot y = y \odot x$.

Respectivamente, se dirá que V es un álgebra asociativa o conmutativa.
Un elemento $e \in V$ se dice una *unidad* si $e \odot x = x \odot e = x$ para todo $x \in V$. Si es que existe una unidad en V entonces se dirá que esta es un álgebra unitaria.
Dada un álgebra unitaria V, entonces un elemento $x \in V$ se dice que tiene un *inverso a la derecha* (resp. *a la izquierda*) si es que existe $y \in V$ tal que $x \odot y = e$ (resp. $y \odot x = e$). Un elemento $x \in V$ se dice *invertible* si es que tiene un mismo inverso a la derecha como a la izquierda, es decir, existe $y \in V$ tal que $x \odot y = y \odot x = e$.

Se puede comprobar fácilmente lo siguiente.

Lema 1.1. *Si V es un álgebra y tiene una unidad e, entonces esta es única.*
Si $x \in V$ es invertible entonces tiene un único inverso $y \in V$. Se le llamará el inverso de x, y se lo escribe como x^{-1}.

Si es que V tiene dimensión finita entonces se fijará una base de la misma:

$$\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\},$$

con $n = \dim(V)$. Así, cada elemento $x \in V$ es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, con $x_i \in K$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$.

Ejemplo 1.

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ podemos definir un estructura de álgebra sobre $\mathbb{R}$, por medio del producto

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

El producto es asociativo, tiene unidad (dado por el vector $(1, 0)$) y es conmutativo. La dimensión de esta álgebra es 2 y será conocida como *álgebra de los números complejos*, denotada por $\mathbb{C}$. Usualmente a un dupla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se la escribe como $x_1 + ix_2$ (de esta manera: $i = (0, 1)$, $i^2 = -(1, 0) = -1$) y el producto se leerá como

$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Por todas las propiedades anteriores y dado que todo elemento distinto de cero tiene un inverso, se puede concluir que $\mathbb{C}$ es también un cuerpo.

Definición. [9] Sea K un anillo unitario. Una *matriz de matrices* $n \times n$ *en* K es una familia de escalares $\{H_{ijk}\} \subset K$ con $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ tal que para cada $i \in [\![1, n]\!]$ se tiene que $(H_{ijk})_{jk} \in K^{n \times n}$.

El siguiente resultado se deduce de las propiedades del producto bilineal.

Lema 1.2. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $H = \{H_{ijk}\}$ una matriz de matrices $n \times n$, entonces existe un único producto $\odot$ que hace de V un álgebra y tal que verifica*

$$v_i \odot v_j = \sum_{k=1}^{n} H_{ijk} v_k \qquad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \tag{1}$$

Observación. A los escalares $H_{ijk} \in K$ que determinan el producto bilineal en V, por medio de (1) se les llamará *constantes de estructura.*

Observación. Toda álgebra sobre K, de dimensión finita n, es isomorfa (como espacio vectorial) a K^n, por medio de la aplicación K-lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^n$.En adelante, se asumirá por defecto a K^n (junto con la base canónica) para referirnos a una álgebra sobre K de dimensión n. Por convención, se asume que el primer vector de la base canónica:

$$(1, 0, \dots, 0)$$

es la unidad, si es que esta existe, y se representará por el símbolo 1. Además, para simplificar la notación, al producto $x \odot y$ se lo escribirá como la yuxtaposición xy, siempre que no haya riesgo de confusión.

Ejemplo 2. Por el lema 1.2, un álgebra de dimensión finita se puede describir solamente sabiendo cómo es el producto en los elementos de la base, por medio de la ecuación (1).

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se construye un álgebra sobre $\mathbb{R}$. Para ello, se escribe una cuádrupla $(x_1, x_2, x_3, x_1) \in \mathbb{R}^4$ como

$$x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4.$$

Es decir $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 0, 1)$. Ya que 1 debe ser la unidad, se satisface:

$$i1 = 1i = i, \quad j1 = 1j = j, \quad k1 = 1k = k.$$

Adicionalmente, se cumple para los otros elementos de la base que

$$i^2 = j^2 = -1$$

y

$$ij = k, \quad ji = -k.$$

Para extender el producto a todos los elementos $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, se asume la propiedad distributiva. Esto define un producto asociativo y no conmutativo. Se verifica que todo elemento tendrá un inverso. La dimensión del álgebra es 4 y será conocida como *álgebra de los cuaterniones*, denotada por $\mathbb{H}$. Como no es conmutativo, no es un cuerpo.

- En $\mathbb{R}^4$, por otro lado existe otra estructura de álgebra muy similar, conocida como *álgebra de los bicomplejos*, denotada por $\mathbb{BC}$, la cual cumple en cambio que

$$i^2 = j^2 = -1$$

y

$$ij = ji = k.$$

Esto define un producto que es asociativo y conmutativo. Sin embargo, no todos los elementos son invertibles y tampoco es un cuerpo.

2. Álgebras hipercomplejas

El siguiente concepto, como se lo presenta, se puede encontrar en [9].

Definición. Un álgebra V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, que sea unitaria, asociativa y de dimensión finita se dice que es un *sistema de números hipercomplejos* o *álgebra hipercompleja*.

El siguiente criterio sirve para verificar que un álgebra es hipercompleja.

Proposición 2.1. *Un álgebra de dimensión n, determinada por una matriz de matrices $H = \{H_{ijk}\}$, es un álgebra hipercompleja si y solo si para todo $i, j, m, l \in [\![1, n]\!]$ se cumple que*

$$\left.\begin{array}{l} H_{1jk} = \delta_{jk}, \\ H_{i1k} = \delta_{ik}, \\ \sum_{k=1}^{n} H_{jmk} H_{ikl} = \sum_{k=1}^{n} H_{ijk} H_{kml}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

El siguiente resultado es inmediato.

Lema 2.1. *Un álgebra hipercompleja es conmutativa si cumple* (2) *y se tiene que para todo $i, j, k \in [\![1, n]\!]$:*

$$H_{ijk} = H_{jik}. \tag{3}$$

Ejemplo 3.

- Usando las ecuaciones (2) o (3) se puede verificar que $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{BC}$ son álgebras hipercomplejas. Por ejemplo, en $\mathbb{C}$ se tiene que $1i = i$, $i1 = 1$, $1(1i) = (11)i$, $1(ii) = (1i)i$, $(ii)i = i(ii)$, lo cual prueba (3).

  Alternativamente, $\mathbb{C}$ es determinada por una matriz de matrices 2×2, que consta de $2^3 = 8$ números. A saber:

$$H_{111} = 1, \quad H_{112} = 0, \quad H_{121} = 0, \quad H_{122} = 1,$$

$$H_{211} = 0, \quad H_{212} = 1, \quad H_{221} = -1, \quad H_{222} = 0;$$

  de donde se deduce (2). Los casos para $\mathbb{H}$ y $\mathbb{BC}$ son similares.

- Fijando dos escalares reales α y β, se considera a $\mathbb{R}^2$ como un álgebra sobre $\mathbb{R}$, determinada por las constantes de estructura:

$$H_{111} = 1, \quad H_{112} = 0, \quad H_{121} = 0, \quad H_{122} = 1,$$

$$H_{211} = 0, \quad H_{212} = 1, \quad H_{221} = -\alpha, \quad H_{222} = \beta.$$

  Es decir, la unidad es $(1, 0)$ y el vector $i := (0, 1)$ cumple que

$$i^2 = -\alpha - \beta i.$$

Al igual que antes, se comprueba que $\mathbb{R}^2$ con este producto es un álgebra hipercompleja y es además conmutativa. Se los conoce como *números complejos generalizados*, o también *números complejos en 2 dimensiones* y denotados por $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

El nombre se debe a que el álgebra de los números complejos es un caso particular de los números complejos generalizados, pues $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Serán el álgebra en el que este trabajo se centrará y serán explorados a fondo más adelante.

- Las álgebras de Clifford son famosas por sus aplicaciones a la física, véase [1], son una generalización de las álgebras ya vistas. Se construyen de la siguiente manera: dado $n \in \mathbb{N}$, se considera el espacio $\mathbb{R}^{2^n}$, en donde cada elemento de la base canónica, se lo nombra como e_A, donde $A = \emptyset$ o $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ con $s \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in [\![1, n]\!]$ y $a_i < a_{i+1}$ para todo índice i. Es decir, la base está escrita como

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ \dots\ , e_n,\ e_{12},\ e_{13},\ \dots\ ,\ e_{n-1\,n},\ \dots\ ,\ e_{12\dots n}.$$

En lo anterior, se ha simplificado la notación con $0 = \emptyset$ y

$$a_1 a_2 \dots a_s = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

El producto está definido como

$$e_A e_B = (-1)^{|A\cap B|}(-1)^{p(A,B)} e_{A\triangle B},$$

donde $|\cdot|$ es la cardinalidad de un conjunto, $\triangle$ es la suma simétrica de conjuntos y $p(A,B) = \sum_{l\in B} |\{i \in A\ :\ i > l\}|$. Se comprueba que son álgebras hipercomplejas pero no necesariamente son conmutativas. En particular, se tiene que e_0 es la unidad y que para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= -1, \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad \text{para todo } i \neq j. \end{aligned}$$

Además, $e_{a_1} e_{a_2} \dots e_{a_s} = e_{a_1 a_2 \dots a_s}$ para $1 \leq a_1 < a_2 < \dots a_s \leq n$. Las álgebras de Clifford se denotan como $\mathscr{A}_n$ o $\mathscr{C}\ell_n$ y verifican que $\mathscr{A}_0 \cong \mathbb{R}$, $\mathscr{A}_1 \cong \mathbb{C}$ y $\mathscr{A}_2 \cong \mathbb{H}$. Para más información acerca de las álgebras de Clifford se puede revisar [4].

Definición. Un elemento $x \in V$, con $x \neq 0$, se dice un *divisor de cero por la izquierda* (resp. *a la derecha*), si $xy = 0$ (resp. $yx = 0$) para algún $y \neq 0$. Es un *divisor de cero*, si lo es por la derecha e izquierda.

Lema 2.2. *En un álgebra hipercompleja, un número distinto de cero es invertible si y solamente si no es un divisor de cero.*

Por el lema 2.2, para cualquier álgebra hipercompleja se tiene que la operación división:

$$\frac{x}{y} := xy^{-1}$$

solo está bien definida si y es distinto de cero y no es un divisor de cero.

3. Representación matricial

Definición. Dada V un álgebra sobre K, se define una *representación de V* como un homomorfismo de álgebras

$$\mu : V \to \mathscr{L}_K(V).$$

Se dice que la representación es fiel si es que tal homomorfismo es inyectivo. Por otro lado, se dice que V tiene una *representación matricial* si es que existe un homomorfismo de álgebras inyectivo

$$\mathscr{M} : V \to K^{n\times n},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1. *Toda álgebra hipercompleja tiene una representación fiel y una representación matricial.*

Demostración. Para probar la existencia de la representación fiel, se considera la función

$$\mu : V \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V),$$

dada por $\mu(x) = \mu_x$, donde $\mu_x(y) = xy$ para todo $y \in V$. Es claro que $\mu_x \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V)$ para todo $x \in V$, además por la bilinealidad del producto en V, se verifica que μ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. La propiedad $\mu_{xy} = \mu_x \circ \mu_y$ es consecuencia inmediata de la asociatividad del producto. Por lo tanto, μ es un homomorfismo de álgebras. Se tiene que μ inyectiva ya que si $\mu_x = \mu_{x'}$ entonces, en particular $x1 = x'1$ y así $x = x'$. Cabe notar que se puede definir otra representación fiel $\mu' : V \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V)$, donde ahora $\mu'_x(y) := yx$.

Para la existencia de representaciones matriciales, sea n la dimensión de V y se considera la función inyectiva

$$i : \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V) \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

dada por $i(T) = [T]_{\mathscr{C}}$, donde $[T]_{\mathscr{C}}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal T con respecto a la base canónica $\mathscr{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Especificamente, si es que $T(e_j) = \sum_{i=1}^n T_{ij}e_i$, entonces $[T]_{\mathscr{C}}$ es la matriz $(T_{ij})_{i,j=1}^n$. La aplicación i es lineal y un homomorfismo. De esta manera, $\mathscr{M} := i \circ u$ y $\mathscr{M}' := i \circ u'$ son representaciones matriciales de V. ■

Al homomorfismo $\mathscr{M}$, descrito en la anterior demostración, se lo conoce como *representación matricial por la izquierda* y a $\mathscr{M}'$ como *representación matricial por la derecha*. El siguiente resultado da una descripción explícita de estas representaciones.

Proposición 3.1. *Sea V un álgebra hipercompleja de dimensión n. La representación matricial por la derecha:*

$$\mathscr{M} : V \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

está dada por

$$\mathscr{M}(x) = (X_{kj})_{k,j=1}^n; \tag{4}$$

donde $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y $X_{kj} = \sum_{i=1}^n H_{ijk}x_i$.
Alternativamente, para la representación matricial por la izquierda, se tiene que

$$\mathscr{M}'(x) = (X'_{kj})_{k,j=1}^n; \tag{5}$$

donde $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y $X'_{kj} = \sum_{i=1}^n H_{jik}x_i$.

Demostración. Fijamos un elemento $x \in V$ y se define la matriz $A(x) = (X_{kj})_{k,j=1}^n$. Sea ahora $y \in V$ cualquiera, se deduce de se deduce que

$$xy = A(x)y,$$

donde la multiplicación anterior es de una matriz con un vector. Ahora, $\mu_x(y) = xy$, por lo tanto se satisface que $\mathscr{M}(x)y = i \circ u_x(y) = A(x)y$. Puesto que y es arbitrario, $\mathscr{M}(x)$ cumple la ecuación (4). Similarmente se tiene para $\mathscr{M}'$, notando que si $B(x) = (X'_{kj})_{k,j=1}^n$, entonces

$$yx = B(x)y.$$

■

Observación. Obsérvese que si V es un álgebra hipercompleja conmutativa, entonces las dos representaciones matriciales coinciden, es decir, $\mathscr{M} = \mathscr{M}'$.
De ahora en adelante se asumirá que todas las álgebras hipercomplejas son conmutativas y a $\mathscr{M}$ se la dirá la representación matricial del álgebra.
Dado que $\mathscr{M}$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo entonces, si $\mathscr{M}(V)$ es su imagen directa, se tiene que V es isomorfo a ella:

$$V \cong \mathscr{M}(V),$$

por medio de la asignación $x \mapsto \mathscr{M}(x)$. El conjunto $\mathscr{M}(V)$ es una subálgebra de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y sus elementos se llamarán *matrices características*.

Si no se asume conmutatividad, los conceptos a continuación tienen versiones similares usando la representación por la derecha y por la izquierda.

Definición. Dado un elemento x en un álgebra hipercompleja V, entonces se define su *magnitud* como el número

$$|x|_V := |\det(\mathscr{M}(x))|^{1/n},$$

donde det es el determinante y n es la dimensión de V.

La representación matricial permite caracterizar a los elementos invertibles.

Proposición 3.2. *Para cualesquier elementos x, y en un álgebra hipercompleja V, se cumple que*

$$|xy|_V = |x|_V |y|_V. \tag{6}$$

Además, un elemento x es invertible cuando $|x|_V \neq 0$. También se tiene que x es un divisor de cero, o es igual a cero, si $|x|_V = 0$.
Adicionalmente, si x es invertible, su inverso estará dado por

$$x^{-1} = \frac{x'}{|x|^n \operatorname{sgn}(\det(\mathscr{M}(X)))}, \tag{7}$$

donde x' es tal que $\mathscr{M}(x')$ es la matriz adjunta $\operatorname{adj}(\mathscr{M}(x))$ *y* sgn *es la función signo.*

La anterior proposición prueba que todas los elementos invertibles tienen como representación matricial, una matriz invertible o no singular, por otro lado todos los divisores de cero estarán representados por una matriz singular. Por esta razón al conjunto de los divisores de cero, junto al cero, se lo puede escribir como

$$Sing_V.$$

De forma directa de la proposición 3.2 se sigue el siguiente resultado.

Lema 3.2. *Dados V un álgebra hipercompleja, $x \in Sing_V$, $y \in V$; entonces*

$$xy \in Sing_V.$$

Ejemplo 4. Sea $\mathbb{C}$ el álgebra de los números complejos y $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$, entonces por la ecuación (4) se cumple que

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

y por consiguiente $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|z\|$. Es así como en el caso de los números complejos, la magnitud y el módulo coinciden. Más aún, como el módulo es una norma, no existen divisores de cero y $Sing_{\mathbb{C}} = \{0\}$.
Además, para cada número $z = x+iy$ existe su *conjugado* $\overline{z}$ definido como $x-iy$ y cumple la importante propiedad:

$$z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 = |x|^2_{\mathbb{C}}$$

Por tanto, $\overline{z} = z'$ usando la notación de la ecuación (7), la cual a su vez toma la familiar forma:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

-En el anterior ejemplo se ve que el conjugado de un número complejo coincide con aquel número que tiene como representación matricial a la matriz conjugada.

Ejemplo 5. Dado un número $z = a + bi + cj + dk$ en el álgebra de los números bicomplejos $\mathbb{BC}$, su representación matricial está dada por

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Referencias

[1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications.* Birkhäuser Boston, 2004.

[2] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time.* Birkhäuser Basel, 2008.

[3] Ceballos, J., Coloma, N., Teodoro, A. D., y Ochoa-Tocachi, D. Generalized fractional Cauchy-Riemann operator associated with the fractional Cauchy-Riemann operator. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(5), 2020.

[4] Delanghe, R., Sommen, F., y Souček, V. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions.* Springer Netherlands, 1992.

[5] Herstein, I. *Topics in algebra.* Xerox College Publ,Waltham, Mass, 1964.

[6] Kähler, U. y Vieira, N. Fractional clifford analysis. págs. 191-201. Springer International Publishing, 2013.

[7] Lee, G.*Abstract algebra: An introductory course.* Springer, Cham, 2018.

[8] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions.* Springer International Publishing, 2015.

[9] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. On holomorphic hypercomplex connections. 23(1):179-207, 2012.

[10] Scheffers, G. *Sur la généralisation des fonctions analytiques.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 116:1114-1117, 1893.

[11] Stein, E. *Complex analysis.* Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.

[12] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.